D. SIVOUKHINE

COURS DE PHYSIQUE GÉNÉRALE

OPTIQUE

4

DEUXIÈME PARTIE

ÉDITIONS MIR

Д. В. СИВУХИН

ОБЩИЙ КУРС ФИЗИКИ

Том IV, ч. 2

ОПТИКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

D. SIVOUKHINE

COURS DE PHYSIQUE GÉNÉRALE

Tome IV

OPTIQUE

Deuxième partie

ÉDITIONS MIR · MOSCOU

Traduit du russe
par SERGUEÏ MEDVÉDEV

На французском языке

CHAPITRE V

RÉFLEXION ET RÉFRACTION DE LA LUMIÈRE

§ 62. Lumière polarisée et lumière naturelle

1. Dans notre étude des phénomènes d'interférence et de diffraction nous n'avons pas tenu compte de la transversalité des vibrations lumineuses et nous avons admis que les vibrations que l'on avait à composer se produisaient dans une seule direction. Nous allons étudier maintenant les phénomènes de *polarisation de la lumière* qui sont caractéristiques des *vibrations transversales*. Une onde plane est dite *polarisée rectilignement* si le vecteur électrique E est constamment contenu dans un plan qui contient aussi la normale N au front d'onde (fig. 234). Ce plan est le *plan de vibration* ou *plan de polarisation* *). On doit distinguer la lumière polarisée de la *lumière naturelle*. La lumière naturelle est telle qu'à tout instant les vecteurs E, H, N sont rectangulaires, mais les sens des vecteurs E et H changent de façon désordonnée au cours du temps. De ce fait la lumière naturelle possède (statistiquement) la *symétrie axiale* par rapport à sa direction de propagation. Une lumière polarisée rectilignement ne présente plus la symétrie axiale et ses propriétés sont différentes dans les différents plans contenant la normale N. Parmi tous ces plans, il existe deux plans particuliers, l'un contenant le vecteur E et l'autre le vecteur H. La dissymétrie axiale subsiste dans un mélange de lumière naturelle et de lumière polarisée; ce mélange est appelé *lumière partiellement polarisée*.

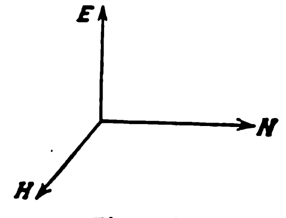


Fig. 234

2. On produit aisément une lumière polarisée rectilignement en faisant passer la lumière naturelle à travers une lame de tourmaline dont les faces sont parallèles à son axe optique. La tourmaline absorbe fortement les rayons lumineux dont le vecteur électrique est perpendiculaire à l'axe optique, mais se laisse traverser par les rayons dont le vecteur électrique est parallèle à l'axe optique.

*) Selon l'ancienne terminologie, on appelait plan de polarisation le plan (N, H) contenant le vecteur magnétique H.

Lorsqu'on envoie sur la lame de tourmaline une lumière naturelle, celle-ci est en partie absorbée dans la lame, tandis que les rayons émergents sont polarisés rectilignement, ayant leurs vecteurs électriques orientés parallèlement à l'axe optique de la tourmaline.

On retrouve cette propriété chez les *polaroïds* qui sont d'un emploi plus commode. Ce sont des pellicules colloïdales artificielles, utilisées pour la production de lumière polarisée. Le matériau le plus utilisé pour préparer les polaroïds est un composé d'iode et de quinine, appelé *hérapathite*. On introduit cette substance dans une pellicule de celluloïde ou de gélatine. Les axes des cristaux ultramicroscopiques d'hérapathite sont orientés parallèlement par un procédé convenable (généralement on utilise un procédé d'orientation mécanique qui consiste à étirer la masse visqueuse à travers une fente étroite). La masse ainsi préparée se comporte comme si elle ne comportait qu'un seule cristal et absorbe les vibrations lumineuses dont le vecteur électrique est perpendiculaire à l'axe optique. Nous étudierons plus tard différents autres procédés d'obtention de la lumière polarisée.

Tout appareil servant à produire de la lumière polarisée est appelé *polariseur*. Si on utilise le même appareil pour l'étude de la polarisation, on l'appelle *analyseur*. Ainsi les cristaux de tourmaline ou les polaroïds peuvent servir de polariseur et d'analyseur.

3. Disposons deux cristaux de tourmaline ou deux polaroïds à la suite l'un de l'autre de telle façon que leurs axes OA_1 et OA_2 forment un certain angle (fig. 235). Le premier polaroïd laissera passer la lumière dont le vecteur électrique $\boldsymbol{E}_0$ est parallèle à son axe OA_1; notons I_0 l'intensité de la lumière transmise. Décomposons le vecteur $\boldsymbol{E}_0$ en un vecteur $\boldsymbol{E}_{\parallel}$ parallèle à l'axe OA_2 du second polaroïd, et un vecteur $\boldsymbol{E}_{\perp}$ qui est perpendiculaire à l'axe OA_2 ($\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{E}_{\parallel} + \boldsymbol{E}_{\perp}$). La composante $\boldsymbol{E}_{\perp}$ sera arrêtée par le second polaroïd, de sorte que les deux polaroïds ne seront traversés que par la lumière du vecteur électrique $\boldsymbol{E} \equiv \boldsymbol{E}_{\parallel}$, de module $E = E_0 \cos \alpha$. L'intensité de la lumière ayant traversé les deux polaroïds est

$$I = I_0 \cos^2 \alpha. \tag{62.1}$$

Cette relation, qui s'applique à n'importe quel polariseur ou analyseur, est appelée *loi de Malus* (1775-1812).

4. On obtient des états de polarisation particulièrement importants lorsqu'on superpose plusieurs ondes monochromatiques. Ces états de polarisation présentent les mêmes caractères généraux, quelle que soit la nature physique des ondes à l'étude. Pour concrétiser, commençons par un exemple mécanique où une particule exécute deux vibrations harmoniques de même fréquence ω: une vibration se produit le long de l'axe X, l'autre le long de l'axe Y. Les coordonnées de la particule sont

$$x = a \cos \omega t, \quad y = b \cos (\omega t + \delta), \quad (a, b > 0). \tag{62.2}$$

En éliminant le temps t entre ces expressions, on trouve l'équation de la trajectoire de la particule:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\delta + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2\delta. \qquad (62.3)$$

C'est une courbe de second ordre, à savoir une *ellipse*, puisque selon (62.2) les coordonnées x et y ne peuvent devenir infinies. Ainsi *la composition de deux vibrations rectangulaires de même fréquence conduit à un mouvement le long d'une ellipse.*

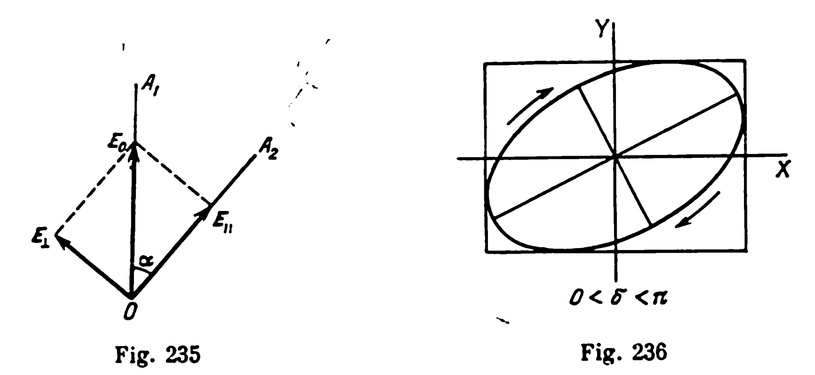


Fig. 235 Fig. 236

Pour déterminer le sens de déplacement de la particule sur l'ellipse, remarquons qu'on peut toujours fixer la phase initiale δ telle qu'elle soit comprise entre $-\pi$ et $+\pi$. La vibration de plus grande phase sera dite *en avance* et celle de phase plus petite sera dite *en retard*. Ecrivons les expressions des composantes de la vitesse de la particule le long des axes X et Y:

$$\dot{x} = -\omega a \sin \omega t, \quad \dot{y} = -\omega b \sin(\omega t + \delta).$$

Pour $t = 0$, on a $x = a$, $\dot{y} = -\omega b \sin\delta$, ce qui signifie que la particule se trouve sur la droite verticale $x = a$. Si $-\pi < \delta < 0$, $\dot{y} > 0$ et la particule se déplace vers le haut en parcourant l'ellipse dans le sens antihoraire. Si $0 < \delta < \pi$, $\dot{y} < 0$, et la particule se déplace vers le bas en parcourant l'ellipse dans le sens horaire (fig. 236). Dans les deux cas, *le mouvement le long de l'ellipse s'effectue à partir de l'extrémité positive de l'axe de la vibration, qui est en avance de phase, en allant vers l'extrémité positive de l'axe de la vibration, qui est en retard de phase.*

Suivant les valeurs des paramètres a, b, δ, l'ellipse peut se réduire à un segment de droite ou à une circonférence. La formule (62.3) montre que le mouvement circulaire implique que: 1) $\cos\delta = 0$, i.e. $\delta = \pm\pi/2$, et 2) $a = b$.

5. Tout ce qui vient d'être dit s'applique à la composition de *n'importe quelles* vibrations de grandeurs vectorielles, notamment des grandeurs électromagnétiques. La composition de deux ondes électromagnétiques, polarisées rectilignement dans deux directions rectangulaires, donne une onde *polarisée elliptiquement*. En tout point de l'espace, l'extrémité du vecteur électrique (et du vecteur magnétique) de l'onde résultante décrit une ellipse. Si l'ellipse se réduit à un cercle, on dit que l'onde présente une *polarisation circulaire*.

Un champ vectoriel monochromatique est toujours polarisé elliptiquement, dans le cas général. Un champ vectoriel est dit monochromatique si ses trois projections sur les axes de coordonnées exécutent des vibrations harmoniques de même fréquence, i.e. sont représentées par des formules de la forme

$$E_j = C_j(\mathbf{r}) \cos [\omega t + \delta_j(\mathbf{r})] \quad (j = x,\ y,\ z). \tag{62.4}$$

En multipliant ces expressions par les vecteurs unitaires des coordonnées $\mathbf{e}_j$ et en faisant la somme sur tous les j, on obtient la forme vectorielle du champ monochromatique:

$$\mathbf{E} = \mathbf{A}_1(\mathbf{r}) \cos \omega t + \mathbf{A}_2(\mathbf{r}) \sin \omega t. \tag{62.5}$$

Si les vecteurs $\mathbf{A}_1(\mathbf{r})$ et $\mathbf{A}_2(\mathbf{r})$ sont colinéaires partout ou en certains points, en ces points le vecteur $\mathbf{E}$ est parallèle aux vecteurs $\mathbf{A}_1(\mathbf{r})$ et $\mathbf{A}_2(\mathbf{r})$, ce qui signifie que le champ $\mathbf{E}$ est polarisé rectilignement. Dans le cas où les vecteurs $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$ ne sont pas colinéaires, d'après la formule (62.5), le vecteur $\mathbf{E}$ est à tout instant contenu dans le plan défini par les vecteurs $\mathbf{A}_1(\mathbf{r})$ et $\mathbf{A}_2(\mathbf{r})$. Il en résulte que l'extrémité du vecteur $\mathbf{E}$ décrit une courbe plane. Pour trouver la forme de cette courbe, faisons coïncider l'axe X avec la direction de $\mathbf{A}_1$ et l'axe Y avec la direction orthogonale contenue dans le plan $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2)$. Les projections E_x et E_y sont alors

$$E_x = a_x(\mathbf{r}) \cos (\omega t + \delta_x), \quad E_y = a_y(\mathbf{r}) \cos (\omega t + \delta_y).$$

Le problème se trouve ainsi ramené à la composition de deux vibrations harmoniques rectangulaires, de même fréquence, et déphasées l'une par rapport à l'autre. Le résultat de cette composition correspond au mouvement le long d'une ellipse.

La lumière émise par les sources réelles *n'est pas polarisée* ou *ne l'est que partiellement*. Cela implique qu'elle n'est pas monochromatique.

§ 63. Nombre de conditions aux limites indépendantes, figurant dans la théorie électromagnétique de la lumière

1. On établit la *théorie formelle de la réflexion et de la réfraction de la lumière* en se fondant sur les *conditions aux limites* que vérifient les vecteurs du champ électromagnétique à la surface de séparation

de deux milieux. Cette théorie permet de définir les grandeurs caractérisant les ondes réfléchie et réfractée, mais ne peut déceler le *mécanisme* de formation de ces ondes. Il faut faire appel à la *théorie moléculaire* pour trouver une réponse à cette question, ainsi qu'à d'autres, plus délicates encore. Nous exposerons d'abord la théorie formelle, puis nous donnerons un exposé succinct de la théorie moléculaire de la réflexion et de la réfraction de la lumière.

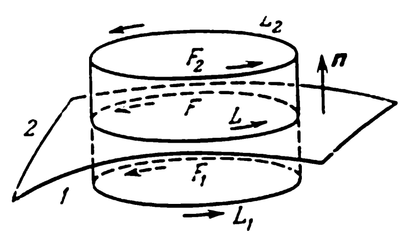


Fig. 237

Assimilons tous les corps à des milieux continus et supposons qu'il n'existe ni charges, ni courants superficiels sur les surfaces de séparation de ces corps. Dans ces conditions, les composantes tangentielles des vecteurs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{H}$ et les composantes normales des vecteurs $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{B}$ sont continues sur les surfaces de séparation :

$$E_t^{(1)} = E_t^{(2)}, \quad H_t^{(1)} = H_t^{(2)}, \tag{63.1}$$

$$D_n^{(1)} = D_n^{(2)}, \quad B_n^{(1)} = B_n^{(2)}. \tag{63.2}$$

Ces différentes conditions résultent des équations macroscopiques de Maxwell écrites sous forme intégrale et, par suite, sont valables pour *tous les milieux* pouvant être assimilés à des milieux continus. Les conditions (63.1) découlent des équations

$$\left.\begin{aligned} \oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} &= -\frac{1}{c}\int \dot{\boldsymbol{B}}\, d\boldsymbol{F}, \\ \int \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} &= \frac{1}{c}\int \dot{\boldsymbol{D}}\, d\boldsymbol{F} + \frac{4\pi}{c}\mathcal{J}, \end{aligned}\right\} \tag{63.3}$$

et les conditions (63.2) des équations

$$\oint \boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{F} = 0, \quad \oint \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{F} = 0 \tag{63.4}$$

(voir t. III, § 82).

2. Les équations (63.1) et (63.2) ne sont pas absolument indépendantes et pour le démontrer, nous construirons un cylindre infiniment court dont les génératrices sont perpendiculaires à la surface de séparation et dont les bases F_1 et F_2 sont situées de part et d'autre de celle-ci (fig. 237). En vertu du théorème sur la circulation du vecteur $\boldsymbol{H}$, on a

$$\oint_{L_1} H_l^{(1)}\, dl = \frac{1}{c}\int \dot{D}_n^{(1)}\, dF_1,$$

$$\oint_{L_2} H_l^{(2)}\, dl = \frac{1}{c}\int \dot{D}_n^{(2)}\, dF_2.$$

A la limite lorsque la hauteur du cylindre devient nulle, les contours L_1 et L_2 se confondent en un contour commun L et les bases F_1 et F_2 se confondent en un élément de surface F limité par le contour L. Comme les composantes tangentielles du vecteur $\boldsymbol{H}$ sont continues, les intégrales de contour sont égales, et par suite

$$\int_F \dot{D}_n^{(1)}\, dF = \int_F \dot{D}_n^{(2)}\, dF.$$

On a également

$$\int_F \dot{B}_n^{(1)}\, dF = \int_F \dot{B}_n^{(2)}\, dF.$$

Comme le domaine d'intégration est arbitraire

$$\dot{D}_n^{(1)} = \dot{D}_n^{(2)}, \quad \dot{B}_n^{(1)} = \dot{B}_n^{(2)}. \tag{63.5}$$

Ce raisonnement montre que les conditions aux limites (63.5) résultent des conditions (63.1) et des équations de Maxwell relatives à la circulation des vecteurs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{H}$. Si le champ est monochromatique, $\dot{\boldsymbol{D}} = i\omega \boldsymbol{D}$, $\dot{\boldsymbol{B}} = i\omega \boldsymbol{B}$, et les conditions (63.5) se ramènent aux conditions (63.2). Il en découle que pour des champs monochromatiques les conditions aux limites (63.2) sont vérifiées automatiquement si sont vérifiées les conditions (63.1). C'est pourquoi on ne peut utiliser par la suite que les conditions (63.1) sans s'occuper de la réalisation des conditions (63.2).

Si on écrit les conditions (63.1) sous forme algébrique, on obtient quatre équations, puisque chacun des vecteurs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{H}$ peut être décomposé en deux composantes tangentielles et une composante normale. Ainsi l'électrodynamique impose *quatre conditions aux limites indépendantes.*

Dans les théories anciennes de l'éther élastique, il y avait *six* conditions aux limites indépendantes : égalité de trois composantes des déplacements et de trois composantes des forces de tension élastique, de part et d'autre de la surface de séparation. Pour que ces six conditions soient vérifiées, il faut qu'il existe dans le cas général, en plus des ondes transversales, des ondes *longitudinales.* Or, comme l'expérience éliminait les ondes longitudinales, la théorie se devait d'imposer à l'éther des propriétés telles que les ondes longitudinales ne puissent pas apparaître (éther incompressible ou infiniment compressible). Néanmoins on ne réussit pas à trouver de solution satisfaisante à ce problème. La théorie électromagnétique ne se heurte pas à cette difficulté, puisqu'elle ne connaît que quatre conditions aux limites indépendantes, qui peuvent être satisfaites avec les deux composantes transversales de l'onde réfléchie et les deux composantes transversales de l'onde réfractée.

§ 64. Lois géométriques de la réflexion et de la réfraction des ondes

1. Les conditions aux limites imposent que la lumière se réfléchisse et se réfracte sur la surface de séparation de deux milieux. Nous verrons plus tard que, en général, les conditions aux limites ne peuvent être satisfaites que s'il existe une onde réfléchie et une onde réfractée. Notons l'onde incidente par la lettre e, l'onde réfléchie par la lettre r et l'onde transmise par la lettre d.

Soit une onde monochromatique plane tombant sur une surface de séparation plane et immobile:

$$\boldsymbol{E}^{(e)}=\vec{\mathcal{E}}e^{i(\omega t-\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{r})}. \tag{64.1}$$

Par raison de symétrie, l'onde réfléchie et l'onde transmise

$$\boldsymbol{E}^{(r)}=\boldsymbol{R}e^{i(\omega t-\boldsymbol{k}_1'\boldsymbol{r})}, \tag{64.2}$$

$$\boldsymbol{E}^{(d)}=\boldsymbol{D}e^{i(\omega t-\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{r})} \tag{64.3}$$

sont également planes et de même fréquence ω que l'onde incidente. L'égalité des fréquences résulte du caractère linéaire et homogène des conditions aux limites. Si les milieux sont immobiles, les coefficients des intensités des champs figurant dans les conditions aux limites peuvent dépendre des coordonnées, mais pas du temps. Si ω_r et ω_d désignent les fréquences de l'onde réfléchie et de l'onde transmise, toutes les conditions (63.1) se présentent sous la forme

$$A(\boldsymbol{r})\,e^{i\omega t}+B(\boldsymbol{r})\,e^{i\omega_r t}+C(\boldsymbol{r})\,e^{i\omega_d t}=0.$$

S'il existe une onde réfléchie et une onde transmise, les coefficients $A(\boldsymbol{r})$, $B(\boldsymbol{r})$ et $C(\boldsymbol{r})$ sont différents de zéro. Par conséquent les fonctions $e^{i\omega t}$, $e^{i\omega_r t}$ et $e^{i\omega_d t}$ sont linéairement dépendantes, ce qui implique que $\omega=\omega_r=\omega_d$. Si la surface de séparation est mobile, A, B et C dépendent de $\boldsymbol{r}$ et du temps; dans ce cas, la fréquence varie (effet Doppler). Dans ce chapitre, on suppose partout que les milieux sont immobiles.

2. Calculons les vecteurs d'onde de l'onde réfléchie et de l'onde transmise. Les formules qui expriment ces vecteurs représentent les *lois géométriques de la réflexion et de la réfraction des ondes* et caractérisent leurs *directions de propagation*, ainsi que l'*amortissement dans l'espace* des ondes évanescentes.

Faisons coïncider le plan de coordonnées XY avec la surface de séparation des milieux. Prenons pour axe X la ligne d'intersection du plan de séparation des milieux avec le plan d'incidence. L'axe Z est orienté en bas, i.e. dans le sens allant du premier au second milieu. L'axe Y est perpendiculaire au plan d'incidence et il est contenu dans le plan de séparation. Comme nous venons de le dé-

montrer, les ondes incidente, réfléchie et transmise ont la même fréquence; par conséquent n'importe laquelle des conditions (63.1) s'écrit sous la forme

$$Ae^{-i(k_{1x}x+k_{1y}y)}+Be^{-i(k'_{1x}x+k'_{1y}y)}+Ce^{-i(k_{2x}x+k_{2y}y)}=0,$$

où A, B et C sont des constantes différentes de zéro, à condition que les ondes réfléchie et transmise existent effectivement. En posant $y=0$, on obtient une relation linéaire entre les fonctions $e^{-ik_{1x}x}$, $e^{-ik'_{1x}x}$, $e^{-ik_{2x}x}$, ce qui implique que

$$k_{1x}=k'_{1x}=k_{2x}, \qquad (64.4)$$

et

$$k_{1y}=k'_{1y}=k_{2y}. \qquad (64.5)$$

Ainsi les composantes tangentielles des vecteurs d'onde des ondes réfléchie et transmise sont égales à la composante tangentielle du vecteur d'onde de l'onde incidente. Il nous reste à trouver les composantes normales de ces vecteurs. Selon la relation (5.14)

$$k_1'^2=k_1^2=\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_1, \qquad (64.6)$$

$$k_2^2=\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_2, \qquad (64.7)$$

où ε_1 et ε_2 sont les permittivités diélectriques des deux milieux. D'autre part

$$k'_{1z}=-\sqrt{k_1^2-k_{1x}^2}, \qquad (64.8)$$

$$k_{2z}=\sqrt{k_2^2-k_{1x}^2}. \qquad (64.9)$$

On prend le signe moins devant le radical de (64.8) parce que le signe plus correspond à l'onde incidente. Le signe devant le radical de (64.9) sera précisé plus loin sur la base de considérations physiques.

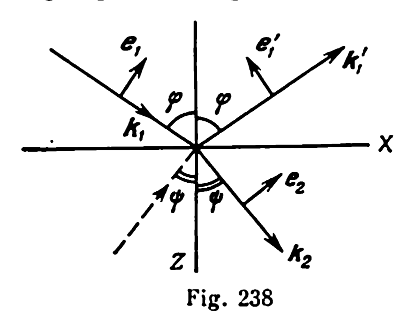


Fig. 238

Si l'onde incidente est homogène, il résulte de (64.4), (64.5) et (64.8) que l'onde réfléchie est homogène. Sa normale d'onde est contenue dans le plan d'incidence et l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence. En ce qui concerne l'onde transmise, on doit distinguer deux cas différents.

P r e m i e r c a s. $k_2^2>k_{1x}^2$, i.e. l'onde réfractée est homogène. Déterminons le signe devant le radical de (64.9). Au signe plus correspond une onde qui s'éloigne de la surface de séparation (sur la figure 238, son sens de propagation est indiqué par une droite fléchée en trait plein). Au signe moins correspond une onde se dirigeant vers la

surface de séparation (sur la figure 238, son sens est indiqué par une droite fléchée en pointillé). Ces deux droites fléchées indiquent les sens de propagation des fronts d'onde, i.e. des plans de même phase. Il est évident que l'onde réfléchie et l'onde réfractée *s'éloignent* de la surface de séparation et cette condition assure que la solution du problème est univoque. Mais la condition de l'éloignement des ondes concerne leurs énergies et non pas leurs phases. On démontre que pour les ondes électromagnétiques et pour des milieux isotropes, les sens de propagation de l'énergie et de la phase coïncident. On en conclut que l'on ne doit garder devant le radical de (64.9) que le signe plus.

Les égalités (64.4) impliquent que les normales à l'onde incidente et à l'onde réfractée sont contenues dans le plan d'incidence. En notant φ l'angle d'incidence et ψ l'angle de réfraction, on a

$$k_{1x}=k_1 \sin\varphi=\frac{\omega}{v_1}\sin\varphi,\quad k_{2x}=k_2\sin\psi=\frac{\omega}{v_2}\sin\psi,$$

et en vertu de (64.4)

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}=\frac{v_1}{v_2}=\frac{n_2}{n_1}=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}. \qquad (64.10)$$

Deuxième cas. $k_2^2<k_{1x}^2$ ou $\omega^2/v_2^2<\omega^2\sin^2\varphi/v_1^2$, d'où $\sin\varphi>v_1/v_2=n$. n est l'indice de réfraction relatif du second milieu par rapport au premier. Comme $\sin\varphi<1$, ce deuxième cas n'est réalisable que si $n<1$. La composante k_{2z} est purement imaginaire et s'il existe une onde se propageant dans le second milieu, cette onde est évanescente. Le signe devant le radical de (64.9) doit vérifier la condition que l'amplitude de l'onde s'amortisse lorsqu'on s'éloigne de la surface de séparation. Cette condition ne peut s'exprimer que par la relation

$$k_{2z}=-i\sqrt{k_{1x}^2-k_2^2}=-\frac{i}{2h}, \qquad (64.11)$$

puisque dans ce cas (64.3) prend la forme

$$E^{(d)}=De^{-z/2h}e^{i(\omega t-k_{1x}x)}, \qquad (64.12)$$

ce qui signifie que l'onde se propageant dans le second milieu s'amortit suivant l'axe Z; si on avait pris le signe plus devant le radical (64.11), on n'aurait pas obtenu ce résultat.

Les plans de même phase de l'onde (64.12) sont perpendiculaires à l'axe X et se propagent le long de cet axe avec la vitesse de phase $v_x=\omega/k_{1x}$. Les plans des mêmes amplitudes sont parallèles à la surface de séparation. Lorsqu'on pénètre dans le milieu à une profondeur h, l'intensité de l'onde (qui est proportionnelle au carré de l'amplitude) diminue de e fois. La quantité h est appelée *profondeur*

de pénétration de l'onde dans le second milieu ; elle est donnée par l'expression

$$h = \frac{1}{\sqrt{k_{1x}^2 - k_2^2}} = \frac{\lambda_1}{4\pi\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}, \qquad (64.13)$$

où λ_1 est la longueur d'onde dans le premier milieu. L'équation (64.12) montre qu'à grande distance de la surface de séparation (grande par rapport à la profondeur de pénétration de l'onde) l'onde s'amortit presque totalement dans le second milieu. Or comme il n'y a pas d'absorption, l'énergie de l'onde incidente qui a pénétré dans le second milieu doit revenir en totalité dans le premier milieu. Autrement dit, pour $\sin\varphi > n$ la lumière doit subir une réflexion *totale*. L'angle φ_0 défini par la relation $\sin\varphi_0 = n$ est l'*angle limite de la réflexion totale*.

3. Dans le cas d'une réflexion ordinaire

$$\begin{aligned} \sin\varphi &= k_{1x}/k_1, \quad \cos\varphi = k_{1z}/k_1, \\ \sin\psi &= k_{2x}/k_2, \quad \cos\psi = k_{2z}/k_2. \end{aligned} \qquad (64.14)$$

Dans le cas de la réflexion totale, il n'existe pas d'angle ψ réel vérifiant les relations (64.14), car on obtient pour $\sin\psi$ des valeurs supérieures à l'unité et pour $\cos\psi$ des valeurs imaginaires. Afin de disposer d'une seule forme de description de la réflexion ordinaire et de la réflexion totale, on continuera à utiliser les formules (64.14) pour définir $\sin\psi$ et $\cos\psi$. Comme ces quantités satisfont à la relation $\sin^2\psi + \cos^2\psi = 1$, elles peuvent être considérées comme le sinus et le cosinus de l'argument complexe ψ, conformément à la théorie des fonctions d'une variable complexe :

$$\sin\psi = \frac{e^{i\psi} - e^{-i\psi}}{2i}, \quad \cos\psi = \frac{e^{i\psi} + e^{-i\psi}}{2}.$$

Si on connaît $\sin\psi$ et $\cos\psi$, ces formules permettent de déterminer ψ, à un multiple entier de 2π près. Cette imprécision ne peut affecter le caractère univoque des résultats physiques, puisque les formules correspondantes ne contiennent que le sinus et le cosinus de l'angle ψ et non l'angle complexe ψ lui-même. Aux fonctions $\sin\psi$ et $\cos\psi$ ainsi définies, on peut appliquer toutes les relations formelles de la trigonométrie. On peut donc soumettre les quantités complexes $\sin\psi$ et $\cos\psi$ à toutes les transformations, comme si c'étaient un sinus et un cosinus ordinaires.

Notons encore qu'à la place de (64.14) on peut écrire

$$\sin\psi = \sin\varphi/n, \quad \cos\psi = -\frac{i}{n}\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}. \qquad (64.15)$$

§ 65. Les formules de Fresnel

1. Nous n'avons pas utilisé la forme explicite des conditions aux limites pour établir les lois géométriques de la réflexion et de la réfraction. Pour déterminer les amplitudes des ondes réfléchie et transmise il faut utiliser les conditions aux limites sous *forme explicite.*

Décomposons le champ électrique de chacune des ondes en deux composantes, l'une contenue dans le plan d'incidence, l'autre perpendiculaire à ce plan. On les appelle souvent *composantes principales* des ondes considérées. On les dénote par les indices $\|$ et $\perp$. Soient e_x, e_y, e_z les vecteurs unitaires le long des axes de coordonnées et e_1, e_1' et e_2 les vecteurs unitaires contenus dans le plan d'incidence et respectivement perpendiculaires aux rayons incident, réfléchi et réfracté (fig. 238). On a alors

$$e_1 = \frac{[e_y k_1]}{k_1}, \quad e_1' = \frac{[e_y k_1']}{k_1}, \quad e_2 = \frac{[e_y k_2]}{k_2}. \tag{65.1}$$

Si la réflexion est totale, e_2 est un vecteur complexe et sa signification géométrique de vecteur unitaire, perpendiculaire au rayon réfracté, n'est pas valable. Ainsi, pour embrasser simultanément la réflexion ordinaire et la réflexion totale, nous poursuivrons les calculs par le procédé algébrique sans nous référer à aucun dessin. Introduisons les développements

$$\begin{aligned} \vec{\mathscr{E}} &= \mathscr{E}_\perp e_y + \mathscr{E}_\| e_1, \\ R &= R_\perp e_y + R_\| e_1', \\ D &= D_\perp e_y + D_\| e_2, \end{aligned} \tag{65.2}$$

et calculons les amplitudes $R_\perp$, $R_\|$, $D_\perp$, $D_\|$. Par multiplication scalaire de la première équation (65.2) par e_x, on obtient

$$\mathscr{E}_x = \mathscr{E}_\| (e_1 e_x) = \frac{\mathscr{E}_\|}{k_1} (e_x [e_y k_1]) =$$
$$= \frac{\mathscr{E}_\|}{k_1} ([e_x e_y] k_1) = \frac{\mathscr{E}_\|}{k_1} (e_z k_1) = \mathscr{E}_\| \cos \varphi.$$

On trouve de la même façon $\mathscr{E}_y = \mathscr{E}_\perp$, $\mathscr{E}_z = -\mathscr{E}_\| \sin \varphi$. Ainsi les composantes x, y, z du champ électrique sur la surface de séparation des milieux (i.e. pour $z = 0$) sont:

$$E_x^{(e)} = \cos \varphi \cdot \mathscr{E}_\|, \quad E_y^{(e)} = \mathscr{E}_\perp, \quad E_z^{(e)} = -\sin \varphi \cdot \mathscr{E}_\|. \tag{65.3}$$

Nous avons omis partout les facteurs de phase, car en tout point de la surface de séparation ils sont les mêmes pour l'onde incidente, l'onde réfléchie et l'onde transmise. Nous négligerons les propriétés magnétiques du milieu en posant $H \equiv B$. Nous calculons le champ

magnétique par la formule (5.6), ce qui donne

$$H_x^{(e)} = -n_1 \cos\varphi\cdot\mathscr{E}_\perp,\quad H_y^{(e)} = n_1\mathscr{E}_{\parallel},\quad H_z^{(e)} = n_1 \sin\varphi\cdot\mathscr{E}_\perp. \tag{65.3a}$$

Pour l'onde réfléchie:

$$\begin{gathered} E_x^{(r)} = -\cos\varphi\cdot R_{\parallel},\quad E_y^{(r)} = R_\perp,\quad E_z^{(r)} = -\sin\varphi\cdot R_{\parallel},\\ H_x^{(r)} = n_1\cos\varphi\cdot R_\perp,\quad H_y^{(r)} = n_1 R_{\parallel},\quad H_z^{(r)} = n_1 \sin\varphi\cdot R_\perp. \end{gathered} \tag{65.4}$$

Pour l'onde transmise:

$$\begin{gathered} E_x^{(d)} = \cos\psi\cdot D_{\parallel},\quad E_y^{(d)} = D_\perp,\quad E_z^{(d)} = -\sin\psi\cdot D_{\parallel},\\ H_x^{(d)} = -n_2\cos\psi\cdot D_\perp,\quad H_y^{(d)} = n_2 D_{\parallel},\quad H_z^{(d)} = D_{\parallel} n_2 \sin\psi. \end{gathered} \tag{65.5}$$

Pour déterminer les quatre inconnues $R_\perp$, $R_{\parallel}$, $D_\perp$, $D_{\parallel}$, nous disposons de quatre conditions aux limites indépendantes, fournies par l'électrodynamique:

$$\begin{gathered} E_x^{(e)} + E_x^{(r)} = E_x^{(d)},\qquad E_y^{(e)} + E_y^{(r)} = E_y^{(d)},\\ H_x^{(e)} + H_x^{(r)} = H_x^{(d)},\qquad H_y^{(e)} + H_y^{(r)} = H_y^{(d)}. \end{gathered} \tag{65.6}$$

En portant dans ces équations les expressions que nous venons d'obtenir, il vient

$$\begin{gathered} \cos\varphi\,(\mathscr{E}_{\parallel} - R_{\parallel}) = \cos\varphi\cdot D_{\parallel},\quad \mathscr{E}_\perp + R_\perp = D_\perp,\\ n_1\cos\varphi\,(\mathscr{E}_\perp - R_\perp) = n_2\cos\psi\cdot D_\perp,\ n_1(\mathscr{E}_{\parallel} + R_{\parallel}) = n_2 D_{\parallel}. \end{gathered}$$

On en tire

$$\begin{aligned} r_\perp &\equiv \frac{R_\perp}{\mathscr{E}_\perp} = \frac{n_1\cos\varphi - n_2\cos\psi}{n_1\cos\varphi + n_2\cos\psi},\quad d_\perp \equiv \frac{D_\perp}{\mathscr{E}_\perp} = \frac{2n_1\cos\varphi}{n_1\cos\varphi + n_2\cos\psi},\\ r_{\parallel} &\equiv \frac{R_{\parallel}}{\mathscr{E}_{\parallel}} = \frac{n_2\cos\varphi - n_1\cos\psi}{n_2\cos\varphi + n_1\cos\psi},\quad d_{\parallel} \equiv \frac{D_{\parallel}}{\mathscr{E}_{\parallel}} = \frac{2n_1\cos\varphi}{n_2\cos\varphi + n_1\cos\psi}. \end{aligned} \tag{65.7}$$

On appelle *coefficients de Fresnel* les rapports $R_\perp/\mathscr{E}_\perp$, $D_\perp/\mathscr{E}_\perp$, . . . En utilisant les relations (64.10) on met les formules (65.7) sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} \frac{R_\perp}{\mathscr{E}_\perp} &= -\frac{\sin(\varphi-\psi)}{\sin(\varphi+\psi)},\quad & \frac{D_\perp}{\mathscr{E}_\perp} &= \frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{\sin(\varphi+\psi)},\\ \frac{R_{\parallel}}{\mathscr{E}_{\parallel}} &= \frac{\operatorname{tg}(\varphi-\psi)}{\operatorname{tg}(\varphi+\psi)},\quad & \frac{D_{\parallel}}{\mathscr{E}_{\parallel}} &= \frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{\sin(\varphi+\psi)\cos(\varphi-\psi)}. \end{aligned} \tag{65.8}$$

Ces formules qui constituent la solution du problème posé ont été établies, en 1821, par Fresnel, sur la base de la théorie mécanique de l'éther élastique, à l'aide de raisonnements simples mais peu rigoureux et empreints de contradictions. Les tentatives faites ultérieurement pour trouver une solution rigoureuse du problème à l'aide des équations de l'élasticité ne firent qu'embrouiller la question; dans le cas d'ondes polarisées dans le plan d'incidence, on

obtenait des formules incompatibles avec l'expérience. Il fallut attendre la théorie électromagnétique de la lumière pour que le problème soit résolu de façon rigoureuse.

2. Dans le cas d'une réflexion ordinaire, l'angle ψ et tous les coefficients de Fresnel sont *réels*. Il s'ensuit que la réflexion et la réfraction *ne donnent lieu à aucune variation de phase*, exception faite de la variation de 180° de la phase de l'onde réfléchie. *Si l'onde incidente est polarisée rectilignement, les ondes réfléchie et réfractée le sont également.*

Pour une incidence normale, les formules (65.7) donnent

$$\frac{R_\perp}{\mathscr{E}_\perp} = -\frac{R_\parallel}{\mathscr{E}_\parallel} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}. \qquad (65.9)$$

Dans ce cas, rien ne distingue les ondes polarisées dans le plan d'incidence et dans un plan qui lui est perpendiculaire. La différence des signes des coefficients de Fresnel $R_\perp/\mathscr{E}_\perp$ et $R_\parallel/\mathscr{E}_\parallel$ tient au choix arbitraire des sens positifs des vecteurs e_1 et e_1'; dans le cas limite de l'incidence normale, ces vecteurs sont orientés dans des sens opposés (fig. 238). Lorsque $n_1 < n_2$, $R_\perp/\mathscr{E}_\perp < 0$; lorsque $n_1 > n_2$, $R_\perp/\mathscr{E}_\perp > 0$. *Dans le premier cas, la réflexion de la lumière s'accompagne d'une variation de phase de* 180°. *Dans le second cas, la réflexion ne s'accompagne d'aucun changement de phase.*

Dans le cas d'une incidence rasante, l'angle φ est proche de 90°, et par suite

$$\frac{R_\perp}{\mathscr{E}_\perp} = \frac{R_\parallel}{\mathscr{E}_\parallel} \to -1,$$

ce qui signifie que la réflexion est pratiquement totale. C'est ce qui détermine la formation des très belles images des bords des rivières que l'on voit dans leurs eaux calmes. Ce résultat explique aussi pourquoi la brillance de l'image du Soleil couchant est presque égale à celle du Soleil.

D'après les formules (65.7) et (65.8), le rapport $R_\perp/\mathscr{E}_\perp$ ne s'annule jamais, à l'exception du cas trivial où $n_1 = n_2$. Si, par contre, $\varphi + \psi = \pi/2$, le dénominateur tg $(\varphi + \psi)$ devient infini et $R_\parallel = 0$; il n'y a donc pas de réflexion. Ainsi, si le vecteur électrique de l'onde incidente est contenu dans le plan d'incidence, pour un certain angle d'incidence la réflexion de la lumière disparaît. C'est la *loi de Brewster* (1781-1868) établie expérimentalement en 1815. L'angle φ_B pour lequel cela se produit est l'*angle de Brewster* (ou *incidence brewstérienne*). Pour calculer cet angle, remarquons d'abord que lorsque $\varphi + \psi = \pi/2$, les directions des rayons transmis et réfléchi sont rectangulaires (fig. 239). Par conséquent, $\cos\varphi_B = \sin\psi_B = \frac{1}{n}\sin\varphi_B$, et par suite

$$\operatorname{tg}\varphi_B = n. \qquad (65.10)$$

Lorsqu'une lumière non polarisée tombe sous incidence brewstérienne, la composante de vecteur électrique $E_{\parallel}$ *ne sera pas réfléchie. La lumière réfléchie est polarisée rectilignement suivant une direction normale au plan d'incidence* *). La réflexion sous incidence brewstérienne est le procédé le plus simple d'obtention d'une lumière polarisée. Le principal inconvénient de ce procédé est la faible intensité de la lumière réfléchie. Pour obvier à cet inconvénient, on utilise plusieurs glaces empilées les unes sur les autres (pile de Stolétov). Avec un nombre suffisant de glaces, on arrive à réfléchir près de la moitié de la lumière incidente. Si la lumière tombe sous incidence brewstérienne, la lumière réfléchie est complètement polarisée normalement au plan d'incidence. La lumière transmise est polarisée dans le plan d'incidence, quoique incomplètement. Actuellement on n'utilise presque plus les piles de glaces pour produire la lumière polarisée, car il existe maintenant des procédés de polarisation plus commodes et plus efficaces (*prismes polarisants*, *polaroïds*).

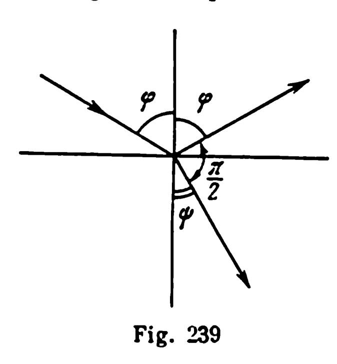


Fig. 239

3. Le rapport de l'énergie réfléchie à l'énergie incidente est appelé *coefficient de réflexion*. Comme l'énergie est proportionnelle au carré de l'amplitude, les formules (65.7) donnent, pour les coefficients de réflexion des principales composantes de l'onde incidente, les expressions suivantes:

$$\rho_{\perp}=\left(\frac{\cos\varphi-n\cos\psi}{\cos\varphi+n\cos\psi}\right)^2,\qquad \rho_{\parallel}=\left(\frac{n\cos\varphi-\cos\psi}{n\cos\varphi+\cos\psi}\right)^2. \quad (65.11)$$

Le coefficient de réflexion R, correspondant à une incidence normale, est appelé *pouvoir réflecteur*:

$$R=\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2. \quad (65.12)$$

Pour le verre ($n = 1,5$) $R = 0,04 = 4$ % ; pour l'eau ($n = 1,33$) $R = 2$ %. Pour la réflexion sur l'eau d'ondes électromagnétiques longues ($n = \sqrt{\varepsilon} = 9$) $R = 64$ %. Ces chiffres témoignent de ce que ni l'eau ni le verre ne peuvent servir de glace dans le cas d'une incidence normale. Dans les miroirs usuels, la lumière est réfléchie par des surfaces métalliques, le verre n'ayant pour fonction que de protéger leurs surfaces postérieures argentées. Mais comme la face antérieure du verre est faiblement réfléchissante, les miroirs à verres

*) Malus, qui découvrit que la lumière réfléchie était polarisée, appela plan de polarisation de la lumière réfléchie le plan d'incidence. Ici nous entendons par *plan de polarisation* un plan orthogonal au plan de polarisation de Malus.

argentés sur leurs faces postérieures ne peuvent être utilisés en optique. Pour ces applications on doit recouvrir d'une couche métallique (en rhodium de préférence) la face antérieure du verre.

Le rapport b de l'énergie transmise à l'énergie incidente est appelé *coefficient de transmission*. On peut le définir comme le rapport des composantes normales du vecteur de Poynting des ondes transmise et incidente, moyenné dans le temps. A l'aide des formules (65.3) et (65.3a) on trouve pour l'onde incidente

$$S_z^{(e)} = \frac{c}{16\pi}\left[E_x^{(e)}H_y^{*(e)} - E_y^{(e)}H_x^{*(e)}\right] + \text{conj. compl.} = \frac{cn_1}{8\pi}\cos\varphi\left(|\mathscr{E}_\perp|^2 + |\mathscr{E}_\parallel|^2\right),$$

et pour l'onde transmise

$$S_z^{(d)} = \frac{cn_2}{8\pi}\cos\psi\left(|D_\perp|^2 + |D_\parallel|^2\right).$$

Si le vecteur E est a) perpendiculaire, b) parallèle au plan d'incidence on trouve

$$b_\perp = \frac{n\cos\psi}{\cos\varphi}\left(\frac{2\cos\varphi}{\cos\varphi + n\cos\psi}\right)^2, \quad b_\parallel = \frac{n\cos\psi}{\cos\varphi}\left(\frac{2\cos\varphi}{n\cos\varphi + \cos\psi}\right)^2. \tag{65.13}$$

Il est facile de s'assurer que $\rho_\perp + b_\perp = \rho_\parallel + b_\parallel = 1$, conformément à la loi de la conservation de l'énergie.

Pour l'incidence normale, le coefficient de transmission

$$B = \frac{4n}{(n+1)^2} \tag{65.14}$$

est appelé *transparence superficielle*. Les mesures de cette grandeur et du pouvoir réflecteur constituent un procédé commode de détermination des indices de réfraction dans l'infrarouge.

Calculons le coefficient de réflexion dans le cas où le plan de polarisation de l'onde incidente fait un angle α avec le plan d'incidence. Cet angle est appelé *azimut de polarisation* de l'onde incidente. Il est évident que $\mathscr{E}_\parallel = A\cos\alpha$, $\mathscr{E}_\perp = A\sin\alpha$, où A est l'amplitude de l'onde incidente. L'énergie réfléchie totale est proportionnelle à $\rho_\parallel\mathscr{E}_\parallel^2 + \rho_\perp\mathscr{E}_\perp^2 = A^2(\rho_\parallel\cos^2\alpha + \rho_\perp\sin^2\alpha)$. Le coefficient de réflexion est donc égal à

$$\rho_\alpha = \rho_\parallel\cos^2\alpha + \rho_\perp\sin^2\alpha. \tag{65.15}$$

Le coefficient de réflexion ρ de la lumière non polarisée s'obtient en faisant la moyenne sur α. Comme dans une lumière non polarisée toutes les directions du vecteur électrique (et celles du vecteur magnétique) apparaissent avec les mêmes probabilités, $\overline{\cos^2\alpha} = \overline{\sin^2\alpha} = 1/2$. Par suite

$$\rho = \frac{1}{2}(\rho_\parallel + \rho_\perp). \tag{65.16}$$

La figure 240 représente les courbes théoriques du coefficient de réflexion de la lumière visible sur le verre ($n = 1{,}5$) et la figure 241 les mêmes caractéristiques pour des ondes radio réfléchies par la surface de l'eau ($n = \sqrt{\varepsilon_0} = 9$).

Un grand nombre de mesures du coefficient de réflexion, sous différents angles d'incidence et pour différentes polarisations de l'onde incidente, ont montré un excellent accord avec les formules de Fresnel, qu'il s'agisse de la lumière visible ou d'ondes radio.

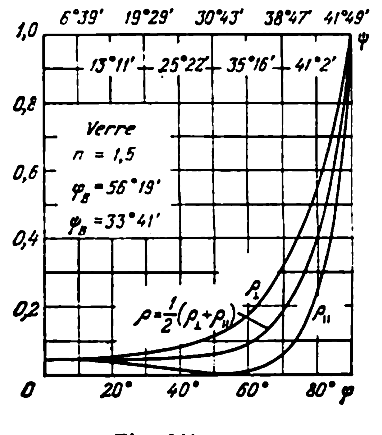


Fig. 240

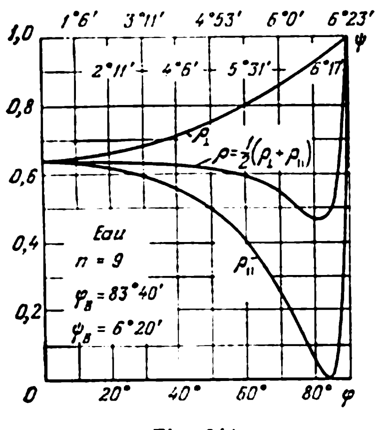


Fig. 241

La réflexion sous incidence brewstérienne fait exception, tandis qu'au voisinage de celle-ci on constate de très petites déviations aux formules de Fresnel (cf. § 70).

4. Les formules de Fresnel ont été établies ci-dessus pour le cas d'une lumière *monochromatique*. Si la réflexion est ordinaire, la longueur d'onde ne figure pas dans ces formules et la réflexion ne s'accompagne d'aucune variation de phase de l'onde. De ce fait, dans le cas de milieux non dispersifs et de la réflexion ordinaire, les formules de Fresnel restent valables pour la *lumière non monochromatique*. On doit entendre par $\mathscr{E}_\perp$, $R_\perp$, $D_\perp$, etc., les composantes correspondantes des intensités du champ électrique des ondes incidente, réfléchie et transmise, déterminées sur la *surface de séparation des milieux*. Ce résultat découle directement du théorème de Fourier et du principe de superposition.

§ 66. Réflexion totale

1. Dans le cas de la réflexion totale, $\cos\psi$ est une quantité purement imaginaire, et il est commode d'écrire les formules de

Fresnel sous la forme:

$$\frac{R_\perp}{\mathscr{E}_\perp}=\frac{\cos\varphi+i\sqrt{\sin^2\varphi-n^2}}{\cos\varphi-i\sqrt{\sin^2\varphi-n^2}},\quad \frac{D_\perp}{\mathscr{E}_\perp}=\frac{2\cos\varphi}{\cos\varphi-i\sqrt{\sin^2\varphi-n^2}},$$
$$\frac{R_\parallel}{\mathscr{E}_\parallel}=\frac{n^2\cos\varphi+i\sqrt{\sin^2\varphi-n^2}}{n^2\cos\varphi-i\sqrt{\sin^2\varphi-n^2}},\quad \frac{D_\parallel}{\mathscr{E}_\parallel}=\frac{2n\cos\varphi}{n^2\cos\varphi-i\sqrt{\sin^2\varphi-n^2}}. \tag{66.1}$$

Il apparaît que $|R_\perp|=|\mathscr{E}_\perp|$ et $|R_\parallel|=|\mathscr{E}_\parallel|$, ce qui signifie que la réflexion est effectivement « totale ». Or l'onde évanescente subsiste dans le second milieu. Si, par exemple, $\varphi=\varphi_0=\arcsin n$, on a $D_\perp=2\mathscr{E}_\perp$, ce qui n'implique cependant pas que la loi de la conservation de l'énergie soit en défaut, puisque les formules de Fresnel concernent les *champs monochromatiques*, i.e. un *processus permanent*. Dans ce cas la loi de la conservation de l'énergie impose seulement que la quantité d'énergie contenue dans le second milieu varie *périodiquement* au cours du temps. Cela signifie que *la variation d'énergie moyenne sur la période est nulle dans le second milieu*. Le calcul suivant montre qu'il en est bien ainsi.

Calculons la moyenne dans le temps de la composante normale du vecteur de Poynting dans le second milieu. Si le vecteur électrique est contenu dans le plan d'incidence

$$\overline{S}_z=\frac{c}{16\pi}E_x^*H_y+\text{conj. complexe.}$$

Le champ dans le second milieu est donné par les formules (65.5). Comme $\cos\psi$ est une quantité purement imaginaire, il résulte de ces formules qu'il existe un déphasage de 90° entre les champs électrique et magnétique. Comme la quantité $E_x^*H_y$ est également un imaginaire pur, $\overline{S}_z=0$. On arrive à un résultat analogue lorsque le vecteur électrique est perpendiculaire au plan d'incidence. Ainsi notre proposition se trouve démontrée.

Le calcul des autres composantes du vecteur de Poynting moyenné donne

$$\overline{S}_x=\frac{cn_1}{8\pi}(|D_\perp|^2+|D_\parallel|^2)\sin\varphi e^{-z/h},\quad \overline{S}_y=0, \tag{66.2}$$

où h est la profondeur de pénétration définie par (64.13). Ainsi le deuxième milieu contient de l'énergie dont la quantité moyenne ne varie pas avec le temps et dont le flux moyen est parallèle à l'axe X. En régime permanent, l'existence de cette énergie n'infirme évidemment pas le fait que l'onde incidente subit une réflexion totale.

Pour expliquer l'apparition de l'énergie dans le second milieu, on devrait étudier le *processus d'établissement des vibrations*. On pourrait considérer, par exemple, une onde quasi monochromatique devant le front de laquelle il n'existerait aucune perturbation. Tant que le front d'onde n'aura pas atteint la surface de séparation des milieux, aucun champ n'existe dans le second milieu. Lorsque

l'onde atteint la surface de séparation, elle pénétrera d'abord presque en entier dans le second milieu et ne sera réfléchie que partiellement. A mesure de l'établissement des vibrations, le coefficient de réflexion augmentera rapidement et tendra vers sa limite supérieure — l'unité. La réflexion totale ne se manifeste qu'en régime établi et tant qu'il ne l'est pas, la réflexion ne peut être que *partielle.*

2. Soient deux milieux identiques séparés par une mince lame d'air; si on fait tomber une onde sur cette lame d'air, sous un angle supérieur à l'angle limite, on peut s'attendre à ce qu'elle y pénètre sous forme d'une onde évanescente (cf. § 67). Si l'épaisseur de la lame d'air est suffisamment petite, l'onde évanescente atteindra la seconde face de la lame d'air sans avoir été notablement atténuée. Passant de la lame d'air dans le milieu contigu, cette onde redevient homogène et peut être décelée par les procédés usuels. Newton réalisa une telle expérience pour démontrer la pénétration de la lumière dans un milieu moins dense lors de la réflexion totale. (En toute rigueur, il n'y a pas de réflexion totale proprement dite, car elle est perturbée par le second milieu.) Newton utilisa deux prismes à réflexion totale dont l'un a sa face hypoténuse légèrement convexe (fig. 242). L'expérience montre que la lumière pénètre dans le second prisme non seulement au point de contact optique, mais aussi tout autour de ce point dans une région circulaire où l'épaisseur de la couche d'air est comparable à la longueur d'onde. En lumière blanche on discerne à la périphérie de cette région circulaire une coloration rougeâtre par transmission. Ce résultat est normal, puisque la profondeur de pénétration est proportionnelle à la longueur d'onde; elle est donc plus grande pour la radiation rouge que pour la bleue.

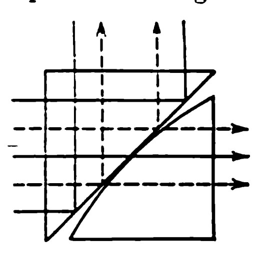


Fig. 242

En faisant varier l'épaisseur de la pellicule d'air, on fait varier l'intensité de la lumière transmise. C'est ce principe qui est utilisé dans le *téléphone optique* breveté par la firme Zeiss. Le rôle de l'un des milieux est assumé par une membrane transparente qui vibre en cadence avec les ondes sonores qui tombent dessus. Ayant traversé la pellicule d'air, la lumière modifie son intensité conformément aux variations de l'intensité des sons et excite un courant alternatif dans un récepteur photoélectrique; l'intensité de ce courant varie, elle aussi, conformément à l'intensité du son. Ce courant est amplifié, puis utilisé selon les besoins.

Les phénomènes de passage des ondes à travers des interstices étroits ne sont pas caractéristiques de l'optique seulement. Ils se manifestent, quelle que soit la nature des ondes, à condition que la vitesse de phase dans l'interstice soit plus grande que dans les milieux contigus. Ces phénomènes sont le plus facilement réalisables avec les

ondes longues (radio, acoustique). Ils ont acquis une grande importance en physique atomique et nucléaire et en théorie du solide, et nous en reparlerons dans le tome V.

3. Dans le cas d'une réflexion ordinaire, les deux rapports $R_\perp/\mathscr{E}_\perp$ et $R_\parallel/\mathscr{E}_\parallel$ sont toujours réels. Dans le cas d'une réflexion totale ces rapports sont des quantités *complexes*, ce qui signifie que *la phase de l'onde varie par saut*, d'une quantité généralement autre que zéro ou π. Si l'onde est polarisée perpendiculairement au plan d'incidence, on peut écrire

$$\cos\varphi + i\sqrt{\sin^2\varphi - n^2} = Ae^{i\delta_\perp/2},$$

où A et $\delta_\perp$ sont des grandeurs réelles. On a alors

$$\cos\varphi - i\sqrt{\sin^2\varphi - n^2} = Ae^{-i\delta_\perp/2}, \quad \frac{R_\perp}{\mathscr{E}_\perp} = e^{i\delta_\perp},$$

où $\delta_\perp$ est donc le saut de la phase qui accompagne la réflexion totale. En égalant les parties réelles et imaginaires, on trouve

$$A\cos\frac{\delta_\perp}{2} = \cos\varphi, \qquad A\sin\frac{\delta_\perp}{2} = \sqrt{\sin^2\varphi - n^2},$$

d'où

$$\operatorname{tg}\frac{\delta_\perp}{2} = \frac{\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}{\cos\varphi}. \tag{66.3}$$

Pour une onde polarisée dans le plan d'incidence, on trouve de même

$$\operatorname{tg}\frac{\delta_\parallel}{2} = \frac{\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}{n^2\cos\varphi}. \tag{66.4}$$

Les sauts de phase $\delta_\perp$ et $\delta_\parallel$ ne sont pas égaux. Si l'onde incidente est polarisée rectilignement, il apparaîtra dans l'onde réfléchie une différence de phase déterminée entre $\boldsymbol{E}_\parallel$ et $\boldsymbol{E}_\perp$. De ce fait *l'onde réfléchie sera polarisée elliptiquement dans le cas général.* Supposons que dans l'onde incidente il n'y a aucune différence de phase entre $\boldsymbol{E}_\parallel$ et $\boldsymbol{E}_\perp$; dans l'onde réfléchie, la différence de phase entre $\boldsymbol{E}_\parallel$ et $\boldsymbol{E}_\perp$ est alors égale à $\delta = \delta_\parallel - \delta_\perp$. A l'aide des formules (66.3) et (66.4), on trouve

$$\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \frac{\cos\varphi\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}{\sin^2\varphi}. \tag{66.5}$$

Ce résultat montre que $\operatorname{tg}(\delta/2) > 0$, i.e. δ est compris entre 0 et π, autrement dit la vibration $\boldsymbol{E}_\parallel$ est en avance de phase sur la vibration $\boldsymbol{E}_\perp$ et la polarisation elliptique de la lumière réfléchie est *gauche*. Dans le cas où la différence de phase entre les vibrations de l'onde incidente est égale à π, l'onde réfléchie sera polarisée elliptiquement *à droite*.

La grandeur δ s'annule lorsque $\varphi = \varphi_0$ et $\varphi = \pi/2$ et doit atteindre sa valeur maximale entre ces limites; lorsque $\cos\varphi =$

$=\sqrt{(1-n^2)/(1+n^2)}$, la différence de phase maximale δ_m est donnée par l'équation

$$\operatorname{tg}\frac{\delta_m}{2}=\frac{1-n^2}{2n}. \tag{66.6}$$

Pour obtenir une polarisation circulaire de la lumière réfléchie, il faut que les conditions suivantes soient satisfaites : 1) $\mathcal{E}_{\parallel} = \pm\mathcal{E}_{\perp}$, 2) $\delta = \pi/2$ (cf. § 62, pt. 4). Pour que $\delta_m = \pi/2$, il faut que l'indice de réfraction vérifie l'équation $1 = (1 - n^2)/2n$. On en déduit $n = \sqrt{2} - 1 = 0{,}414$. L'indice de réfraction du milieu le plus dense optiquement, rapporté au milieu le moins dense, est donc $n' = 1/n = 2{,}41$. Si n' est égal ou supérieur à 2,41, une seule réflexion produit une différence de phase $\delta = 90°$. Si on a aussi $\mathcal{E}_{\perp} = \mathcal{E}_{\parallel}$, la lumière réfléchie sera polarisée *circulairement* à gauche. Dans la région visible du spectre seul le diamant possède un indice de réfraction de la valeur requise ($n' = 2{,}42$) ; pour tous les autres milieux, $n' < 2{,}41$, et on ne peut obtenir en lumière visible une différence de phase égale à 90° à la suite d'une seule réflexion. Mais on peut obtenir un déphasage $\delta = 90°$ avec des ondes radio courtes. Pour l'eau, par exemple, $n' = \sqrt{\varepsilon_0} = 9$, $n = 1/9$; selon (66.6), on doit observer une polarisation circulaire pour $\varphi = 6°29'$ et $\varphi = 44°38'$; c'est ce que confirme l'expérience.

Pour le verre ($n' = 1{,}51$), la différence de phase maximale correspond à $\varphi = 51°20'$ et elle est égale à 45°36'. Lorsque $\varphi = 48°37'$ et $\varphi = 54°37'$, la différence de phase δ est égale à 45°. Si on réfléchit la lumière deux fois de suite sous une incidence égale à l'un de ces angles, on obtient une différence de phase relative égale à 90°. Fresnel mit à profit ce raisonnement pour obtenir une polarisation circulaire à l'aide d'un parallélépipède en verre d'angle $A = 54°37'$ (fig. 243). Le rayon SM tombe normalement sur la face AB, subit deux réflexions totales sur les faces AD et BC et émerge suivant le rayon NQ. Lors de chaque réflexion, la vibration $E_{\parallel}$ est en avance de phase de 45° sur la vibration $E_{\perp}$. Si la lumière incidente est polarisée rectilignement et $\mathcal{E}_{\parallel} = \mathcal{E}_{\perp}$, la lumière émergente aura une polarisation circulaire gauche. Si on fait repasser la lumière émergente à travers le prisme, elle reprendra une polarisation rectiligne, mais son plan de polarisation fera un angle de 90° avec sa position initiale.

4. On peut expliquer le saut de phase des vibrations lors d'une réflexion totale sans avoir recours aux formules de Fresnel. Posons, pour concrétiser, que le vecteur électrique est contenu dans le plan d'incidence. Si l'angle d'incidence est exactement égal à l'angle de réflexion totale φ_0, l'onde sera encore homogène dans le second milieu. Cette onde doit s'y propager parallèlement à la surface de séparation des milieux. Comme les ondes homogènes sont transversales, en vertu des conditions aux limites, le vecteur électrique est

normal à la surface de séparation dans le second milieu et l'est donc dans le premier milieu. Avec le choix du sens positif du champ électrique que nous avons adopté (fig. 244), cela signifie que les phases de l'onde incidente et de l'onde réfléchie coïncident sur la surface de séparation.

Si, par contre, $\varphi = 90°$, la réflexion totale donne lieu à un changement de phase égal à 180°. Dans ce cas l'onde incidente et

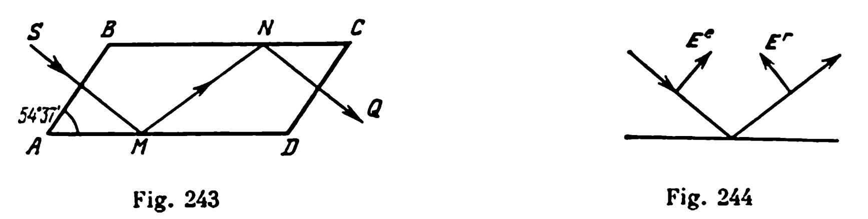


Fig. 243

Fig. 244

l'onde réfléchie se propagent dans la même direction parallèlement à la surface de séparation. Les conditions aux limites sont vérifiées pour $R_{\|} = -\mathcal{E}_{\|}$. L'onde incidente et l'onde réfléchie se détruisent mutuellement, de sorte qu'il n'y aura aucun champ lumineux ni dans le premier milieu, ni dans le second, et les conditions aux limites sont tout naturellement vérifiées, quoique l'égalité $R_{\|} = -\mathcal{E}_{\|}$ implique que la réflexion donne lieu à un saut de phase de 180°.

On remarquera qu'il est illusoire d'invoquer la réflexion de la lumière lorsque l'angle d'incidence est exactement égal à 90°. Aussi les considérations que nous venons de développer ne servent qu'à indiquer la limite vers laquelle tend l'amplitude $R_{\|}$ lorsque l'angle d'incidence tend vers 90°. Si la réflexion est totale, le premier milieu sera le siège d'ondes stationnaires dont les plans nodaux sont parallèles à la surface de séparation. Lorsque l'angle d'incidence tend vers 90°, la distance entre ces plans augmente et tend vers l'infini. A la limite le plan nodal le plus proche se confond avec la surface de séparation et le champ disparaît dans le second milieu (le moins dense optiquement).

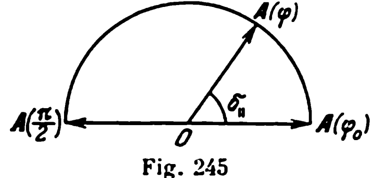


Fig. 245

Aussi, à la réflexion, la variation de phase est nulle pour $\varphi = \varphi_0$ et elle est égale à 180° pour $\varphi = 90°$. Pour toutes les valeurs de l'angle φ comprises entre φ_0 et 90°, la réflexion doit être totale (§ 64). Représentons la vibration du champ électrique de l'onde réfléchie sur un diagramme vectoriel. Pour $\varphi = \varphi_0$, l'amplitude sera représentée par le vecteur $A(\varphi_0)$ (fig. 245) et la vibration elle-même par la projection de ce vecteur sur l'axe X (en faisant tourner le vecteur $A(\varphi_0)$ d'un mouvement uniforme autour de O avec la

vitesse angulaire ω). Pour $\varphi = \pi/2$ l'amplitude sera représentée par un vecteur A $(\pi/2)$ égal et opposé au vecteur A (φ_0). Pour une valeur intermédiaire de l'angle d'incidence φ nous noterons A (φ) l'amplitude représentant la vibration. Lorsque φ augmente de φ_0 jusqu'à $\pi/2$, la longueur du vecteur A (φ) doit rester constante, puisque la réflexion est totale. D'autre part, le vecteur A (φ) doit varier de façon continue pour passer de la position initiale A (φ_0) à la position finale A $(\pi/2)$. On ne peut y arriver qu'*en le faisant tourner autour du point O*. Cela signifie que lorsque l'angle d'incidence φ est compris entre φ_0 et 90°, le vecteur A (φ) doit être incliné sur l'axe X. L'angle d'inclinaison δ est justement l'avance de phase accompagnant la réflexion.

5. Une remarque s'impose au sujet du passage de la réflexion partielle à la réflexion totale. Dans le domaine de la réflexion partielle les coefficients de réflexion $\rho_\perp$ et $\rho_\parallel$ varient de façon continue et tendent vers l'unité lorsque $\varphi \to \varphi_0$. Lorsque $\varphi = \varphi_0$, ces coefficients ne subissent aucune discontinuité, mais leurs dérivées par rapport à φ y présentent une discontinuité. Calculons les dérivées des coefficients de Fresnel $r_\perp = R_\perp/\mathscr{E}_\perp$ et $r_\parallel = R_\parallel/\mathscr{E}_\parallel$ par rapport à φ, à proximité de l'angle φ_0, en supposant que $\varphi < \varphi_0$. Un calcul simple donne

$$\frac{dr_\perp}{d\varphi} = \frac{2}{\cos\psi}, \qquad \frac{dr_\parallel}{d\varphi} = \frac{2}{n^2\cos\psi}. \tag{66.7}$$

Lorsque $\varphi = \varphi_0$, $\cos\psi = 0$ et les deux dérivées deviennent infinies. $d\rho_\perp/d\varphi$ et $d\rho_\parallel/d\varphi$ deviennent également infinis ($\rho_\perp = r_\perp^2$, $\rho_\parallel = r_\parallel^2$). De ce fait, à proximité de l'angle limite φ_0, les coefficients de réflexion partielle $\rho_\perp$ et $\rho_\parallel$ doivent varier fortement en fonction de l'angle d'incidence. C'est la cause de l'existence d'une *frontière nette* entre les domaines de réflexion partielle et de réflexion totale, que l'on observe parfois dans les réfractomètres fondés sur la réflexion totale de la lumière.

§ 67. Transmission de la lumière à travers une lame à faces parallèles. Clarification des verres d'optique

1. Déposons sur la surface du corps réfléchissant une pellicule d'épaisseur l et d'indice de réfraction n (fig. 246). Notons n_1 l'indice de réfraction du premier milieu et n_2 celui du second milieu. Posons que les trois indices n_1, n_2 et n sont constants (milieux homogènes) et que l'onde incidente est polarisée soit dans le plan d'incidence, soit dans un plan rectangulaire. L'onde incidente

$$E^{(e)} = \mathscr{E} e^{i(\omega t - k_1 r)} \tag{67.1}$$

(origine des coordonnées située en O) subit des réflexions multiples sur les surfaces de la pellicule. A la suite des interférences on voit apparaître dans le premier milieu l'onde réfléchie

$$E^{(r)} = Re^{i(\omega t - k_1' r)}. \tag{67.2}$$

Le champ dans la pellicule est constitué par deux ondes planes:

$$E = Ae^{i(\omega t - kr)}, \quad E' = A'e^{i(\omega t - k'r)}. \tag{67.3}$$

Dans le deuxième milieu apparaît l'onde réfractée

$$E^{(d)} = De^{i(\omega t - k_2 r)}. \tag{67.4}$$

Pour que les conditions aux limites soient vérifiées, il faut que les composantes tangentielles de tous les vecteurs d'onde soient égales et c'est ce qui caractérise de façon univoque les directions de

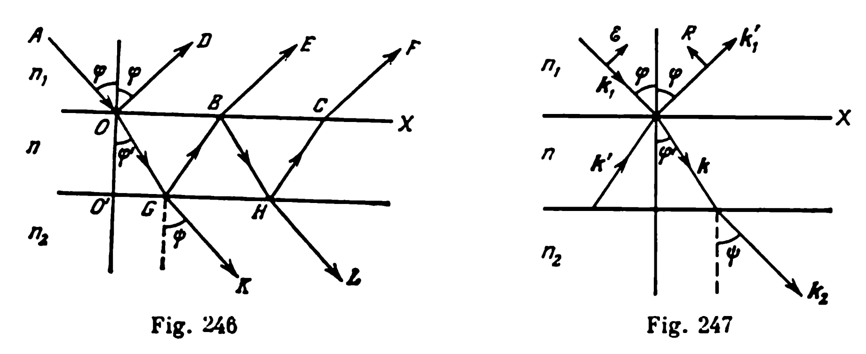


Fig. 246 Fig. 247

propagation de ces ondes (cf. § 64). Pour déterminer les amplitudes R, A, A' et D, la théorie électromagnétique fournit quatre conditions aux limites indépendantes (dont deux concernent la face antérieure de la pellicule et deux sa face postérieure).

Nous préférons cependant résoudre ce problème par un procédé plus simple. Quatre ondes se rencontrent en un point de la face antérieure de la pellicule: deux ondes entrantes et deux ondes émergentes (fig. 247). On peut établir des relations entre les amplitudes complexes de ces ondes, *sans tenir compte de l'existence de la face postérieure de la pellicule*. Tout formellement, on peut alors raisonner *comme s'il n'y avait pas de réflexions multiples*. On considère toutes les ondes entrantes comme des ondes incidentes dont la réflexion et la réfraction (uniques) produisent les ondes émergentes. Une onde incidente d'amplitude $\mathcal{E}$ produit par réflexion sur la face antérieure de la pellicule une onde qui se propage suivant la direction du vecteur k_1'. Une onde d'amplitude A', réfractée par la même face, produit une onde se propageant dans la même direction. L'onde réfléchie d'amplitude R résulte des interférences de ces ondes. Par

conséquent

$$R = r_1\mathcal{E} + d_1'A'. \tag{67.5}$$

On trouve de même

$$A = d_1\mathcal{E} + r_1'A', \tag{67.6}$$

où r_1 et d_1 désignent les coefficients de Fresnel relatifs à la face antérieure de la pellicule, et r_2 et d_2 les coefficients de Fresnel relatifs à la face postérieure (en admettant que la lumière traverse ces faces en allant de haut en bas). Les coefficients de Fresnel correspondant aux rayons allant en sens inverse sont dénotés par les mêmes symboles, mais affectés de primes. La mise en œuvre des formules de Fresnel permet de vérifier que ces coefficients satisfont aux relations

$$r' = -r, \quad r^2 + dd' = 1. \tag{67.7}$$

Les mêmes considérations s'appliquent à la face postérieure de la pellicule, mais on doit transporter pour cela l'origine des coordonnées au point O' situé sur cette face (fig. 246). L'onde (67.1) s'exprime alors par

$$E^{(e)} = \mathcal{E}e^{-ik_{1z}l}e^{i(\omega t - k_1r')},$$

ce qui montre que la quantité $\mathcal{E}' = \mathcal{E}e^{-ik_{1z}l}$ assume ici le rôle d'amplitude complexe. Les amplitudes complexes de toutes les autres ondes se transforment de la même façon. On obtient ainsi

$$A'e^{ik_{1z}l} = r_2Ae^{-ik_zl}, \quad De^{-ik_{2z}l} = d_2Ae^{-ik_zl}. \tag{67.8}$$

A l'aide de ces équations on trouve

$$\begin{aligned} \frac{R}{\mathcal{E}} &= \frac{r_1 + r_2\exp(-2ik_0nl\cos\varphi)}{1 + r_1r_2\exp(-2ik_0nl\cos\varphi')}, \\ \frac{D}{\mathcal{E}} &= \frac{d_1d_2\exp[ik_0l(n_2\cos\psi - n\cos\varphi)]}{1 + r_1r_2\exp(-2ik_0nl\cos\varphi')}, \end{aligned} \tag{67.9}$$

où k_0 est le nombre d'onde dans le vide, φ' et ψ sont les angles de réfraction sur la première et la seconde surface de séparation des milieux. Pour rendre notre démonstration plus évidente, nous nous sommes référés à un schéma concernant les ondes homogènes, mais il est clair que les relations (67.9) s'appliquent aussi bien aux ondes évanescentes apparaissant dans la pellicule ou dans le second milieu.

2. Pour une incidence normale la première formule (67.9) se réduit à

$$\frac{R}{\mathcal{E}} = \frac{r_1 + r_2e^{-2i\ _0nl}}{1 + r_1r_2e^{-2ik_0nl}}. \tag{67.10}$$

Cette expression s'annule lorsque sont vérifiées les deux conditions suivantes:

$$r_1 + r_2\cos(2nk_0l) = 0, \quad \sin(2nk_0l) = 0.$$

On tire de la seconde condition : $2nk_0l = N\pi$ ou

$$l = N\frac{\lambda_0}{4n} = N\frac{\lambda}{4}, \tag{67.11}$$

où N est un nombre entier et λ la longueur d'onde dans la pellicule. La première condition peut s'écrire maintenant sous la forme : $r_1 + (-1)^N r_2 = 0$. Si N est un nombre impair, $r_1 = r_2$, et si N est un nombre pair, $r_1 = -r_2$. Or cette dernière égalité est irréalisable, puisque

$$r_1 = \frac{n-n_1}{n+n_1}, \quad r_2 = \frac{n_2-n}{n_2+n}.$$

Si $r_1 = -r_2$, on en tire $n(n_2 - n_1) = 0$, d'où $n = 0$, chose impossible, ou encore $n_2 = n_1$, ce qui ne présente aucune intérêt. Il s'ensuit que N doit être un nombre impair et donc $r_1 = r_2$. On en déduit

$$n = \sqrt{n_1n_2}. \tag{67.12}$$

Ainsi, si $n = \sqrt{n_1n_2}$ et si l'épaisseur de la pellicule est égale à $N\lambda/4$, où N est un nombre impair, le pouvoir réflecteur devient égal à zéro.

Ce résultat est mis à profit pour accroître la transparence superficielle des verres et constitue la base d'une méthode utilisée dans l'industrie des appareils d'optique. Cette méthode a été appelée *clarification des verres d'optique*. Pour le verre ($n = 1,5$) le pouvoir réflecteur $R = (n-1)^2/(n+1)^2 = 0,04 = 4$ %, valeur peu importante. Or les instruments d'optique sont composés d'un grand nombre de pièces fabriquées avec du verre. La réflexion sur les surfaces de contact de ces pièces est la principale cause d'affaiblissement de la lumière traversant l'appareil optique. Ainsi, dans les jumelles à prismes, les pertes de lumière atteignent 50 %, ces pertes étant déterminées principalement par la réflexion de la lumière. Une partie importante de la lumière réfléchie par suite de réflexions successives tombe dans l'œil de l'observateur, et même si elle est diffusée uniformément, produit un fond clair diminuant le contraste du clair-obscur dans les images observées. Cette lumière diffusée est particulièrement nuisible dans les appareils photographiques. Dans le meilleur des cas cette lumière produit un voile uniforme sur toute l'émulsion photosensible. Pour certaines des positions malencontreuses des sources lumineuses on obtient des reflets et des images supplémentaires.

Pour accroître la transparence superficielle des verres on dépose sur leurs surfaces des pellicules d'indice $n = \sqrt{n_1n_2}$ et d'une épaisseur égale à $\lambda/4$. Il est inutile d'utiliser des pellicules plus épaisses (correspondant à $N = 3, 5, \ldots$), puisque la condition de l'élimination complète des réflexions ne peut être satisfaite exactement que

pour une seule longueur d'onde et un seul angle d'incidence. L'accroissement du coefficient de réflexion accompagnant les variations de la longueur d'onde et de l'angle d'incidence se produit le plus lentement lorsque $N = 1$; on arrive alors à faire disparaître presque complètement la réflexion dans une région assez étendue du spectre et pour tout un intervalle d'angles d'incidence.

On produit les pellicules antiréfléchissantes soit par un procédé chimique de lixiviation des constituants du verre sur sa surface, soit en déposant une pellicule sur la surface du verre par le procédé de pulvérisation. La principale difficulté réside en ce que l'indice de réfraction de la pellicule déposée doit être plus petit que celui du verre. Par exemple, si $n_2 = 1{,}52$, $n_1 = 1$, on doit avoir $n = 1{,}23$. Or on ne connaît pas de substance solide ayant un indice de réfraction aussi petit; on est donc obligé de rendre la pellicule poreuse, avec des pores petits devant la longueur d'onde, afin d'éviter une dispersion notable de la lumière. Comme une pellicule poreuse ne saurait avoir une résistance mécanique satisfaisante, on ne peut surmonter cette difficulté qu'en utilisant des revêtements à deux couches superposées. La pièce en verre est recouverte d'abord d'une pellicule de substance d'indice de réfraction plus grand que celui du verre, puis d'une couche d'indice plus petit.

3. Les conditions d'élimination de la réflexion (67.11) et (67.12) peuvent être établies aussi en se fondant sur les interférences. Si le coefficient de réflexion est petit, on peut négliger les ondes ayant subi des réflexions multiples sur les faces de la pellicule, et ne subsistent alors que deux ondes réfléchies, l'une l'étant par la face antérieure, l'autre par la face postérieure de la pellicule. Pour que ces ondes se détruisent mutuellement, il faut: 1) que leurs phases soient opposées et 2) que leurs intensités soient égales. Dans le cas d'une incidence normale, la première de ces conditions s'exprime par la formule (67.11). Si on néglige l'affaiblissement de l'onde dû à la réflexion sur la face antérieure, la deuxième condition s'exprime par l'égalité $r_1 = r_2$. Nous avons montré plus haut que l'on arrive alors à la formule (67.12). Le défaut de cette démonstration est qu'elle néglige les réflexions multiples.

PROBLÈMES

1. Etablir des formules pour la réflexion et la réfraction des ondes électromagnétiques en posant que la perméabilité magnétique est différente de l'unité.

Réponse.

$$\frac{R_\perp}{\mathcal{E}_\perp} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}\cos\varphi - \sqrt{\varepsilon_2/\mu_2}\cos\psi}{\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}\cos\varphi + \sqrt{\varepsilon_2/\mu_2}\cos\psi}, \qquad \frac{D_\perp}{\mathcal{E}_\perp} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}\cos\varphi}{\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}\cos\varphi + \sqrt{\varepsilon_2/\mu_2}\cos\psi}, \tag{67.13}$$

$$\frac{R_\parallel}{\mathcal{E}_\parallel} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2/\mu_2}\cos\varphi - \sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}\cos\psi}{\sqrt{\varepsilon_2/\mu_2}\cos\varphi + \sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}\cos\psi}, \qquad \frac{D_\parallel}{\mathcal{E}_\parallel} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}\cos\varphi}{\sqrt{\varepsilon_2/\mu_2}\cos\varphi + \sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}\cos\psi}.$$

2. Que deviennent les formules (67.13) lorsque $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$?
Réponse.

$$\frac{R_\perp}{\mathscr{E}_\perp}=\frac{n_2\cos\varphi-n_1\cos\psi}{n_2\cos\varphi+n_1\cos\psi},\quad \frac{D_\perp}{\mathscr{E}_\perp}=\frac{2n_2\cos\varphi}{n_2\cos\varphi+n_1\cos\psi},$$
$$\frac{R_\parallel}{\mathscr{E}_\parallel}=\frac{n_1\cos\varphi-n_2\cos\psi}{n_1\cos\varphi+n_2\cos\psi},\quad \frac{D_\parallel}{\mathscr{E}_\parallel}=\frac{2n_2\cos\varphi}{n_1\cos\varphi+n_2\cos\psi}. \qquad (67.14)$$

Les formules de la réflexion coïncident exactement avec les formules de Fresnel, à condition de permuter les composantes $\perp$ et $\parallel$ (Helmholtz).

3. Démontrer que le pouvoir réflecteur d'un milieu pour les ondes radioélectriques devient égal à zéro lorsque $\varepsilon = \mu$.

4. La loi de Brewster restera-t-elle valable pour les ondes radioélectriques si les perméabilités magnétiques μ_1 et μ_2 des milieux seront différentes de l'unité ?

Réponse. Si la loi de Brewster est valable, l'angle de Brewster sous lequel la composante $E_\parallel$ du champ électrique ne sera pas réfléchie est donné par la formule

$$\operatorname{tg}\varphi_B=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\,\frac{\varepsilon_2\mu_1-\varepsilon_1\mu_2}{\varepsilon_2\mu_2-\varepsilon_1\mu_1}}. \qquad (67.15)$$

On peut envisager le cas où la composante $E_\perp$ ne sera pas réfléchie. Cela se réalise pour un angle défini par

$$\operatorname{tg}\varphi'_B=\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}\,\frac{\varepsilon_2\mu_1-\varepsilon_1\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1-\varepsilon_2\mu_2}}. \qquad (67.16)$$

Ces deux cas s'excluent l'un l'autre, puisque les quantités sous les radicaux de (67.15) et (67.16) sont de signes contraires. (On suppose que ε et μ sont des grandeurs essentiellement positives.) Il existe toujours un angle sous lequel l'une des composantes, $E_\parallel$ ou $E_\perp$, ne sera pas réfléchie.

5. S'assurer que les coefficients de Fresnel vérifient les relations (67.7).

6. Démontrer, en se servant des formules de Fresnel, qu'une lumière polarisée rectilignement conserve cette polarisation après réflexion sur la surface de séparation des deux milieux isotropes transparents dans tous les cas, exclusion faite de la réflexion totale.

7. L'angle que fait le plan de vibration d'une lumière polarisée avec le plan d'incidence est appelé *azimut des vibrations*. Trouver l'azimut γ de l'onde réfractée et l'azimut β de l'onde réfléchie, sachant que l'azimut de l'onde incidente est α et son angle d'incidence est φ.

Réponse. $\operatorname{tg}\gamma=\cos(\varphi-\psi)\operatorname{tg}\alpha,\ \operatorname{tg}\beta=-\dfrac{\cos(\varphi-\psi)}{\cos(\varphi+\psi)}\operatorname{tg}\alpha.$

8. 1) Calculer l'angle de Brewster pour une lumière réfléchie par un verre d'indice de réfraction $n = 1{,}5$; 2) Calculer pour cet angle le *degré de polarisation* de la lumière réfractée, i.e. la quantité $\Delta=\dfrac{I_\perp-I_\parallel}{I_\perp+I_\parallel}$, où $I_\parallel$ et $I_\perp$ sont les intensités des ondes réfléchies, l'une polarisée dans le plan d'incidence, l'autre dans un plan rectangulaire. La lumière incidente est une lumière naturelle.

Réponse. $\varphi_B = 56°19'$, $\Delta=\dfrac{4n^2-(n^2+1)^2}{4n^2+(n^2+1)^2}=-0{,}08.$

9. Une lumière naturelle tombe sous incidence brewstérienne de l'air sur la surface d'un verre d'indice $n = 1{,}5$. Calculer l'intensité I_r de la lumière réfléchie sachant que l'intensité de la lumière incidente est I_e.

Réponse. $\frac{I_r}{I_e}=\frac{1}{2}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^2=0,74.$

10. Une lumière naturelle tombe sous incidence brewstérienne de l'air sur la surface d'un diélectrique d'indice n. Calculer l'amplitude $D_{\parallel}$ de l'onde réfractée sachant que l'amplitude de l'onde incidente de même polarisation est $\mathscr{E}_{\parallel}$.

Réponse. $D_{\parallel}=\mathscr{E}_{\parallel}/n$.

11. On fait tomber un faisceau lumineux sous incidence brewstérienne φ_B sur la face latérale d'un prisme en verre d'indice $n = 1,5$; le vecteur électrique du faisceau incident est contenu dans le plan d'incidence. Quel doit être l'angle réfringent A du prisme pour que la lumière puisse traverser le prisme sans pertes à la réflexion?

Réponse. $A = \pi - 2\varphi_B = 68°$.

12. Quelles doivent être les conditions pour qu'un rayon lumineux tombant sur la face latérale d'un prisme isotrope transparent, d'angle réfringent $A = 60°$, puisse traverser ce prisme sans subir de pertes à la réflexion?

Réponse. Le vecteur électrique doit être contenu dans le plan d'incidence et l'indice de réfraction du prisme doit être égal à

$$n=1/\text{tg}\,(A/2)=\sqrt{3}=1,73.$$

13. La lumière tombe du milieu 1 sur le milieu 2 sous un angle φ et se réfracte sous un angle ψ. Démontrer que le coefficient de réflexion ne changera pas si la lumière tombe sous l'angle ψ en allant du milieu 2 vers le milieu 1.

14. Démontrer à l'aide des formules de Fresnel que lorsqu'une onde électromagnétique plane est réfléchie par un miroir parfait dont la surface supérieure est recouverte d'une pellicule de diélectrique transparent, l'amplitude de l'onde réfléchie est égale à l'amplitude de l'onde incidente. Seule la phase de l'onde doit changer, conformément à la loi de la conservation de l'énergie.

Solution. Lors de la réflexion sur un miroir parfait, la phase de l'onde doit changer, mais son amplitude doit rester constante. Par suite le coefficient de Fresnel r_2 figurant dans la formule (67.10) doit être de la forme $r_2 = e^{i\alpha}$. En introduisant la notation $\delta = 2k_0nl$, on tire de cette formule

$$\frac{R}{\mathscr{E}}=\frac{r_1+e^{i(\alpha-\delta)}}{1+r_1e^{i(\alpha-\delta)}},$$

d'où $|R| = |\mathscr{E}|$.

15. Une lumière traverse deux plans semi-transparents parallèles en subissant une réflexion partielle. Les coefficients de réflexion et de transmission du premier plan sont ρ_1 et b_1 et ceux du second plan sont ρ_2 et b_2. Le degré de monochromaticité de la lumière incidente étant petit, il n'y a pas d'interférences et les intensités lumineuses s'additionnent simplement. Calculer les coefficients de réflexion ρ et de transmission b pour le système des deux plans.

Solution.

$$\rho=\rho_1+\rho_2b_1^2+\rho_2b_1^2\rho_1\rho_2+\ldots=\rho_1+\frac{\rho_2b_1^2}{1-\rho_1\rho_2},$$

$$b=b_1b_2+b_1b_2\rho_1\rho_2+b_1b_2(\rho_1\rho_2)^2+\ldots=\frac{b_1b_2}{1-\rho_1\rho_2}.$$

Comme $\rho_1+b_1=1$, $\rho_2+b_2=1$, ces résultats peuvent s'écrire sous la forme

$$\rho=\frac{\rho_1+\rho_2-2\rho_1\rho_2}{1-\rho_1\rho_2},\quad b=\frac{(1-\rho_1)(1-\rho_2)}{1-\rho_1\rho_2}. \tag{67.17}$$

Si $\rho_1=\rho_2$ on trouve

$$\rho=\frac{2\rho_1}{1+\rho_1},\quad b=\frac{1-\rho_1}{1+\rho_1}. \tag{67.18}$$

16. La lumière traverse un système de m plans semi-transparents parallèles en subissant des réflexions partielles. Les coefficients de réflexion et de transmission de chaque plan sont ρ et b. Calculer le coefficient de réflexion ρ_m et le coefficient de transmission b_m du système des m plans (les caractéristiques de la lumière incidente sont les mêmes que dans le problème 15).

S o l u t i o n. Ajoutons au système de m plans un $(m+1)$-ième plan identique. On peut remplacer les m premiers plans par un seul plan de coefficient de réflexion ρ_m. Le problème se trouve ainsi ramené au problème 15 et on

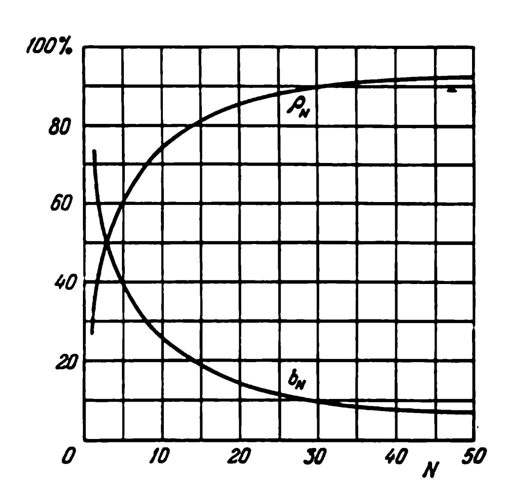


Fig. 248

trouve que les coefficients ρ et b des $(m+1)$ plans sont

$$\rho_{m+1}=\frac{\rho_m+\rho-2\rho_m\rho}{1-\rho_m\rho}, \qquad b_{m+1}=\frac{(1-\rho_m)(1-\rho)}{1-\rho_m\rho}.$$

On en tire sans difficulté

$$\rho_m=\frac{m\rho}{1+(m-1)\rho}, \qquad b_m=\frac{1-\rho}{1+(m-1)\rho}. \qquad (67.19)$$

17. La pile de glaces de Stolétov (1839-1896) se compose de lames de verre à faces parallèles d'indice $n = 1,5$. On y fait tomber sous incidence brewstérienne une lumière polarisée dans un plan perpendiculaire au plan d'incidence. Trouver les expressions donnant les coefficients de réflexion et de transmission en fonction du nombre N de lames et tracer les courbes correspondantes.

R é p o n s e. $\rho_N=\frac{2N}{2N+5,76}$, $b_N=\frac{5,76}{2N+5,76}$ (voir fig. 248).

18. On fait tomber une lumière naturelle sur une pile de N lames de verre d'indice n sous un angle d'incidence φ. Calculer les degrés de polarisation Δ et Δ' de la lumière transmise et de la lumière réfléchie, ainsi que le rapport des intensités $I_\perp/I_\parallel$ des principales composantes de la lumière transmise.

R é p o n s e.

$$\Delta=\frac{N(\rho_\perp-\rho_\parallel)}{(2N-1)\rho_\perp\rho_\parallel-(N-1)(\rho_\perp+\rho_\parallel)-1},$$

$$\Delta' = \frac{\rho_\perp - \rho_\parallel}{2(N-1)\rho_\perp\rho_\parallel + (\rho_\perp + \rho_\parallel)},$$

$$\frac{I_\perp}{I_\parallel} = \frac{1-\rho_\perp}{1-\rho_\parallel} \cdot \frac{(2N-1)\rho_\parallel + 1}{(2N-1)\rho_\perp + 1},$$

où $\rho_\parallel$ et $\rho_\perp$ sont les coefficients de réflexion des ondes polarisées dans le plan d'incidence et dans un plan rectangulaire, pour une seule surface réfléchissante:

$$\rho_\perp = \left(\frac{\cos\varphi - n\cos\psi}{\cos\varphi + n\cos\psi}\right)^2, \quad \rho_\parallel = \left(\frac{n\cos\varphi - \cos\psi}{n\cos\varphi + \cos\psi}\right)^2.$$

19. La lumière incidente présente une polarisation rectiligne et un azimut des vibrations égal à 45° *). Peut-on, à l'aide d'une seule réflexion, transformer cette lumière en une lumière de polarisation circulaire droite?

Réponse. Non, on ne peut le faire.

20. Quelle doit être la plus petite valeur de l'indice de réfraction d'un parallélépipède de Fresnel, afin que la lumière émergente présente une polarisation circulaire droite pour une lumière incidente dont l'azimut des vibrations est égal à +45°?

Réponse. $n = \frac{1 + \sin(3\pi/8)}{\cos(3\pi/8)} = 5,028$. Dans la gamme optique du spectre ce cas ne peut être réalisé, mais peut l'être avec des ondes électromagnétiques plus longues.

21. Une onde électromagnétique polarisée rectilignement, dont l'azimut des vibrations est égal à +135°, est réfléchie sur la surface de séparation eau-air. La permittivité diélectrique de l'eau $\varepsilon = 81$. Quel doit-être l'angle d'incidence de cette onde pour que l'onde réfléchie présente une polarisation circulaire? La polarisation sera-t-elle gauche ou droite?

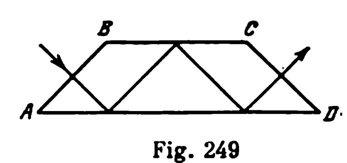


Fig. 249

Réponse. 6°29′ ou 44°38′. La polarisation sera droite.

22. Un rayon de lumière polarisée rectilignement, ayant un azimut des vibrations égal à +135°, tombe sous incidence normale sur la face AB d'un prisme en verre $ABCD$ (fig. 249) et en émerge à la suite de trois réflexions totales. Quel doit être l'angle réfringent A du prisme afin que la lumière émergente soit polarisée circulairement, sachant que l'indice de réfraction du verre est $n =$ $= 1,52$? La polarisation circulaire sera-t-elle gauche ou droite?

Réponse. 69°21′ ou 42°46′. La polarisation sera droite.

23. Quelle doit être la valeur minimale de l'indice de réfraction du prisme du problème précédent pour que la lumière émergente présente une polarisation circulaire droite, l'azimut des vibrations de la lumière incidente étant égal à +45°? Quelle valeur doit avoir pour cela l'angle A?

Réponse. $n = 1/(\sqrt{2} - 1) = 2,4143$; $A = 35°34'$.

24. Démontrer à l'aide d'un diagramme vectoriel que le changement de phase accompagnant une réflexion totale est deux fois plus grand que celui que subit l'onde réfractée (onde superficielle).

*) L'azimut des vibrations de l'onde incidente peut varier de $-\pi/2$ à $+\pi/2$. Il est compté positivement lorsque $\mathcal{E}_\parallel/\mathcal{E}_\perp > 0$ et négativement lorsque $\mathcal{E}_\parallel/\mathcal{E}_\perp < 0$.

§ 68. Interprétation de la propagation de la lumière dans un milieu en optique moléculaire

1. Selon les conceptions atomistiques, tout milieu doit être considéré comme du vide où sont répartis des atomes de la substance. (On peut considérer que les molécules se comportent comme des atomes.) L'onde incidente, ainsi que les rayonnements émis par les atomes voisins, excitent dans tout atome des vibrations des électrons et du noyau atomique, et cet atome se met à émettre des ondes sphériques secondaires qui se propagent entre ces particules avec la *vitesse c de la lumière dans le vide*. Comme toutes ces ondes sont excitées par une même onde incidente, elles sont cohérentes et leurs interférences mutuelles et avec l'onde incidente déterminent le champ d'onde dans tout l'espace. En particulier l'onde réfléchie résulte des interférences des ondes secondaires qui émergent du milieu dans le vide environnant.

On doit se demander pour quelle raison la vitesse de la lumière dans un milieu est différente de sa vitesse dans le vide. On doit encore préciser de quelle vitesse il s'agit. En théorie de la réflexion et de la réfraction, il s'agit surtout de la *vitesse de phase*, puisque c'est cette vitesse qui détermine l'indice de réfraction du milieu et par conséquent les lois de la réflexion et de la réfraction des ondes à la surface de séparation des milieux. La différence entre la vitesse de phase de la lumière dans un milieu et sa vitesse dans le vide s'interprète par le fait qu'en tout point de l'espace arrivent les ondes secondaires provenant non seulement des atomes situés le long du trajet du rayon passant par le point considéré, mais aussi des atomes se trouvant en dehors de cette ligne.

Examinons cette question en considérant des atomes ponctuels. Sous l'action de l'onde lumineuse les atomes acquièrent des moments dipolaires qui varient dans le temps et rayonnent comme des dipôles ponctuels de Hertz. Pour nos besoins, il suffit de connaître le champ de rayonnement de l'un de ces dipôles dans la *zone d'onde*. Ce champ n'est déterminé que par la composante $p_\perp$ du moment dipolaire perpendiculaire à la direction du rayonnement. Dans la zone d'onde la composante parallèle $p_\parallel$ ne participe pas au rayonnement du dipôle de Hertz.

2. Soit une onde monochromatique plane $E_0 e^{i(\omega t - k_0 x)}$ se propageant dans le vide le long de l'axe X ; interposons sur son trajet, perpendiculairement à l'axe X, une couche à faces parallèles infiniment mince d'épaisseur $d\xi$, constituée par des atomes ponctuels fixes uniformément répartis dans le volume de cette couche (fig. 250). En utilisant la méthode de Rayleigh, cherchons à savoir l'influence qu'exerce cette couche sur la phase des vibrations en un point éloigné A (x) se trouvant en avant de la couche. Les moments dipolaires des atomes excités par l'onde incidente sont de la forme $p =$

$= p_0 e^{i(\omega t - k_0 \xi)}$, où ξ est l'abscisse de la couche. Posons que le point A se trouve dans la zone d'onde du dipôle le plus proche et donc dans la zone d'onde de tous les autres dipôles de la couche. Le champ électrique que crée chaque dipôle au point A est égal à

$$\frac{k_0^2}{r} p_{0\perp} e^{i(\omega t - k_0 \xi - k_0 r)}, \tag{68.1}$$

où r est la distance du dipôle au point A (cf. t. III, § 141). On doit faire la somme des expressions (68.1) relatives à tous les dipôles de la couche. Pour calculer cette somme nous utiliserons la méthode des zones annulaires de Fresnel. Selon la théorie des zones de Fresnel, l'intensité résultante dE_1 de tous les dipôles au point A est égale à la moitié de l'intensité du champ excité en ce point par la zone centrale. Par conséquent, pour trouver dE_1, on doit faire la somme des expressions (68.1) relatives à tous les dipôles de la zone centrale et diviser par deux le résultat obtenu. Les ondes secondaires envoyées par la périphérie de la zone centrale présentent un retard de phase égal à π par rapport aux ondes envoyées par le centre O de la zone et par suite par rapport à l'onde incidente. Les ondes secondaires envoyées par les autres points de la zone centrale auront des retards intermédiaires. La vitesse de propagation de la phase de l'onde diminue du fait de son passage à travers la couche de substance.

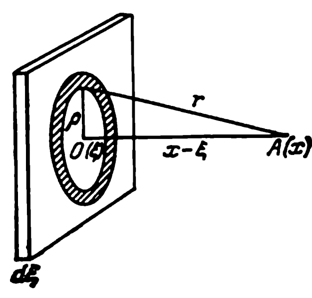


Fig. 250

Pour faire le calcul nous remplacerons la sommation par une intégration. Considérons une zone annulaire de rayon intérieur ρ et de rayon extérieur $\rho + d\rho$ (hachurée sur la figure 250). Le volume élémentaire $dV = 2\pi\rho\, d\rho\, d\xi$ contient $N\,dV$ dipôles (N étant le nombre de dipôles contenus dans l'unité de volume). Pour pouvoir remplacer la somme par une intégrale et pour que la méthode des zones de Fresnel soit applicable, on doit admettre que le nombre $N\,dV$ de dipôles est encore assez grand. On doit faire le produit de l'expression (68.1) par ce nombre, intégrer sur toute l'étendue de la zone centrale et diviser le résultat par deux. Si ξ est constant, on tire de la relation $\rho^2 = r^2 - (x - \xi)^2$ l'égalité $\rho\, d\rho = r\, dr$, et on prend la distance r pour variable d'intégration. Dans les limites de la zone centrale on peut poser que $p_{0\perp}$ est une quantité constante égale à p_0. L'intégration se réduit à

$$\int_{x-\xi}^{x-\xi+\lambda/2} e^{-ik_0 r}\, dr = -\frac{2}{k_0} i,$$

et en introduisant un coefficient convenable devant l'intégrale on arrive au résultat suivant:

$$dE_1 = -i2\pi k_0 N p_0 \, d\xi e^{i(\omega t - k_0 x)}.$$

En intégrant sur toutes les autres zones on arrive à s'assurer que, du fait de la décroissance de $p_{0\perp}$, l'action de ces zones diminue lentement à mesure que croît le numéro n de la zone, et pour $n \to \infty$ leur action tend vers zéro. Ce résultat peut être considéré comme une justification de l'application de la méthode des zones de Fresnel au cas considéré.

Pour trouver le champ total régnant au point A on doit ajouter dE_1 à l'onde incidente:

$$E = (E_0 - i2\pi k_0 N p_0 \, d\xi) \, e^{i(\omega t - k_0 x)} = E_0 e^{i(\omega t - k_0 x - d\Phi)},$$

où on a introduit la notation

$$d\Phi = \frac{2\pi k_0 N p_0}{E_0} \, d\xi.$$

Nous arrivons à la conclusion que l'introduction d'une couche de substance produit un retard de phase supplémentaire égal à $d\Phi$. Si l'épaisseur l de la couche est finie, le retard sera égal à

$$\Phi = \frac{2\pi k_0 N p_0}{E_0} \, l. \tag{68.2}$$

Cette formule fournit une *explication de principe* de la diminution de la vitesse de phase de la lumière, résultant de sa propagation à travers une substance.

Pour mener nos calculs à bonne fin on devrait trouver encore la relation existant entre les amplitudes de p_0 et de E_0. Dans le cas général, c'est un problème fort ardu, puisque le moment dipolaire d'un atome p dépend non pas du champ macroscopique moyen E, mais du *champ microscopique s'exerçant sur les atomes du milieu.* Ces deux champs ne coïncident pratiquement que pour des gaz de faible densité (pour lesquels $n - 1 \ll 1$) et dans ce cas $p_0 = \beta E_0$, où β est la polarisabilité de l'atome qui est liée à la permittivité diélectrique ε et à l'indice de réfraction n par la relation

$$\varepsilon = n^2 = 1 + 4\pi N\beta = 1 + 4\pi N p_0 / E_0.$$

Avec cette relation on tire de (68.2)

$$\Phi = \frac{n^2 - 1}{2} k_0 l \approx (n-1) k_0 l,$$

résultat qui coïncide avec le résultat de l'étude phénoménologique.

3. Dans la théorie phénoménologique on introduit l'indice de réfraction par les *équations macroscopiques de Maxwell.* Ces équations se fondent sur l'idée que tout volume élémentaire, dont les dimensions linéaires sont petites devant la longueur d'onde, renferme

encore un *très grand nombre d'atomes*. Les considérations moléculaires données ci-dessus montrent que *cette condition n'est pas obligatoire*. On peut définir l'indice de réfraction par le *déphasage* qu'introduit la substance placée sur le trajet de l'onde lumineuse. Nous avons calculé plus haut ce déphasage en supposant que l'élément de volume $dV = 2\pi\rho\, d\rho\, d\xi$ contenait un grand nombre d'atomes. Or cette dernière condition peut être satisfaite pour un milieu très raréfié en éloignant le point d'observation A à grande distance de la couche $d\xi$. On peut alors invoquer l'*indice de réfraction pour les rayons* X, quoique les équations macroscopiques de Maxwell ne les concernent pas. Il n'est pas absurde de parler de l'*indice de réfraction de l'espace interstellaire ou interplanétaire*, quoique la densité de substance y soit négligeable (un atome environ par centimètre cube).

4. Si on avait disposé le point d'observation A devant la couche, nos calculs auraient conduit à l'existence d'une onde se propageant en sens inverse, i.e. vers une *onde réfléchie*. Si la distance moyenne entre les atomes est plus petite que la longueur d'onde et si les atomes sont distribués dans l'espace de façon uniforme, il n'apparaîtra aucune autre onde, hormis l'onde transmise et l'onde réfléchie.

La situation est tout autre si la distance entre les atomes est *plus grande que la longueur d'onde*. Si les atomes sont répartis dans le milieu de façon régulière, par exemple aux nœuds d'un réseau cristallin, les ondes secondaires émises par les atomes seront cohérentes et ce sont les champs d'onde que l'on devra additionner. Les ondes secondaires peuvent alors être amplifiées par effet d'interférence non seulement suivant les directions de la lumière incidente et de la lumière réfléchie, mais aussi dans certaines autres directions. Ainsi apparaît une série discrète d'ondes planes se propageant dans différentes directions (*dispersion interférentielle*). Ce cas se réalise lorsque les rayons X de courte longueur d'onde sont diffractés par un réseau cristallin. Si la distribution spatiale des atomes est chaotique, les ondes secondaires se comportent, du point de vue de la diffusion latérale, comme des ondes non cohérentes et on doit additionner alors leurs intensités.

5. Jusqu'ici nous n'avons tenu aucun compte de l'*agitation thermique des atomes*, et il faut expliquer maintenant comment une onde régulière arrive à se propager dans un milieu en présence de cette agitation thermique et à donner une réflexion régulière sur la surface spéculaire des corps solides et liquides.

Considérons d'abord les gaz. Entre les chocs, les atomes de gaz se déplacent d'un mouvement uniforme et rectiligne. Les atomes qui se meuvent avec des vitesses différentes émettent, par effet Doppler, de la lumière de fréquences différentes. On pourrait penser que dans ces conditions il ne saurait être question d'interférences. En fait, lorsqu'il s'agit d'ondes secondaires allant *dans le sens de la propagation de la lumière*, il ne se produit pas de changement de fré-

quence. Soit une onde monochromatique plane de fréquence ω se propageant dans un gaz. Il s'agit alors de la fréquence dans le référentiel S par rapport auquel le gaz est au repos. Considérons un atome en mouvement et passons dans un référentiel S' par rapport auquel l'atome est au repos. Dans le référentiel S' la fréquence de l'onde plane doit changer et prendre la valeur ω'. Dans ce référentiel S' les vibrations de l'atome excité auront la fréquence ω' et ce sera la fréquence des ondes sphériques secondaires émises par l'atome. Si on retourne dans le référentiel S, la fréquence ω' de l'onde sphérique émise doit changer et doit dépendre de la direction du rayonnement. Ce n'est que dans la direction de l'onde primaire que la fréquence sera égale à ω, et ce, quelles qu'aient été la vitesse et la direction de déplacement de l'atome.

Ainsi, le long de la direction de propagation de l'onde primaire, tous les atomes émettent des ondes *de même fréquence* ω. C'est ce qui détermine la possibilité d'une propagation régulière de la lumière dans les gaz. Dans toutes les autres directions les atomes en mouvement doivent envoyer des ondes de fréquences différentes. Par exemple, si un atome se meut dans le même sens que la lumière, il émettra en sens inverse des ondes de fréquence plus petite. Mais si l'atome se meut à l'encontre de la lumière, la fréquence de l'onde qu'il envoie en avant sera plus grande.

Dans les corps solides et liquides le mouvement thermique des atomes est tout autre, les atomes y sont animés de mouvements *accélérés* et on ne peut donc utiliser le procédé de changement de référentiel. Les atomes oscillent autour de leurs positions d'équilibre et de ce fait *modulent* le champ de l'onde lumineuse. Ainsi, à côté des ondes secondaires de la même fréquence que ci-dessus apparaissent des ondes d'autres fréquences. Tout ce qui a été dit ci-dessus s'applique aux ondes des fréquences déjà envisagées et ce sont ces ondes qui rendent possibles une propagation régulière des ondes lumineuses dans les corps solides et liquides, ainsi qu'une réflexion et une réfraction régulières sur les surfaces spéculaires des corps. L'émission d'ondes d'autres fréquences fait apparaître de nouvelles fréquences dans la lumière diffuse.

6. Il nous reste à faire une remarque qui nous sera utile pour établir les formules de Fresnel en se fondant sur les conceptions atomistiques. Dans un milieu homogène et illimité des vibrations dipolaires peuvent se propager sous forme d'onde progressive

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_0 e^{i(\omega t - \boldsymbol{kr})}, \tag{68.3}$$

où $\boldsymbol{p}$ est le moment dipolaire d'un atome de rayon vecteur $\boldsymbol{r}$. Lorsqu'un dipôle rayonne, il perd de l'énergie ; mais cette perte d'énergie est compensée par l'énergie provenant d'autres dipôles. Le rayonnement des autres dipôles crée, à l'emplacement du dipôle considéré, un champ électrique qui entretient les vibrations harmoniques per-

manentes de ce dipôle. Ainsi le milieu se comporte comme un *système fermé* qui exécute des vibrations *libres*, sans être soumis à des actions extérieures. Si la longueur d'onde est grande par rapport aux distances interatomiques, on peut assimiler le milieu à un milieu continu et caractériser son état par le vecteur polarisation

$$P = Np = P_0 e^{i(\omega t - kr)}, \qquad (68.4)$$

où N est le nombre d'atomes contenus dans l'unité de volume.

§ 69. Etablissement des formules de Fresnel par les procédés de l'optique moléculaire

1. Soit un milieu isotrope homogène en contact avec le vide suivant un plan. Une onde électromagnétique plane excite dans ce milieu une *onde dipolaire* (68.3) qui, moyennée sur des volumes infiniment petits, peut être considérée comme une *onde de polarisation* (68.4). On détermine les directions de propagation de cette onde et de l'onde réfléchie en imposant l'égalité des vitesses de phase de toutes les ondes parallèles à la surface de séparation. On arrive ainsi à l'égalité des *composantes tangentielles* des vecteurs d'onde $\boldsymbol{k}_0$, $\boldsymbol{k}'_0$ et $\boldsymbol{k}$ des ondes incidente, réfléchie et transmise. En outre on doit avoir $k_0^2 = k_0'^2 = (\omega/c)^2$, puisque l'onde tombe sur le milieu en venant du vide.

Imposons que le vecteur électrique de l'onde incidente soit contenu dans le plan d'incidence (fig. 251). Si l'onde tombe sous incidence brewstérienne, le rayon réfracté OC sera perpendiculaire au rayon réfléchi OB. Du fait de la transversalité des ondes lumineuses, le vecteur électrique dans le milieu est perpendiculaire au rayon réfracté OC. Les moments dipolaires excités par le vecteur électrique seront, eux aussi, perpendiculaires à OC et donc parallèles à OB. Or, comme un dipôle de Hertz ne rayonne pas dans la direction du moment dipolaire, les atomes du milieu *ne peuvent rayonner* dans la direction OB et *il n'y aura pas d'onde réfléchie*. C'est une explication vraiment simple de la loi de Brewster. (Voir aussi problème n° 4 à la fin du paragraphe suivant.)

2. Pour établir les formules de Fresnel relatives à la lumière réfléchie, on considérera le milieu comme continu, puisque les distances interatomiques sont négligeables devant la distance entre la frontière du milieu et le point d'observation où on cherche à déterminer le champ de l'onde réfléchie. Dans ces conditions idéalisées les centres rayonnants ne seront plus des atomes, mais des éléments de volume du milieu, petits devant λ^3, mais contenant encore un très grand nombre d'atomes.

Fixons les positions des axes de coordonnées comme dans le cas de la figure 238 et divisons le milieu en couches planes *I*, *II*, *III*, . . . parallèles les unes aux autres et de même épaisseur, que nous appel-

lerons dans ce qui suit *zones*, par analogie avec les zones annulaires de Fresnel (fig. 252). Chaque zone à faces parallèles émet, dans le demi-espace supérieur, une onde plane de vecteur d'onde k'_0.

L'épaisseur L' des zones doit être telle que chaque onde présente un retard de phase égal à π par rapport à l'onde précédente. A l'instant $t = 0$, la phase des vibrations dipolaires au point O est égale à zéro, et les vibrations dipolaires arrivent au point O' avec une phase égale à $(-k_z L')$. L'onde envoyée du point O' arrive au point O

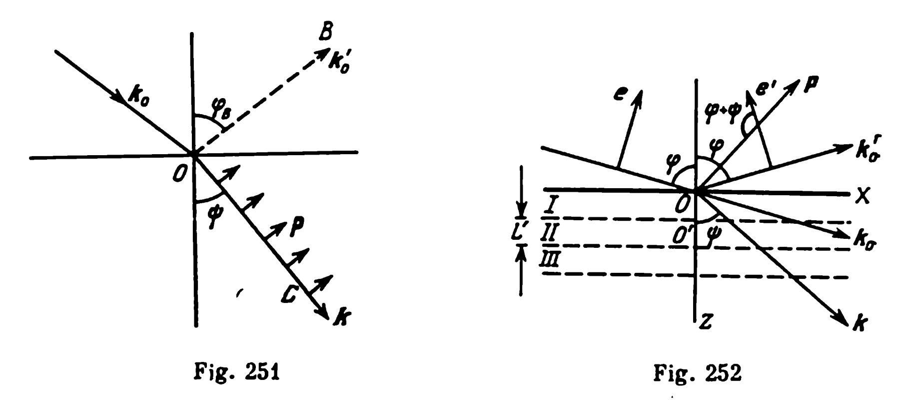


Fig. 251 Fig. 252

avec un retard de phase supplémentaire $k_{0z}L'$. D'après les conditions imposées, le retard de phase total $(k_z + k_{0z}) L'$ doit être égal à π; on en tire $L' = \pi/(k_z + k_{0z})$.

Il s'ensuit que le champ électrique $E^{(r)}$ de l'onde réfléchie se laisse représenter par une série alternée

$$E^{(r)} = E_1 - E_2 + E_3 - \ldots, \qquad (69.1)$$

dont les termes représentent les champs de rayonnement des différentes zones. Si l'onde de polarisation (68.4) est parfaitement homogène, les termes de la série (69.1) sont égaux en valeurs absolues. Les sommes partielles de cette série oscillent entre zéro et E_1, tandis que la somme des termes de toute la série n'a pas de valeur déterminée.

En réalité, l'onde de polarisation *n'est pas homogène*, puisqu'elle présente un *front avant* devant lequel il n'y a aucune perturbation ondulatoire. Comme la série (69.1) contient un nombre fini de termes, elle est convergente; pour évaluer la somme des termes éliminons, en pensée, la première zone et le champ qu'elle crée et déplaçons le milieu restant vers le haut d'une distance L'. En outre, nous devons modifier les phases de tous les dipôles du milieu d'une même quantité qui doit être telle que les dipôles, qui après déplacement se trouvent à la frontière, aient les mêmes phases qu'auraient au même instant les dipôles de la première zone qui a été éliminée. Comme

les termes de la série (69.1) varient lentement et comme les zones sont identiques, le champ créé par le milieu dans le demi-espace supérieur restera pratiquement inaltéré par ces différentes manipulations, mais peut être représenté maintenant par la série

$$E^{(r)} = E_2 - E_3 + E_4 - \ldots \quad (69.2)$$

En faisant la somme de (69.1) et (69.2), on obtient

$$E^{(r)} = \frac{1}{2} E_1. \quad (69.3)$$

Ainsi, *dans le demi-espace supérieur, l'intensité du champ de rayonnement du milieu est égale à la moitié de l'intensité du champ qu'y crée la première zone.* Nous sommes arrivés au même résultat que celui que fournit la théorie des zones annulaires de Fresnel (cf. § 39), mais cette nouvelle démonstration est mieux justifiée, puisque la relation (69.2) pour les zones planes est plus solidement étayée que la relation analogue pour les zones annulaires de Fresnel.

3. Il est nécessaire de faire une remarque avant de poursuivre notre exposé. L'onde réfléchie, émise dans le demi-espace supérieur par un milieu continu dont le vecteur polarisation (68.4) est distribué de façon continue, sera partout plane et homogène. Dans le cas d'un milieu réel composé d'atomes discrets, près de la frontière, viennent se superposer au champ variant lentement des « rides moléculaires », i.e. un champ supplémentaire variant fortement sur des distances comparables aux distances interatomiques. Ce champ se laisse représenter par une superposition d'ondes qui s'atténuent rapidement à mesure qu'on s'éloigne de la frontière du milieu. La période spatiale de ces ondes évanescentes, comptée le long de l'axe X, est de l'ordre de la distance a entre les atomes, et la composante correspondante du vecteur d'onde sera de l'ordre de $K_x \approx 2\pi/a$. Comme la longueur du vecteur K doit être égale à ω/c, sa composante z est $K_z = \sqrt{(\omega/c)^2 - K_x^2} \approx i2\pi/a$. Ce résultat montre que lorsqu'on s'éloigne de la frontière du milieu à une distance a, le champ des ondes évanescentes décroît de $e^{2\pi} \approx 500$ fois.

Nous avons noté plus haut qu'on ne pouvait remplacer les centres émetteurs discrets (les atomes) par un milieu continu que si on cherche à calculer le champ qu'il crée dans le demi-espace supérieur à des distances qui sont très grandes devant la distance interatomique a. L'estimation à laquelle nous venons de procéder montre que cette limitation est, en fait, beaucoup moins rigoureuse. Le champ de rayonnement d'un milieu réel se confond avec le champ de son modèle continu idéalisé déjà à une distance de la frontière comparable à a.

4. Pour arriver aux formules de Fresnel, on pourrait envisager deux procédés de calcul. Premièrement, on pourrait calculer le champ de rayonnement de tous les dipôles du milieu dans le demi-espace qu'il occupe. Mais comme c'est une méthode trop ardue, nous utiliserons la remarque du § 68.6 qui permet d'éviter des calculs compliqués.

Représentons-nous que l'onde incidente *résulte de l'émission d'un certain milieu* et que le demi-espace supérieur de la figure 252 est occupé par le même milieu que celui du demi-espace inférieur; posons que dans tout l'espace infini se propage une onde de polarisation homogène (68.4). Le champ de rayonnement du milieu imaginaire du demi-espace supérieur exerce une influence sur le milieu occupant le demi-espace inférieur. Mais comme rien n'a changé dans ce dernier, le champ que le milieu imaginaire envoie dans le demi-espace inférieur est identique au champ de l'onde incidente.

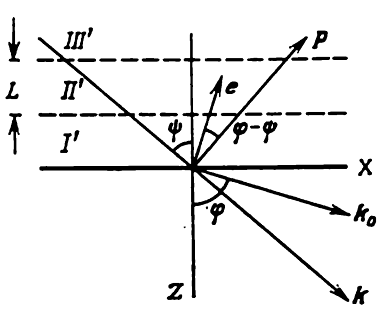


Fig. 253

Divisons le milieu imaginaire en zones plan-parallèles I', II', III', . . . d'épaisseur $L = \pi/(k_z - k_{0z})$ (fig. 253). En reprenant les raisonnements qui ont été faits plus haut, on arrive à démontrer que l'intensité du champ que le milieu imaginaire envoie dans le demi-espace inférieur est égale à la moitié de l'intensité du champ de rayonnement de la zone I'. Le calcul du rapport des amplitudes R de l'onde réfléchie et $\mathcal{E}$ de l'onde incidente se trouve ramené à la comparaison des champs créés par les zones I et I' sur la frontière du milieu $z = 0$.

Si le vecteur $\boldsymbol{P}$ est perpendiculaire au plan d'incidence, le rapport des amplitudes R et $\mathcal{E}$ sera égal au rapport des épaisseurs des zones I et I' que l'on affectera du signe moins, puisque les phases des ondes envoyées par ces zones sont opposées sur la surface de séparation. On retrouve ainsi la première formule de Fresnel:

$$\frac{R_\perp}{\mathcal{E}_\perp} = -\frac{L'}{L} = -\frac{k_z - k_{0z}}{k_z + k_{0z}} = -\frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)}. \tag{69.4}$$

Mais si le vecteur $\boldsymbol{P}$ est parallèle au plan d'incidence, on devra tenir compte encore de la variation du champ d'émission des dipôles avec l'angle que fait la direction d'émission avec celle du moment dipolaire. Comme seule la composante transversale du moment dipolaire contribue à l'émission, on doit multiplier la quantité $-L'/L$ par le rapport des projections du vecteur $\boldsymbol{P}$ sur les directions des vecteurs unitaires $\boldsymbol{e}'$ et $\boldsymbol{e}$ qui sont perpendiculaires aux directions de propagation de l'onde réfléchie et de l'onde incidente. En tenant compte de la transversalité de l'onde réfractée ($\boldsymbol{kP} = 0$), on trouve que ce dernier rapport est égal à $-\cos(\varphi + \psi)/\cos(\varphi - \psi)$ (fig. 252 et 253); le rapport des amplitudes $R_{\parallel}$ et $\mathcal{E}_{\parallel}$ s'exprime

alors par

$$\frac{R_{\parallel}}{\mathscr{E}_{\parallel}}=-\frac{R_{\perp}}{\mathscr{E}_{\perp}}\frac{\cos(\varphi+\psi)}{\cos(\varphi-\psi)}=\frac{\operatorname{tg}(\varphi-\psi)}{\operatorname{tg}(\varphi+\psi)}. \qquad (69.5)$$

C'est la deuxième formule de Fresnel.

En utilisant un raisonnement analogue on peut étudier le cas de l'incidence milieu-vide, ainsi que le cas général de la réflexion sur la surface de séparation de deux milieux matériels.

§ 70. Ecarts aux formules de Fresnel

1. Les formules de Fresnel caractérisent bien la réflexion et la réfraction de la lumière sur la surface propre de deux milieux transparents isotropes. On ne constate de petits écarts à ces formules que sous incidence brewstérienne ou à proximité de celle-ci. Ces écarts se manifestent nettement par l'apparition des phénomènes suivants:

a) *La loi de Brewster n'est pas exactement vérifiée* lors de la réflexion d'une lumière polarisée dans le plan d'incidence; le coefficient de réflexion ne s'annule pour aucune valeur de l'angle d'incidence, quoiqu'il soit très petit sous incidence brewstérienne.

b) Lorsqu'une lumière polarisée rectilignement, dont le plan de polarisation fait un certain angle avec le plan d'incidence, est réfléchie sous un angle peu différent de l'angle de Brewster, elle acquiert une polarisation *elliptique*; si les formules de Fresnel étaient rigoureusement vérifiées, la lumière conserverait une polarisation rectiligne, exception faite du cas où la réflexion serait totale.

Ces deux écarts aux formules de Fresnel sont *liés*. En effet, si les formules de Fresnel

$$\frac{R_{\perp}}{\mathscr{E}_{\perp}}=-\frac{\sin(\varphi-\psi)}{\sin(\varphi+\psi)}, \qquad \frac{R_{\parallel}}{\mathscr{E}_{\parallel}}=\frac{\operatorname{tg}(\varphi-\psi)}{\operatorname{tg}(\varphi+\psi)} \qquad (70.1)$$

étaient rigoureusement vérifiées, le rapport $R_{\perp}/\mathscr{E}_{\perp}$ conserverait son signe pour tous les angles d'incidence, tandis que le rapport $R_{\parallel}/\mathscr{E}_{\parallel}$ changerait de signe au passage par l'angle de Brewster. Autrement dit, au passage par l'incidence brewstérienne, la phase de l'onde réfléchie changerait brusquement de π, on n'observerait alors aucune solution de continuité de $R_{\parallel}$ en fonction de l'angle d'incidence φ, puisque d'après la deuxième formule (70.1) cette fonction s'annule pour $\varphi = \varphi_B$. Or, dans le cas où la fonction $R_{\parallel}(\varphi)$ présenterait une discontinuité pour $\varphi = \varphi_B$, ce qui est le cas réel, elle ne saurait s'annuler pour cette valeur de l'angle d'incidence. Comme il n'existe aucune cause physique d'une telle discontinuité, on doit en conclure que le changement de phase de $R_{\parallel}(\varphi)$ se produit non pas par saut pour $\varphi = \varphi_B$, mais s'étend sur un petit voisinage autour de cet angle. Dans les limites de ce voisinage la phase varie de façon continue de 0 à π; simultanément, il se produit dans ce

voisinage un déphasage entre les composantes $E_{\parallel}$ et $E_{\perp}$, ce qui détermine la polarisation elliptique de la lumière réfléchie, à condition que la lumière incidente soit polarisée rectilignement. Ce résultat prouve que *le second écart aux lois de Fresnel est une conséquence du premier écart.*

La proposition inverse est également vraie: *le premier écart aux lois découle du second*, à condition que les milieux ne donnent pas lieu à une polarisation rotatoire. Ce résultat est évident, puisqu'alors les ondes $E_{\parallel}$ et $E_{\perp}$ conservent leurs polarisations propres et se propagent indépendamment l'une de l'autre, en conformité avec le principe de superposition.

2. On interprète ces écarts aux lois de Fresnel par l'existence, à la surface du milieu réfléchissant, d'une mince *couche de transition* dont les propriétés optiques se distinguent de celles du milieu. Cette explication est indubitable, tout au moins dans le cas de milieux dénués de tensions intérieures, mais on ne peut expliquer de façon certaine ni l'origine de ces couches ni leurs propriétés optiques.

Le cas le plus simple est celui où la surface du milieu réfléchissant est recouverte d'une mince pellicule de substance étrangère, déposée intentionnellement, ou qui s'est formée spontanément par suite des traitements de la surface ou de sa contamination. Si l'épaisseur de la pellicule est grande par rapport aux distances interatomiques, on peut la caractériser par les *paramètres macroscopiques* — épaisseur l et indice de réfraction n. Les pellicules d'une épaisseur de l'ordre de λ sont déposées intentionnellement sur les surfaces réfléchissantes pour améliorer leur transparence superficielle ainsi que pour réaliser des filtres interférentiels. Si la pellicule est homogène, i.e. son indice n a une valeur constante sur toute l'épaisseur, la réflexion et la réfraction sont décrites par les formules (67.9).

Ce sont cependant les pellicules d'une épaisseur petite devant λ qui nous intéressent pour le moment. Dans ce cas on peut simplifier les formules (67.9) en les développant en une série de puissances de l/λ, en n'y conservant que les termes du premier degré en l/λ. On peut alors généraliser les calculs sans se soucier de l'homogénéité des pellicules, en admettant que l'indice n y varie de façon *continue*. C'est ce que firent Drude (1863-1906) et différents autres physiciens. Mais les estimations de l'épaisseur des pellicules formées à la surface des liquides purs et des clivages des cristaux montrent qu'elle est *du même ordre de grandeur* que les dimensions atomiques et les distances interatomiques. Il serait donc erroné d'appliquer à ces pellicules les équations macroscopiques de Maxwell et de les caractériser par un indice de réfraction. Pour obtenir les résultats qui nous intéressent nous utiliserons les méthodes de l'optique moléculaire dont il a été question au paragraphe précédent.

3. Supposons d'abord qu'il n'y a aucune couche de transition sur la surface réfléchissante. Nous avons montré au paragraphe précédent qu'il suffisait de

considérer le champ de rayonnement de la première zone I (fig. 252) pour déterminer le champ de l'onde réfléchie. Subdivisons cette zone en couches infiniment minces d'épaisseur $d\zeta$ (fig. 254). Au point O' le vecteur polarisation est $P_0e^{i(\omega t-k_z\zeta)}$. Le moment dipolaire de l'unité d'aire de la couche $d\zeta$ est $P_0\,d\zeta\,e^{i(\omega t-k_z\zeta)}$. Les vibrations issues de O' arrivent en O avec un retard de phase $k_{0z}\zeta$. Pour faciliter les calculs on peut transporter, en pensée, la couche $d\zeta$ à la frontière du milieu en introduisant un déphasage convenable. Le moment dipolaire de l'unité d'aire de la couche ainsi déplacée sera alors

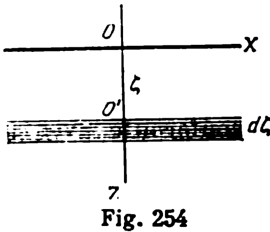


Fig. 254

$$dA^{(r)}e^{i\omega t}=P_0e^{i\omega t}e^{-i(k_{0z}+k_z)\zeta}\,d\zeta.$$

Intégrons sur l'épaisseur de la première zone I et divisons par deux le résultat obtenu. On constate alors que l'onde réfléchie peut être représentée par le champ de rayonnement d'un « plan équivalent », situé à la surface du milieu sur lequel se produisent les vibrations dipolaires avec une densité surfacique d'amplitude

$$A_0^{(r)}=\frac{P_0}{2}\int\limits_0^{L'}e^{-i(k_{0z}+k_z)\zeta}\,d\zeta=i\frac{P_0}{2(k_{0z}+k_z)}\left[e^{-i(k_{0z}+k_z)L'}-1\right],$$

et, comme $(k_{0z}+k_z)\,L'=\pi$,

$$A_0^{(r)}=-i\frac{P_0}{k_{0z}+k_z}. \tag{70.2a}$$

En appliquant le même raisonnement à la zone I' (fig. 253), on arrivera à la conclusion que l'onde incidente peut être simulée par le champ de rayonnement créé par un autre « plan équivalent » situé également à la frontière du milieu. Le moment dipolaire de l'unité d'aire de ce plan a pour amplitude

$$A_0^{(e)}=-i\frac{P_0}{k_{0z}-k_z}. \tag{70.2b}$$

4. Tenons compte de l'existence d'une couche de transition. En admettant que l'épaisseur de cette couche est petite devant λ, on peut l'assimiler à un plan mathématique. Désignons par $\tau=\tau_0e^{i(\omega t-k_{0x}x)}$ le moment dipolaire supplémentaire créé par l'unité d'aire de la couche de transition. Quoique τ soit une grandeur macroscopique, on peut l'utiliser même s'il s'agit de *couches de transition infiniment minces* (y compris les couches monomoléculaires), car l'introduction de τ implique un moyennage *sur de petits éléments de surface* de la surface réfléchissante et non pas un moyennage sur de petits éléments de volume du milieu. On peut, en effet, prendre des éléments de surface petits devant la longueur d'onde, mais grands par rapport aux distances interatomiques.

Pour simuler le champ de l'onde réfléchie, tenant compte du rayonnement de la couche de transition, on doit ajouter τ_0 à l'amplitude $A_0^{(r)}$. Pour simuler l'onde incidente, on doit ajouter la même grandeur τ_0, mais changée de signe, à l'amplitude $A_0^{(e)}$. En effet, après cette addition, l'onde qui pénètre de l'extérieur dans le milieu et exerce son action sur celui-ci sera simulée par les rayonnements issus de deux plans situés à la surface du milieu : l'un dont l'amplitude des vibrations dipolaires est $(A_0^{(e)}-\tau_0)$, l'autre dont l'amplitude des vibrations dipolaires est τ_0. Les amplitudes τ_0 et $-\tau_0$ se compensent mutuellement et il ne subsiste que l'amplitude $A_0^{(e)}$; tout se passe comme si, loin de la surface,

la couche de transition n'exerçait aucune influence sur le milieu. Or c'est justement ce qui est nécessaire, afin qu'en dehors de la couche de transition la polarisation du milieu se présente sous forme de l'onde homogène (68.4).

Ainsi, à la place de (70.2a) ou de (70.2b), on obtient les expressions

$$A^{(r)} = -i\frac{P_0}{k_z + k_{0z}} + \tau_0, \quad A^{(e)} = i\frac{P_0}{k_z - k_{0z}} - \tau_0, \qquad (70.3)$$

que l'on doit utiliser pour calculer les champs de l'onde incidente et de l'onde réfléchie. Il est évident que le rayonnement est déterminé non par les amplitudes (70.3), mais par leurs composantes *normales à la direction du rayonnement*. Les coefficients de Fresnel $R_\perp/\mathscr{E}_\perp$ et $R_\parallel/\mathscr{E}_\parallel$ sont donnés par les rapports de ces composantes. En ne gardant que les termes linéaires en k_0, on obtient, après des calculs simples mais longs, les résultats suivants:

$$\frac{R_\perp}{\mathscr{E}_\perp} = -\frac{\sin(\varphi-\psi)}{\sin(\varphi+\psi)}(1 + 2ik_0\gamma_x \cos\varphi), \qquad (70.4)$$

$$\frac{R_\parallel}{\mathscr{E}_\parallel} = \frac{\operatorname{tg}(\varphi-\psi)}{\operatorname{tg}(\varphi+\psi)}\left(1 + 2ik_0\cos\varphi\,\frac{\gamma_x\cos^2\psi - \gamma_z\sin^2\varphi}{\cos^2\psi - \sin^2\varphi}\right). \qquad (70.5)$$

On a utilisé les notations suivantes:

$$\gamma_x = \frac{\tau_{0x}}{P_{0x}} = \frac{\tau_{0y}}{P_{0y}}, \quad \gamma_z = \frac{\tau_{0z}}{P_{0z}}. \qquad (70.6)$$

Les paramètres γ_x et γ_z ont les dimensions d'une longueur. Dans la théorie que nous venons d'exposer ce sont ces paramètres qui caractérisent les propriétés de la couche de transition. Pour que la théorie soit utilisable, il faut que les conditions suivantes soient vérifiées:

$$\gamma_x k_0 \ll 1, \quad \gamma_z k_0 \ll 1 \quad \text{ou} \quad \gamma_x/\lambda \ll 1, \quad \gamma_z/\lambda \ll 1.$$

Les termes de second degré $(\gamma_x/\lambda)^2$ et $(\gamma_z/\lambda)^2$ ont été rejetés, de sorte que dans cette approximation tous les coefficients sont indépendants de λ lorsque γ_x/λ et γ_z/λ sont petits. Cela signifie que le calcul des paramètres γ_x et γ_z se réduit à un *problème d'électrostatique pure*. Pour exécuter un calcul réel de ces paramètres de la théorie moléculaire, il faut connaître les structures moléculaires du milieu et de la couche de transition.

5. L'état de polarisation de la lumière réfléchie est entièrement caractérisé par le rapport complexe $R_\parallel/R_\perp$. Si $\mathscr{E}_\perp = \mathscr{E}_\parallel$, on a

$$\frac{R_\parallel}{R_\perp} = -\frac{\cos(\varphi+\psi)}{\cos(\varphi-\psi)} + 2ik_0(\gamma_z - \gamma_x)\frac{\cos\varphi\sin^2\varphi}{\cos^2(\varphi-\psi)}. \qquad (70.7)$$

Sous incidence brewstérienne ce rapport est *purement imaginaire*, i.e. la lumière réfléchie est polarisée *elliptiquement*. Un des principaux axes de l'ellipse des vibrations est perpendiculaire au plan d'incidence, l'autre est contenu dans ce plan. Le rapport de ces axes est appelé *ellipticité* de la lumière réfléchie sous incidence brewstérienne. L'ellipticité peut être positive et négative, puisque la différence de phase δ entre les composantes $R_\parallel$ et $R_\perp$ est posée égale à $+\pi/2$ pour l'incidence brewstérienne. Avec cette convention $R_\parallel/R_\perp = \rho e^{i\pi/2} = i\rho$. A l'aide de (70.7) on trouve

$$\rho = \frac{\pi}{\lambda}\sqrt{n^2+1}\,(\gamma_z - \gamma_x), \qquad (70.8)$$

où λ désigne la longueur d'onde dans le vide. L'ellipticité positive correspond à une polarisation elliptique gauche de la lumière réfléchie et l'ellipticité

négative correspond à une polarisation elliptique droite (on suppose que la lumière incidente est polarisée rectilignement sous un angle de 45° par rapport au plan d'incidence, i.e. $\mathscr{E}_{\parallel} = \mathscr{E}_{\perp}$). La polarisation elliptique est dite *droite* si l'ellipse est parcourue dans le sens horaire lorsqu'on l'observe dans le sens opposé au sens de propagation de la lumière. Dans le cas contraire, elle est dite *gauche*.

Pour tous les liquides à surface propre qui ont été étudiés, le coefficient ρ est positif. Il est négatif pour l'eau ordinaire. Rayleigh a montré que lorsqu'on décontaminait la surface de l'eau, le coefficient ρ changeait de signe et s'annulait à un certain degré de purification. Pour une surface décontaminée au plus haut degré, Rayleigh trouva $\rho = +0{,}00042$. On a indiqué dans le tableau 6 les valeurs de ρ pour différents liquides ($\lambda = 546$ nm).

Tableau 6

Substance	$\rho \cdot 10^5$	n	$l_{\min}/\lambda$
Eau	42	1,33	0,00057
Alcool méthylique	46	1,33	0,00062
Alcool éthylique	92	1,33	0,00124
Tétrachlorure de carbone	107	1,46	0,00103
Benzène	135	1,51	0,00117
Toluène	144	1,50	0,00101
Orthoxylène	137	1,51	0,00119

Dans la dernière colonne du tableau 6 on a indiqué l'épaisseur minimale $l_{\min}$ de la couche de transition qui, d'après la théorie de Drude, est suffisante pour produire l'ellipticité observée de la lumière réfléchie (voir problème n° 3 à la fin de ce paragraphe). Quoique cette théorie soit macroscopique, elle donne une estimation correcte de la valeur de $l_{\min}$. L'épaisseur des couches de transition, de l'ordre de un ou de plusieurs distances interatomiques, est suffisante pour provoquer les écarts observés aux formules de Fresnel. Ce résultat démontre qu'à côté des couches de transition déterminées par la contamination, les traitements, l'absorption des gaz, etc., il existe des couches de transition déterminées par la *structure moléculaire* du milieu réfléchissant à proximité de sa surface.

Il serait hasardeux de préciser la cause de l'apparition de ces couches de transition, mais on peut indiquer plusieurs causes possibles : 1) Le champ électrique de l'onde lumineuse, exerçant son action sur les molécules superficielles du milieu, peut être différent de celui qui agit sur les autres molécules. 2) Si le milieu est constitué par des molécules anisotropes, celles-ci peuvent s'orienter d'une certaine façon près de la surface. 3) Dans une mince couche superficielle, la densité peut être différente de la densité du milieu.

PROBLÈMES

1. En admettant que la couche de transition est continue, calculer ses paramètres γ_x et γ_z.

Solution. Le problème consiste à déterminer le vecteur polarisation $\boldsymbol{P}(z)$ du milieu et de la couche de transition soumis à l'action d'un champ électrique uniforme $\boldsymbol{E}$. On caractérise le milieu par les permittivités diélectriques $\varepsilon_x(z)$ et $\varepsilon_z(z)$ le long des directions parallèle et perpendiculaire à la couche. Les axes de coordonnées sont fixées de manière que $E_y = D_y = 0$. Par raison de symétrie, les vecteurs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{D}$ sont indépendants de x et de y. Par suite les

équations rot $E = 0$ et div $D = 0$ se réduisent à

$$\frac{dE_x}{dz} = \frac{dD_z}{dz} = 0.$$

Cela signifie que E_x et D_z sont constants dans tout l'espace considéré, i.e. sont indépendants de z. Dans la couche de transition le vecteur polarisation est

$$P_x = \frac{\varepsilon_x - 1}{4\pi} E_x, \; P_z = \frac{\varepsilon_z - 1}{4\pi} E_z = \frac{1}{4\pi}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_z}\right) D_z.$$

Pour déterminer la polarisation supplémentaire ΔP due à la couche de transition, on fera la différence entre ces expressions et le vecteur polarisation du milieu homogène:

$$\Delta P_x = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon}{4\pi} E_x, \quad \Delta P_z = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_z}\right) D_z,$$

où ε est la permittivité diélectrique de ce milieu. En intégrant ces expressions sur l'épaisseur l de la couche de transition on trouve τ_{0x} et τ_{0z}. Ayant calculé l'intégrale et en utilisant les notations

$$p = \int_0^l \varepsilon_x(z)\,dz, \quad q = \int_0^l \frac{dz}{\varepsilon_z(z)},$$

on obtient

$$\gamma_x = \frac{p - ln^2}{n^2 - 1}, \quad \gamma_z = \frac{l - qn^2}{n^2 - 1}. \tag{70.9}$$

En portant ces expressions dans (70.4) et (70.5) on obtient les *formules de Drude*.

2. En admettant que la couche de transition est macroscopique et homogène, trouver l'expression de l'ellipticité sous incidence brewstérienne.

Réponse.

$$\rho = \frac{\pi}{\lambda} \sqrt{n^2 + 1}\, \frac{(n^2 - n'^2)(n'^2 - 1)}{(n^2 - 1)\, n'^2}\, l, \tag{70.10}$$

où n' est l'indice de réfraction de la couche de transition.

3. En posant que l'ellipticité ρ est positive, trouver une valeur de n' telle que ρ soit maximal pour n et l donnés. Trouver la plus petite valeur de l pour que pour n donné ρ ait une valeur donnée.

Réponse.

$$n' = \sqrt{n}, \quad l_{\min} = \frac{\rho}{\pi \sqrt{n^2 + 1}}\, \frac{n + 1}{n - 1}\, \lambda. \tag{70.11}$$

4. Un milieu isotrope est constitué de molécules anisotropes. L'isotropie macroscopique du milieu tient aux variations désordonnées des axes des molécules, résultant de l'agitation thermique. En général, le moment dipolaire d'une molécule anisotrope, excité par le champ de l'onde lumineuse, a une direction différente de celle du champ électrique. Posons que le vecteur électrique de l'onde incidente est contenu dans le plan d'incidence et que l'onde incidente tombe sous incidence brewstérienne. Quoique le vecteur électrique du milieu soit perpendiculaire au rayon réfracté, les moments dipolaires des molécules ont des composantes non nulles le long du rayon. Ces molécules sont donc sus-

ceptibles de rayonner dans la direction du rayon réfléchi. Dans ces conditions la loi de Brewster sera-t-elle vérifiée? (cf. § 69, pt. 1).

S o l u t i o n. La loi de Brewster est encore valable. Pour un milieu macroscopiquement isotrope, les composantes des moments dipolaires des molécules, qui sont parallèles au rayon réfracté, varient chaotiquement dans le temps. De ce fait les ondes envoyées par les différentes molécules suivant cette direction sont incohérentes, ne peuvent donner lieu à une réflexion régulière et seront donc diffusées. Dans le cas où les molécules d'une couche superficielle mince seraient orientées dans une certaine direction privilégiée, les ondes qu'elles émettent seront partiellement cohérentes et une lumière réfléchie se manifeste (cf. § 69).

OPTIQUE DES MÉTAUX

§ 71. Equations de Maxwell et propagation des ondes dans les métaux

1. Tout comme dans les diélectriques, la propagation des ondes électromagnétiques dans les métaux est décrite par les équations de Maxwell

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} &= \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{D}} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{B}}, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{D} &= 4\pi\rho, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{B} &= 0. \end{aligned} \tag{71.1}$$

La différence avec les diélectriques est marquée par l'existence d'un terme contenant le courant de conduction $\boldsymbol{j}$. Dans les champs statiques et de basse fréquence, ce courant est déterminé par le mouvement des *électrons libres* seulement. Dans cette région du spectre, ni le mouvement des électrons liés ni celui des noyaux atomiques ne jouent aucun rôle. Dans le domaine de l'infrarouge, où se situent les fréquences propres des noyaux atomiques, le mouvement de ceux-ci commence à exercer une influence notable sur les propriétés optiques des métaux (résonance). Aux fréquences supérieures, dans les régions de radiations visibles et ultraviolettes, les *électrons liés* participent aux vibrations.

Les déplacements des charges liées provoquent la *polarisation des métaux*, qui est analogue à la polarisation des diélectriques, et déterminent l'apparition d'un *courant de polarisation*. Cependant, dans les champs haute fréquence, il n'y a pas de différence essentielle entre les mouvements des particules libres et des particules liées. Il serait peu correct de dire que le courant de conduction résulte du mouvement des seuls électrons libres et le courant de polarisation du mouvement des électrons liés. On donnera de ces notions des définitions précises, adaptées à leur signification théorique.

On pourrait procéder de la façon suivante. On décompose les vibrations forcées d'une particule chargée (électron ou noyau atomique), excitées par le champ de l'onde lumineuse, en une vibration en phase (ou en opposition de phase) avec le champ électrique, et

une vibration déphasée de 90° par rapport au champ électrique. Nous appellerons *courant de conduction* le courant dû aux vibrations en phase (ou en opposition de phase) et nous le dénoterons par $\boldsymbol{j}$. Les courants de conduction déterminent l'absorption des ondes électromagnétiques. Les courants résultant des vibrations déphasées de 90° seront appelés *courants de polarisation*. Ces courants ne provoquent pas d'absorption. La densité du courant de polarisation peut être exprimée par $\boldsymbol{j}_{pol} = \dot{\boldsymbol{P}}$, où $\boldsymbol{P}$ est le vecteur polarisation. Cette relation peut être considérée comme la définition du vecteur $\boldsymbol{P}$. Ainsi se trouve précisée la signification exacte du vecteur induction $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi \boldsymbol{P}$ qui figure dans les équations (71.1).

Nous ne tiendrons pas compte des propriétés magnétiques des substances, vu que ces propriétés ne sont pas essentielles dans la région optique du spectre. Nous admettrons que les métaux sont *optiquement isotropes*, quoiqu'ils soient tous cristallins (à l'exclusion des métaux liquides). Les cristaux de symétrie cubique sont effectivement optiquement isotropes, tandis que les autres métaux sont, en général, *macroscopiquement isotropes*, étant composés d'une multitude de petits cristaux orientés au hasard, les dimensions de ces cristaux étant petites devant la longueur d'onde. Pour les métaux isotropes, les équations matérielles (relations complémentaires dépendant des propriétés du milieu) sont

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon' \boldsymbol{E}, \qquad (71.2)$$

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}. \qquad (71.3)$$

La grandeur σ est la *conductivité électrique* du métal et la grandeur ε' est sa *permittivité diélectrique*. (Nous utiliserons la notation ε', réservant la notation ε pour la grandeur complexe que l'on introduira plus loin.) Comme les grandeurs ε' et σ dépendent de la fréquence ω, on doit poser que le champ $\boldsymbol{E}$ figurant dans (71.2) et (71.3) est monochromatique. Les champs qui ne sont pas monochromatiques doivent être décomposés en composantes monochromatiques auxquelles on appliquera le principe de superposition.

L'existence de la conductivité σ détermine l'*absorption de la lumière* par les métaux. Du point de vue de la théorie formelle dont il est question ici, l'absorption de la lumière est la transformation de l'énergie électromagnétique en *chaleur par effet Joule*.

Les équations matérielles (71.2) et (71.3) ne fournissent qu'une description grossière des propriétés optiques des métaux (cf. § 74). Dans certains cas, notamment pour les ondes courtes (radiations ultraviolettes, visibles et infrarouges), ces équations conduisent à des résultats qui ne sont pas tout à fait conformes à l'expérience. Pour que la théorie soit en meilleur accord avec l'expérience, il faut qu'elle se fonde sur la *théorie quantique des métaux*. Mais l'exposé de cette théorie dépasse le cadre d'un cours de Physique Générale.

2. Pour les champs monochromatiques $\dot{D} = i\omega D = i\omega\varepsilon' E$, de sorte que le second membre de (71.1) devient $\frac{1}{c}(i\omega\varepsilon' + 4\pi\sigma)E$. Si on introduit la grandeur

$$\varepsilon = \varepsilon' - i\frac{4\pi\sigma}{\omega} \equiv \varepsilon' - i\varepsilon'', \tag{71.4}$$

appelée *permitivité diélectrique complexe*, le système des équations de Maxwell (71.1) s'écrira

$$\text{rot}\, H = \frac{i\omega}{c}\varepsilon E, \quad \text{rot}\, E = -\frac{i\omega}{c} H \tag{71.5}$$

et coïncidera formellement avec les équations correspondantes pour les diélectriques. Les conditions aux limites ont également une forme analogue : elles imposent que les composantes tangentielles des vecteurs E et H soient continues à la surface de séparation de deux milieux. Il découle de ces conditions aux limites et des équations (71.5) que les composantes normales du vecteur εE sont également continues (cf. § 63). Par conséquent, *toutes les relations de l'optique des milieux transparents, déduites des équations* (71.5) *et des conditions aux limites à l'aide d'opérations linéaires réelles, peuvent être formellement transposées en optique des métaux et des autres milieux absorbants, en remplaçant la grandeur réelle* ε *par la grandeur complexe correspondante*. Il ne reste donc qu'à préciser la signification et le contenu physique des relations ainsi obtenues.

Pour caractériser les propriétés optiques des métaux, on utilise l'*indice de réfraction complexe* ν défini par

$$\nu^2 = \varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon''. \tag{71.6}$$

En posant

$$\nu = n - i\varkappa, \tag{71.7}$$

où n et $\varkappa$ sont des grandeurs réelles et essentiellement positives, on obtient

$$n^2 - \varkappa^2 = \varepsilon', \quad 2n\varkappa = \varepsilon''. \tag{71.8}$$

La grandeur n est appelée *indice de réfraction principal* et la grandeur $\varkappa$ est l'*indice d'extinction principal* du métal. On doit donner la préférence au terme indice d'extinction devant le terme plus usité d'indice d'absorption, puisque *l'affaiblissement de l'onde peut se produire sans absorption*. Un exemple en est fourni par le plasma, lorsque la fréquence ω est inférieure à la fréquence dite *de plasma* (cf. § 87). Pour le plasma la grandeur ε est réelle mais *négative*, i.e. $\varepsilon'' = 0$. Il n'y a donc pas d'absorption, mais l'affaiblissement se produit, car $\sqrt{\varepsilon}$ est une quantité purement imaginaire, et par suite $\varkappa \neq 0$.

Si le milieu est homogène, il peut être parcouru par des ondes monochromatiques planes de la forme (5.3). Ces ondes doivent vérifier les relations suivantes:

$$E = -\frac{c}{\omega\varepsilon}[kB], \quad B = \frac{c}{\omega}[kE], \tag{71.9}$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon = \frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon' - i\varepsilon''). \tag{71.10}$$

Dans les milieux absorbants le vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$ est toujours complexe et l'onde plane correspondante est *toujours évanescente*. Ce résultat est évident, puisqu'une onde plane ne peut se propager dans un milieu absorbant sans subir d'affaiblissement. Posons

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}' - i\boldsymbol{k}'', \tag{71.11}$$

où $\boldsymbol{k}'$ et $\boldsymbol{k}''$ sont des vecteurs réels. D'après (71.10)

$$k'^2 - k''^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon', \quad 2(\boldsymbol{k}'\boldsymbol{k}'') = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon''. \tag{71.12}$$

Le vecteur $\boldsymbol{k}'$ indique la direction de propagation des *plans d'égales phases*. L'amplitude de l'onde décroît suivant la direction du vecteur $\boldsymbol{k}''$. Dans le cas général, *les plans d'égales phases et les plans d'égales amplitudes ne sont pas rectangulaires*. L'orthogonalité de ces plans ne se manifeste que pour les milieux non absorbants pour lesquels $\varepsilon'' = 0$.

§ 72. Lois géométriques de la réflexion et de la réfraction de la lumière à la surface d'un métal

1. Du vide, faisons tomber sur un métal une onde monochromatique plane se propageant suivant la direction du vecteur d'onde $\boldsymbol{k}_1$ (fig. 255). Il apparaît une onde réfléchie homogène de vecteur d'onde $\boldsymbol{k}'_1$ et une onde inhomogène transmise dans le métal. Notons $\boldsymbol{k}$ (sans indice) le vecteur d'onde complexe de l'onde transmise. Nous avons déjà montré que les conditions aux limites imposent que

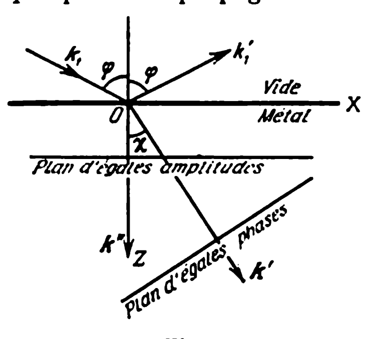


Fig. 255

$$k_{1x} = k'_{1x} = k_x. \tag{72.1}$$

Ces égalités impliquent que les lois géométriques de la réflexion de la lumière par les métaux doivent être les mêmes que pour les milieux non absorbants. On n'observe une différence entre ces deux types de milieux que dans les lois de la réfraction de la lumière.

Notons tout d'abord que les plans d'égales amplitudes de l'onde transmise sont parallèles à la surface du métal. Si on représente le vecteur complexe $\boldsymbol{k}$ sous la forme (71.11), il résulte de (72.1) que la composante tangentielle de $\boldsymbol{k}$ est réelle, et de ce fait le vecteur $\boldsymbol{k}''$ est perpendiculaire à la surface du métal. Comme l'onde transmise s'affaiblit suivant la direction du vecteur $\boldsymbol{k}''$, celui-ci doit être orienté vers le bas, i.e. vers le métal, puisque c'est le sens d'affaiblissement de l'onde transmise. Le vecteur $\boldsymbol{k}'$ doit être orienté aussi vers le métal, puisque l'angle que font les vecteurs $\boldsymbol{k}'$ et $\boldsymbol{k}''$ est aigu, conformément à la deuxième relation (71.12).

Le vecteur $\boldsymbol{k}'$ est perpendiculaire au plan d'égales phases de l'onde transmise. L'angle χ que fait ce vecteur avec la direction positive de l'axe Z est appelé *angle de réfraction réel*. La valeur du rapport

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\chi}=n_\varphi \tag{72.2}$$

dépend, dans le cas général, de l'angle d'incidence φ. Ce rapport est positif et s'appelle *indice de réfraction*. Comme $k_x = k'_x = k' \sin\chi$, il résulte de (72.1) que

$$k'=k_1\frac{\sin\varphi}{\sin\chi}=\frac{\omega}{c}n_\varphi. \tag{72.3}$$

Par analogie avec (72.3), on peut introduire une autre quantité positive $\varkappa_\varphi$ définie par la relation

$$k''=\frac{\omega}{c}\varkappa_\varphi. \tag{72.4}$$

On l'appelle *indice d'extinction*. Sa signification physique apparaît dès qu'on examine l'expression du champ de l'onde transmise. On constate alors qu'à la profondeur

$$z=h_\varphi=\frac{\lambda_0}{4\pi\varkappa_\varphi} \tag{72.5}$$

(λ_0 est la longueur d'onde dans le vide), l'intensité lumineuse (qui est proportionnelle au carré de l'amplitude) diminue de e fois. La quantité h_φ est la *profondeur de pénétration de la lumière dans le métal*. Par conséquent, *on peut définir l'indice d'extinction $\varkappa_\varphi$ comme le rapport entre la longueur d'onde de la lumière dans le vide et la profondeur de pénétration de la lumière dans le métal multipliée par* 4π.

Dans la région visible du spectre, l'indice d'extinction des métaux est généralement de l'ordre de l'unité. Par exemple, pour l'or sous incidence normale, $\varkappa_\varphi = 2{,}82$, $h_\varphi = \lambda_0/4\pi\varkappa_\varphi = \lambda_0/35{,}4$. On en déduit que sur une profondeur égale à la longueur d'onde l'intensité de la lumière diminue dans l'or de $\exp(\lambda_0/h_\varphi) \approx 2{,}4\cdot10^{15}$ fois.

Les pellicules métalliques d'une épaisseur comparable à la longueur d'onde sont, en général, opaques à la lumière. On n'obtient des données relatives aux propriétés optiques des métaux que par

étude de la *lumière réfléchie*; on doit cependant faire l'étude des lois de la pénétration de la lumière dans les métaux pour bien comprendre les lois de la réflexion. La lumière réfléchie par un métal (tout comme par un diélectrique) résulte des interférences d'ondes secondaires cohérentes émises par les électrons et les noyaux atomiques du métal. Il est évident que ces ondes secondaires sont excitées par l'onde incidente qui aura pénétré dans le métal. Si le champ ne pénétrait absolument pas dans le métal, la réflexion de la lumière n'aurait pas lieu.

2. Exprimons maintenant n_φ et $\varkappa_\varphi$ en fonction des constantes optiques de métal n, $\varkappa$ et de l'angle d'incidence φ. En portant (72.3) et (72.4) dans (71.12), on obtient

$$n_\varphi^2 - \varkappa_\varphi^2 = \varepsilon', \quad 2n_\varphi\varkappa_\varphi \cos\chi = \varepsilon''. \tag{72.6}$$

En identifiant avec (71.8) on trouve

$$n_\varphi^2 - \varkappa_\varphi^2 = n^2 - \varkappa^2, \quad n_\varphi\varkappa_\varphi \cos\chi = n\varkappa. \tag{72.7}$$

Ketteler (1839-1900), qui établit ces formules, les appela *équations principales de la propagation des ondes lumineuses dans les métaux et dans les milieux absorbants*. Ces formules montrent que les quantités

$$a \equiv n_\varphi^2 - \varkappa_\varphi^2, \qquad b \equiv 2n_\varphi\,\varkappa_\varphi \cos\chi \tag{72.8}$$

sont indépendantes de l'angle d'incidence φ, n'étant déterminées que par la nature du métal, par son état physique et par la longueur d'onde. Les quantités a et b, appelées *invariants de Ketteler*, peuvent servir à caractériser les propriétés optiques du métal à la place de n et de $\varkappa$.

Pour $\varphi = 0$, on a $\chi = 0$, et les équations (72.7) fournissent $n_\varphi = \pm n$, $\varkappa_\varphi = \pm\varkappa$. On prendra ici le signe plus, puisque par définition les quantités n_φ et $\varkappa_\varphi$ sont essentiellement positives. Ainsi, pour l'incidence normale, les indices de réfraction et d'extinction n_φ et $\varkappa_\varphi$ ont pour valeurs principales n et $\varkappa$.

Pour trouver n_φ et $\varkappa_\varphi$ en fonction de l'angle d'incidence φ, récrivons la deuxième équation (72.7) sous la forme

$$n_\varphi^2\varkappa_\varphi^2 \cos^2\chi = n_\varphi^2\varkappa_\varphi^2 (1 - \sin^2\chi) = n_\varphi^2\varkappa_\varphi^2 - \varkappa_\varphi^2 \sin^2\varphi = \frac{1}{4} b^2.$$

En résolvant cette équation avec la première équation (72.7), on obtient

$$\begin{aligned} n_\varphi^2 &= \frac{1}{2}\left[\pm\sqrt{(a-\sin^2\varphi)^2+b^2} + (a+\sin^2\varphi)\right],\\ \varkappa_\varphi^2 &= \frac{1}{2}\left[\pm\sqrt{(a-\sin^2\varphi)^2+b^2} - (a-\sin^2\varphi)\right]. \end{aligned} \tag{72.9}$$

Les signes devant les radicaux doivent être les mêmes dans les deux formules, afin que la différence $n_\varphi^2 - \varkappa_\varphi^2$ soit égale à a. D'autre part, n_φ et $\varkappa_\varphi$ doivent être des fonctions continues de l'angle φ. Pour les

milieux réellement absorbants, l'invariant b n'est pas égal à zéro, conformément à la relation $b = 2n\varkappa = \varepsilon''$. De ce fait, la racine carrée figurant dans les formules (72.9) ne peut ni s'annuler ni changer de signe lors de la variation de l'angle φ. Mais lorsque $\varphi = 0$, les quantités n_φ^2 et $\varkappa_\varphi^2$ peuvent être essentiellement positives si et seulement si les deux radicaux sont pris dans (72.9) avec le signe plus. Il s'ensuit que le signe plus doit être conservé pour toutes les valeurs de l'angle φ. Pour les milieux réellement absorbants on a donc

$$n_\varphi^2 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{(a-\sin^2\varphi)^2+b^2}+(a+\sin^2\varphi)\right],$$
$$\varkappa_\varphi^2 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{(a-\sin^2\varphi)^2+b^2}-(a-\sin^2\varphi)\right]. \qquad (72.10)$$

Pour $\varphi = 0$ on a

$$n^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right), \quad \varkappa^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right). \qquad (72.11)$$

On ne doit envisager d'autres déterminations des signes que si $b \equiv 2n\varkappa = 0$, i.e. pour $n = 0$, $\varkappa \neq 0$ ou pour $n \neq 0$, $\varkappa = 0$. Dans les deux cas, la permittivité diélectrique est réelle, i.e. le milieu n'est pas absorbant. Les grandeurs n_φ et $\varkappa_\varphi$ gardent leur signification même dans ces cas. Par exemple, la théorie de la réflexion totale à la surface de séparation de deux milieux transparents (cf. § 66) peut être envisagée comme un cas particulier de la théorie qui vient d'être exposée.

§ 73. Les formules de Fresnel. Mesure des constantes optiques des métaux

1. Les formules de Fresnel (65.7) ou (65.8) sont applicables aux métaux, à condition d'entendre par $\sin\psi$ et $\cos\psi$ les quantités complexes

$$\sin\psi = \frac{\sin\varphi}{\nu}, \quad \cos\psi = \frac{1}{\nu}\sqrt{\nu^2-\sin^2\varphi}. \qquad (73.1)$$

On doit garder la valeur de la racine carrée qui possède une partie imaginaire négative, afin que l'onde évanescente qui pénètre dans le milieu absorbant s'affaiblisse en s'éloignant de la surface de séparation des milieux.

Pour une incidence normale

$$\frac{R_\perp}{\mathscr{E}_\perp} = -\frac{R_\parallel}{\mathscr{E}_\parallel} = -\frac{\nu-1}{\nu+1} = -\frac{(n-1)-i\varkappa}{(n+1)+i\varkappa}. \qquad (73.2)$$

Le pouvoir réflecteur du métal est

$$R = \left|\frac{R_\perp}{\mathscr{E}_\perp}\right|^2 = \frac{(n-1)^2+\varkappa^2}{(n+1)^2+\varkappa^2}. \qquad (73.3)$$

2. Dans le cas d'une réflexion métallique, les rapports $R_\perp/\mathscr{E}_\perp$ et $R_\parallel/\mathscr{E}_\parallel$ sont, en général, complexes, ce qui signifie qu'il apparaît des *différences de phase* qui sont, en règle générale, *inégales* pour les composantes $\boldsymbol{E}_\parallel$ et $\boldsymbol{E}_\perp$. *Si la lumière incidente est polarisée rectilignement, sous un certain angle par rapport au plan d'incidence, la lumière réfléchie sera polarisée elliptiquement.* Par étude de la polarisation elliptique de la lumière réfléchie, on arrive à déterminer les constantes optiques n et $\varkappa$ d'un métal. C'est la base de la *méthode de Drude* exposée ci-après.

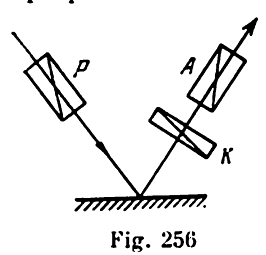


Fig. 256

On fait passer un rayon lumineux à travers un polariseur P, afin de le polariser rectilignement (fig. 256). Posons, pour simplifier, que l'azimut de la polarisation est égal à 45° ($\mathscr{E}_\perp = \mathscr{E}_\parallel$); la généralisation des résultats pour un azimut quelconque ne présente aucune difficulté. On fait passer le rayon réfléchi à travers le compensateur K, puis à travers l'analyseur A. En modifiant la position du compensateur et en faisant tourner l'analyseur autour de la direction du rayon réfléchi, on arrive à provoquer l'extinction de celui-ci. Après passage à travers le compensateur, la lumière présente alors une polarisation rectiligne. L'azimut de cette polarisation est appelé *azimut de polarisation rectiligne rétablie* de la lumière réfléchie. A l'aide du compensateur K on peut mesurer la différence de phase Δ entre $\boldsymbol{E}_\parallel$ et $\boldsymbol{E}_\perp$ de l'onde réfléchie et à l'aide de l'analyseur A on mesure l'azimut β de la polarisation rectiligne rétablie. Disposant de ces données, on calcule les constantes optiques n et $\varkappa$ du métal.

Pour $\mathscr{E}_\perp = \mathscr{E}_\parallel$, les formules de Fresnel (65.8) donnent

$$\frac{R_\parallel}{R_\perp} = -\frac{\cos(\varphi+\psi)}{\cos(\varphi-\psi)}.$$

Il est évident que

$$\frac{R_\parallel}{R_\perp} = re^{i\Delta}, \quad r = \operatorname{tg}\beta.$$

D'où

$$\frac{1-re^{i\Delta}}{1+re^{i\Delta}} = \frac{\cos\varphi\cos\psi}{\sin\varphi\sin\psi} = \frac{\sqrt{\nu^2-\sin^2\varphi}}{\operatorname{tg}\varphi\sin\varphi}.$$

D'autre part,

$$\nu^2 - \sin^2\varphi = (n - i\varkappa)^2 - \sin^2\varphi = n^2 - \varkappa^2 - 2in\varkappa - \sin^2\varphi.$$

Selon (72.7) et (72.2)

$$\nu^2 - \sin^2\varphi = n_\varphi^2 - \varkappa_\varphi^2 - 2in_\varphi\varkappa_\varphi\cos\chi - n_\varphi^2\sin^2\chi = (n_\varphi\cos\chi - i\varkappa_\varphi)^2,$$

de sorte que

$$\nu \cos \psi = \sqrt{\nu^2 - \sin^2 \varphi} = n_\varphi \cos \chi - i\varkappa_\varphi, \tag{73.4}$$

$$\frac{1 - re^{i\Delta}}{1 + re^{i\Delta}} = \frac{n_\varphi \cos \chi - i\varkappa_\varphi}{\operatorname{tg} \varphi \sin \varphi}.$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur du premier membre par $1 + re^{-i\Delta}$, on obtient

$$\frac{1 - r^2 - 2ir \sin \Delta}{1 + r^2 + 2r \cos \Delta} = \frac{n_\varphi \cos \chi - i\varkappa_\varphi}{\operatorname{tg} \varphi \sin \varphi};$$

en séparant les parties réelle et imaginaire et en remarquant que $r = \operatorname{tg} \beta$, on trouve

$$n_\varphi \cos \chi = \operatorname{tg} \varphi \sin \varphi \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta + 2 \operatorname{tg} \beta \cos \Delta},$$

$$\varkappa_\varphi = 2 \operatorname{tg} \varphi \sin \varphi \frac{\operatorname{tg} \beta \sin \Delta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta + 2 \operatorname{tg} \beta \cos \Delta}$$

ou

$$\begin{aligned} n_\varphi \cos \chi &= \operatorname{tg} \varphi \sin \varphi \frac{\cos 2\beta}{1 + \sin 2\beta \cos \Delta}, \\ \varkappa_\varphi &= \operatorname{tg} \varphi \sin \varphi \frac{\sin 2\beta \sin \Delta}{1 + \sin 2\beta \cos \Delta}. \end{aligned} \tag{73.5}$$

Ces formules permettent de calculer $n_\varphi \cos \chi$ et $\varkappa_\varphi$, après quoi on calcule les invariants de Ketteler par les formules

$$\begin{aligned} a &= n_\varphi^2 - \varkappa_\varphi^2 = n_\varphi^2 \cos^2 \chi + \sin^2 \varphi - \varkappa_\varphi^2, \\ b &= n_\varphi \varkappa_\varphi \cos \chi. \end{aligned} \tag{73.6}$$

Enfin, connaissant les invariants de Ketteler, on trouve à l'aide des formules (72.11) les indices principaux de réfraction n et d'extinction $\varkappa$.

Pour faciliter les calculs on effectue les mesures sous un angle d'incidence $\bar{\varphi}$ tel que $\Delta = \pi/2$. Cet angle est appelé *angle d'incidence principal* (ou *incidence principale*) et l'azimut correspondant $\bar{\beta}$ est dit *azimut principal.* Pour $\varphi = \bar{\varphi}$ les formules (73.5) s'écrivent

$$n_{\bar{\varphi}} \cos \bar{\chi} = \operatorname{tg} \bar{\varphi} \sin \bar{\varphi} \cos 2\bar{\beta}, \quad \varkappa_{\bar{\varphi}} = \operatorname{tg} \bar{\varphi} \sin \bar{\varphi} \sin 2\bar{\beta}. \tag{73.7}$$

La principale difficulté à laquelle on se heurte lors des mesures de n et de $\varkappa$ réside dans la préparation des surfaces métalliques. Les traitements des surfaces métalliques y produisent des *couches de transition* dont les propriétés dépendent des procédés de prépara-

tion de la surface. Si l'épaisseur de ces couches est du même ordre de grandeur que la profondeur de pénétration de la lumière dans le métal, les mesures fourniront des données relatives non pas au métal lui-même, mais à sa couche superficielle. Pour fixer les idées, on a rassemblé dans le tableau 7 les valeurs de n et de $\varkappa$ de plusieurs métaux, déterminées par la méthode de Drude (λ = 589,3 nm). Le pouvoir réflecteur R a été calculé par la formule (73.3).

Tableau 7

Métal	$\varkappa$	n	R, %
Sodium	2,61	0,05	97,5
Argent, massif	3,64	0,18	95,1
Magnésium, massif	4,42	0,37	93,1
Or, massif	2,82	0,37	84,9
Or, électrolytique	2,83	0,47	81,5
Mercure	4,41	1,62	75,4
Cuivre, massif	2,62	0,64	73,2
Nickel, massif	3,32	1,79	62,0
Nickel, électrolytique	3,48	2,01	62,0
Nickel, dispersé par électrolyse	1,97	1,30	43,3
Fer, dispersé par électrolyse	1,63	1,51	32,6

3. Ecrivons la formule (73.3) sous la forme

$$R=\frac{(n^2+\varkappa^2+1)-2n}{(n^2+\varkappa^2+1)+2n}. \tag{73.8}$$

Les données du tableau 7 montrent que pour presque tous les métaux $2n$ est petit devant $n^2+\varkappa^2+1$, et de ce fait le pouvoir réflecteur des métaux est *très grand*, proche de l'unité pour de nombreux métaux. L'« éclat métallique » propre aux métaux résulte de leur grand pouvoir réflecteur. Comme n et $\varkappa$ varient avec la longueur d'onde, certains métaux, plus particulièrement le cuivre et l'or, sont intensément colorés. Le métal nous paraît rouge s'il réfléchit le plus intensément les radiations rouges. On peut dire ainsi que la coloration superficielle du métal est complémentaire de celle de la lumière transmise à travers les pellicules métalliques minces. Par exemple, les pellicules d'or paraissent vertes en lumière transmise.

Le pouvoir réflecteur des corps faiblement absorbants est déterminé presque exclusivement par l'indice de réfraction principal n et ne dépend pratiquement pas de $\varkappa$. C'est le cas des substances colorantes. Dans ce cas la coloration superficielle des corps est déterminée non pas par une réflexion sélective, mais par une *absorption sélective* dans une couche de substance colorante. La coloration des

corps paraît être la même en lumière réfléchie et en lumière transmise. Les couches de peinture laquées ne comportent pas d'hétérogénéités qui les rendraient troubles. A travers ces couches on discerne les détails du corps sous-jacent. La lumière envoyée par une source tombe sur la surface du corps peint et s'y trouve diffusée. La lumière qui tombe dans l'œil de l'observateur traverse deux fois la couche de peinture absorbante et y subit une absorption sélective. La lumière réfléchie par la surface antérieure de la couche peut présenter une teinte blanchâtre. Si la surface de la couche de peinture laquée est lisse, cette teinte blanchâtre n'existe pratiquement que dans la région de la réflexion spéculaire. Les peintures à la colle sont intentionnellement rendues troubles en y introduisant des hétérogénéités. La lumière qui tombe sur une couche de peinture à la colle est diffusée par ces hétérogénéités et ne parvient pas jusqu'à la surface du corps sous-jacent. Une proportion importante de la lumière est diffusée par la couche supérieure de peinture sans subir d'absorption sélective. C'est ce qui détermine l'apparition d'une teinte blanchâtre.

La différence entre les colorations superficielles des milieux fortement et faiblement absorbants est illustrée par l'exemple suivant. Recouvrons la surface d'une lame de verre transparente d'une couche d'encre violette. Tant que l'encre n'est pas séchée, elle est un « milieu faiblement absorbant » et paraît violette aussi bien en lumière réfléchie qu'en lumière transmise : la coloration est déterminée par l'absorption sélective de la lumière qui traverse la couche d'encre et s'y trouve diffusée. Lorsque l'encre devient sèche, elle devient un « milieu fortement absorbant » ; par transmission elle est toujours violette grâce à l'absorption sélective de la lumière, mais par réflexion la couche prend un éclat métallique jaune-vert, couleur complémentaire de celle de la lumière transmise résultant d'une réflexion sélective.

La dépendance des propriétés optiques de nombreux métaux avec la longueur d'onde est fort importante. Ainsi l'argent, qui présente dans le spectre visible un grand coefficient de réflexion (95 % environ), a dans l'ultraviolet une bande de faible réflexion et de grande transparence ; pour $\lambda = 316$ nm, le pouvoir réflecteur de l'argent tombe à 4,2 %, valeur comparable à celle du verre. Wood montra que les pellicules minces des métaux alcalins sont transparentes dans l'ultraviolet, mais absolument opaques pour les radiations visibles. Il réussit même à déterminer l'angle de Brewster de la réflexion des rayons ultraviolets sur ces métaux.

Nombreux sont les corps absorbants qui présentent un maximum aigu du pouvoir réflecteur dans une région spectrale étroite. Si on fait subir de nombreuses réflexions successives sur ces corps, on peut isoler des rayons hautement monochromatiques que l'on appelle

rayons restants. Rubens (1865-1922) et ses collaborateurs appliquèrent ce procédé pour séparer des radiations infrarouges.

4. Examinons encore la question du pouvoir réflecteur des métaux pour les ondes longues (ondes radio, rayons infrarouges). Dans cette gamme de fréquences la conductivité σ ne dépend pratiquement pas de la fréquence ω et est égale à sa valeur statique σ_0. Selon la formule (71.4), la partie imaginaire ε'' de la permittivité diélectrique croît lorsque la fréquence diminue. Dans les domaines des ondes longues on peut négliger la partie réelle ε' en posant

$$\varepsilon(\omega) = -i\,\frac{4\pi\sigma_0}{\omega}. \qquad (73.9)$$

Les relations (71.8) fournissent alors

$$n = \varkappa = \sqrt{\frac{\varepsilon''}{2}} = \sqrt{\frac{2\pi\sigma_0}{\omega}} = \sqrt{\sigma_0 T} = \sqrt{\frac{\lambda\sigma_0}{c}}, \qquad (73.10)$$

où T est la période des vibrations et λ la longueur d'onde dans le vide.

Les relations (73.10) ont été établies par Drude. Elles ne sont pas valables pour le spectre visible. Ainsi, pour le cuivre, $\sigma_0 = 5{,}14\cdot10^{17}\ \mathrm{s}^{-1}$; en posant $\lambda = 589{,}3\ \mathrm{nm} = 5{,}893\cdot10^{-5}$ cm, l'application des formules (73.10) donne $n = \varkappa \approx 33$, tandis que les mesures donnent $n = 0{,}64$ et $\varkappa = 2{,}62$. On ne doit utiliser (73.10) que pour les ondes longues. Dans ce cas la formule (73.8) s'écrit

$$R = \frac{2n^2 - 2n + 1}{2n^2 + 2n + 1} \approx 1 - \frac{2}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + \ldots\right)$$

ou

$$R = 1 - \frac{2}{\sqrt{\sigma_0 T}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\sigma_0 T}} + \ldots\right). \qquad (73.11)$$

Cette formule fut vérifiée expérimentalement par Rubens et Hagen pour les rayons infrarouges ($\lambda = 4$; 8; 12; 25,5 µm). Ils constatèrent que pour $\lambda > 5$ µm, la formule (73.11) commence à être vérifiée quantitativement. Pour les ondes radio la quantité $1/\sqrt{\sigma_0 T}$ est très voisine de zéro et le pouvoir réflecteur est voisin de l'unité, ce qui signifie que les métaux réfléchissent presque totalement les ondes radio.

PROBLÈME

Dans quelles conditions peut-on s'attendre à une réflexion totale de la lumière par un milieu?

S o l u t i o n. Si la lumière est polarisée dans une direction perpendiculaire au plan d'incidence, la condition de réflexion totale sera

$$\left|\frac{R_\perp}{\mathscr{E}_\perp}\right|^2 = \frac{\cos\varphi - \nu\cos\psi}{\cos\varphi + \nu\cos\psi}\cdot\frac{\cos\varphi - \nu^*\cos^*\psi}{\cos\varphi + \nu^*\cos^*\psi} = 1,$$

ou $\cos\varphi\,(\nu\cos\varphi + \nu^*\cos^*\psi) = 0$. A l'aide de (73.4) on peut exprimer cette condition par

$$n_\varphi \cos\varphi \cos\chi = 0. \tag{73.12}$$

On retrouve la même condition pour une lumière polarisée dans le plan d'incidence. La réflexion totale peut avoir lieu dans l'un des trois cas suivants : 1) $\cos\varphi = 0$; 2) $n_\varphi = 0$; 3) $\cos\chi = 0$. Le premier cas correspond à une incidence rasante ; dans le second cas $n_\varphi = 0$, et en vertu de (72.7) $n\varkappa = 0$. Dans le troisième cas $\cos\chi = 0$ et par suite $n\varkappa = 0$. Par conséquent, lorsque $\varphi \neq \pi/2$, la réflexion totale se produit si $n\varkappa = 0$. Cette condition se réalise dans deux cas : 1) $n = 0$, $\varkappa \neq 0$; 2) $n \neq 0$, $\varkappa = 0$.

C a s 1. $n = 0$, $\varkappa \neq 0$. La réflexion sera totale pour n'importe quelle incidence. Dans ce cas $\nu = n - i\varkappa = -i\varkappa$, et les formules de Fresnel s'écrivent

$$\frac{R_\perp}{\mathscr{E}_\perp} = \frac{\cos\varphi + i\varkappa\cos\psi}{\cos\varphi - i\varkappa\cos\psi}, \quad \frac{R_\parallel}{\mathscr{E}_\parallel} = -\frac{i\varkappa\cos\varphi + \cos\psi}{-i\varkappa\cos\varphi + \cos\psi}.$$

Comme

$$\cos\psi = \sqrt{1-\sin^2\psi} = \sqrt{1-\frac{\sin^2\varphi}{\nu^2}} = \sqrt{1+\left(\frac{\sin\varphi}{\varkappa}\right)^2},$$

$\cos\psi$ est une quantité réelle. Dans les dénominateurs des formules de Fresnel figurent des quantités complexes conjuguées de celles figurant dans les numérateurs. Il en résulte que $|R_\perp/\mathscr{E}_\perp|^2 = |R_\parallel/\mathscr{E}_\parallel|^2 = 1$. Dans le cas considéré $\varepsilon = \nu^2 = -\varkappa^2 < 0$, ce qui signifie que le milieu n'est pas absorbant et présente une permittivité diélectrique négative. Ce cas se réalise dans la réflexion des ondes radio sur le plasma (cf. § 87).

C a s 2. $n \neq 0$, $\varkappa = 0$. On a $\nu = n$, $\varepsilon = n^2 > 0$, ce qui signifie que le milieu est transparent. La réflexion totale se produit pour $n < 1$, à condition que φ soit supérieur à l'angle limite $\varphi_0 = \arcsin n$ (cf. § 66).

§ 74. Effet de peau anomal et permittivité diélectrique efficace

1. La pénétration d'une onde électromagnétique dans une mince couche superficielle d'un métal est un cas particulier de l'*effet de peau* que nous avons étudié dans le t. III, § 144. La couche où pénètre le champ électromagnétique est appelée *épaisseur de peau*. Cette épaisseur est donnée par la formule (72.5) qui se déduit des équations macroscopiques de Maxwell (71.5). Il résulte de ces mêmes équations que l'intensité de champ diminue dans l'épaisseur de peau de façon *exponentielle* ; on dit alors que l'on a affaire à une épaisseur de peau *normale*.

Les équations macroscopiques de Maxwell ne sont utilisables que si *les distances entre les atomes sont petites devant la longueur d'onde et devant l'épaisseur de peau*. Cette condition est pratiquement vérifiée pour tous les métaux. Il est plus difficile de fixer les conditions de validité de la notion de permittivité diélectrique $\varepsilon(\omega)$ définie au § 71. Nous y avons tenu compte de ce que les électrons et les ions, dont les mouvements créent les courants de conduction et de polarisation, se meuvent dans un champ électrique variant dans le temps ;

mais nous n'avons pas tenu compte de la *variation spatiale* de ce champ. On ne peut le faire que lorsque *la longueur de libre parcours moyen des électrons est petite devant les distances sur lesquelles le champ varie notablement*, *i.e. devant la longueur d'onde et l'épaisseur de peau.* Ce n'est que dans ce cas que l'électron se meut entre deux collisions consécutives dans un champ pratiquement uniforme. Mais si la longueur de libre parcours moyen de l'électron est comparable ou supérieure à l'épaisseur de peau ou à la longueur d'onde, les conclusions du § 71 doivent être révisées, puisque la notion de permittivité diélectrique $\varepsilon(\omega)$ n'a alors plus de sens. L'intensité de champ et l'intensité de courant ne décroîtront plus suivant une loi exponentielle, mais suivant une loi plus compliquée. L'effet de peau correspondant est dit *anomal.*

En utilisant les valeurs de $\varkappa$ consignées dans le tableau 7 on constate aisément que pour tous les métaux qui y sont mentionnés la quantité $h = \lambda/(4\pi\varkappa)$ pour la lumière visible est de l'ordre de 10^{-6} cm. A la température ordinaire, la longueur de libre parcours moyen des électrons est de même ordre de grandeur. Il s'ensuit que l'effet de peau y est anomal. Ce n'est que pour les métaux de faible conductivité, où la longueur de libre parcours est plus petite, que l'effet de peau est normal aux températures usuelles. Aux basses températures, où la longueur de libre parcours moyen atteint, dans des échantillons purs, 10^{-2} à 10^{-3} cm, il ne peut être question d'utiliser la théorie de l'effet de peau normal fondée sur la notion de permittivité diélectrique. Comme le type de l'effet de peau dépend du rapport entre la longueur de libre parcours moyen de l'électron et l'épaisseur de peau, la théorie exhaustive de l'effet de peau anomal doit se fonder sur la forme quantique de la *cinétique des électrons.*

2. Que l'effet de peau soit normal ou anomal, la réflexion de la lumière résulte de l'émission d'ondes électromagnétiques par les courants circulant dans une couche superficielle du métal, qui y sont excités par l'onde incidente. Le mécanisme de la réflexion métallique est parfaitement analogue à celui de la réflexion diélectrique décrite aux §§ 68 et 69. Si l'effet de peau est normal, la densité du courant total décroît avec la profondeur suivant une loi exponentielle, et suivant une loi différente si l'effet est anomal. Cependant, si l'épaisseur de peau est beaucoup plus petite que la longueur d'onde, la forme concrète de la loi de variation de la densité de courant avec la profondeur n'exercera qu'une faible influence sur la réflexion de la lumière, puisque les phases des sources d'ondes secondaires réparties dans la couche superficielle sont pratiquement les mêmes sur toute l'épaisseur de celle-ci. Il s'ensuit que pour calculer le champ de l'onde réfléchie, on peut remplacer la distribution réelle du courant total dans l'épaisseur de peau par une distribution où la densité de courant décroît de façon exponentielle. Cela revient à remplacer ε par une *permittivité diélectrique efficace* ε_{eff} *du métal.*

L'utilisation de ε_{eff} permet de faire le calcul du champ de l'onde réfléchie comme si l'effet de peau était normal et le métal avait une permittivité diélectrique $\varepsilon = \varepsilon_{eff}$. Néanmoins, si l'effet de peau est anomal, on ne peut utiliser ε_{eff} pour calculer le champ à l'intérieur du métal ; le terme « efficace » doit être entendu uniquement comme *efficace pour la réflexion*. La permittivité diélectrique efficace peut être utilisée aussi pour des épaisseurs de peau plus grandes, mais dans ce cas elle dépend généralement de l'état de polarisation de l'onde incidente et de l'angle d'incidence. Pour pouvoir faire le calcul théorique de ε_{eff}, on devrait résoudre le problème de la réflexion par les méthodes cinétiques et statistiques, ce qui sort du cadre de notre cours.

CHAPITRE VII

OPTIQUE DES MILIEUX CRISTALLINS

§ 75. Propagation d'une onde plane dans les cristaux

1. La majorité des cristaux sont *optiquement anisotropes*, i.e. leurs propriétés optiques varient avec la direction choisie pour les définir. Une des plus importantes manifestations de cette anisotropie est la *biréfringence*. L'étude de ce phénomène et de la polarisation qui y est liée constitue l'objet principal de ce chapitre.

Les équations fondamentales de Maxwell s'appliquent aux milieux cristallins. En l'absence de charges et de courants électriques, elles se présentent sous la forme

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{D}}, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{H}}. \tag{75.1}$$

Les équations matérielles deviennent cependant plus compliquées. On caractérise les milieux isotropes par une permittivité diélectrique scalaire $\varepsilon(\omega)$. Pour caractériser les propriétés optiques des cristaux, on doit utiliser neuf grandeurs $\varepsilon_{jh}(\omega)$ qui sont les composantes du *tenseur de permittivité diélectrique* ou du *tenseur diélectrique*. On le définit par les relations

$$D_j = \sum_k \varepsilon_{jk} E_k \; (j, \; k = x, \; y, \; z). \tag{75.2}$$

En s'appuyant sur la loi de la conservation de l'énergie, on démontre que pour les cristaux transparents le tenseur diélectrique est *symétrique*, i.e. $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ (cf. § 80). Il est évident que les composantes de ce tenseur ont des valeurs différentes suivant le système de coordonnées utilisé. Lorsqu'on passe d'un système de coordonnées à un autre, ces composantes se transforment comme le font les composantes de tout tenseur. Les vecteurs $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{E}$ étant liés par une relation tensorielle dans les cristaux, leurs directions ne coïncident généralement pas.

2. Les ondes monochromatiques planes peuvent se propager dans les milieux cristallins, transparents et homogènes. Chacune de ces ondes peut être représentée par

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\omega t - \boldsymbol{kr})}, \quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 e^{i(\omega t - \boldsymbol{kr})}, \quad \boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}_0 e^{i(\omega t - \boldsymbol{kr})}. \tag{75.3}$$

Pour commencer, considérons les propriétés des ondes que l'on peut déduire des seules équations fondamentales (75.1) sans faire appel aux équations matérielles (75.2). Comme pour les milieux isotropes, on a

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = -i\,[\boldsymbol{kH}], \quad \dot{\boldsymbol{D}} = -i\omega \boldsymbol{D}, \ \ldots \tag{75.4}$$

En portant ces expressions dans (75.1) et en introduisant le vecteur unitaire de la normale d'onde $\boldsymbol{N}$ on obtient à l'aide de la relation $\boldsymbol{k} = \frac{\omega}{v}\boldsymbol{N}$

$$\boldsymbol{D} = -\frac{c}{v}\,[\boldsymbol{NH}], \quad \boldsymbol{H} = \frac{c}{v}\,[\boldsymbol{NE}], \tag{75.5}$$

où v est la vitesse normale de l'onde, i.e. la vitesse de phase avec laquelle le front d'onde se propage suivant la direction de la normale $\boldsymbol{N}$. Ajoutons à ces équations l'expression du vecteur de Poynting

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}\,[\boldsymbol{EH}]. \tag{75.6}$$

En optique des milieux cristallins, l'importance fondamentale de ce vecteur tient à ce qu'il définit la *direction des rayons lumineux*, c'est-à-dire des lignes le long desquelles se propage l'énergie lumineuse. Pour s'en rendre compte il suffit de démontrer que la direction du vecteur $\boldsymbol{S}$ coïncide avec celle du vecteur vitesse de groupe $\boldsymbol{u} = d\omega/d\boldsymbol{k}$ (cf. § 8). Nous en donnerons la démonstration au § 81. *Dans les cristaux les directions des vecteurs $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{N}$ sont généralement différentes.* C'est ce qui détermine la biréfringence et la réfraction conique.

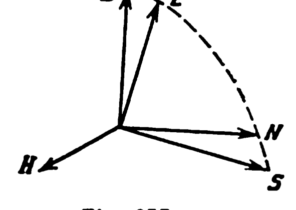


Fig. 257

Il ressort des formules (75.5) que *les vecteurs $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{H}$ sont rectangulaires.* Comme *ils sont tous deux perpendiculaires à la normale $\boldsymbol{N}$*, ils sont parallèles au front d'onde. Il s'ensuit que *les ondes planes se propageant dans un cristal sont transversales par rapport aux vecteurs $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{H}$. Elles ne le sont généralement pas par rapport au vecteur $\boldsymbol{E}$. Les quatre vecteurs $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{S}$ sont situés dans un même plan qui est perpendiculaire au vecteur $\boldsymbol{H}$.* La figure 257 illustre les positions mutuelles de ces vecteurs. On constate que *si on se fixe la direction du vecteur $\boldsymbol{E}$ (ou $\boldsymbol{D}$) dans le cristal, on définit de façon univoque la direction du vecteur $\boldsymbol{D}$ (ou $\boldsymbol{E}$) et, à 180° près, les directions des vecteurs $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{S}$. La valeur de la vitesse normale v de l'onde se trouve également déterminée.* En effet, si on se fixe la direction du vecteur $\boldsymbol{E}$, celle du vecteur $\boldsymbol{D}$ est définie de façon univoque par la formule (75.2) qui définit

aussi le plan (E, D) qui est orthogonal au vecteur H. La direction du vecteur H est alors déterminée à 180° près, ainsi que celles des vecteurs N et S. Si les directions des vecteurs E et D coïncident, toute droite perpendiculaire au vecteur E peut définir la direction du champ magnétique. La même chose vaut dans le cas où on se fixe la direction du vecteur D. Pour déterminer v il suffit d'éliminer le vecteur H de (75.5):

$$D = \frac{c^2}{v^2} E - \frac{c^2}{v^2} (NE) N. \tag{75.7}$$

Puisque $(DH) = 0$, le produit scalaire par D donne

$$v^2 = c^2 \frac{(DE)}{D^2}. \tag{75.8}$$

On peut donc dire que dans un cristal le vecteur électrique (E ou D) est le vecteur *principal*. C'est bien naturel, puisque c'est ce vecteur qui détermine la polarisation électrique du milieu dont l'excitation constitue l'essence du processus de propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux matériels.

§ 76. Cristaux optiquement uniaxes

1. Ce sont les *cristaux optiquement uniaxes* qui possèdent les propriétés optiques les plus simples et qui présentent la plus grande importance pratique. Il est donc tout indiqué d'étudier plus spécialement ce cas particulier. On appelle cristaux optiquement uniaxes ceux dont les propriétés présentent une symétrie de révolution autour d'une certaine direction appelée *axe optique du cristal*.

Décomposons les vecteurs électriques E et D en leurs composantes $E_\parallel$ et $D_\parallel$ suivant l'axe optique, et $E_\perp$ et $D_\perp$ suivant une direction perpendiculaire à cet axe. On a alors

$$D_\parallel = \varepsilon_\parallel E_\parallel, \quad D_\perp = \varepsilon_\perp E_\perp, \tag{76.1}$$

où $\varepsilon_\parallel$ et $\varepsilon_\perp$ sont des constantes appelées, l'une *permittivité diélectrique longitudinale* et l'autre *permittivité diélectrique transversale du cristal*. Ces deux grandeurs définissent à elles seules le tenseur diélectrique d'un cristal uniaxe. Sont optiquement uniaxes tous les cristaux des systèmes quadratique, hexagonal et rhomboédrique. Les cristaux cubiques sont un cas de dégénérescence de ces trois systèmes, puisqu'alors $\varepsilon_\parallel = \varepsilon_\perp$. Au point de vue optique, *les cristaux cubiques se comportent comme des corps optiquement isotropes*. Le plan contenant l'axe optique du cristal et la normale N au front d'onde est appelé *section principale du cristal*. La section principale n'est pas un plan défini, mais toute une famille de plans parallèles.

Considérons deux cas particuliers.

P r e m i e r c a s. Le vecteur D est normal à la section principale du cristal. On a dans ce cas $D \equiv D_\perp$ et par suite $D = \varepsilon_\perp E$. Le cristal se comporte comme un milieu isotrope de permittivité diélectrique $\varepsilon_\perp$. Comme pour ce milieu

$$D = \varepsilon_\perp E, \tag{76.2}$$

on tire des équations (75.5)

$$D = \frac{c}{v} H, \quad H = \frac{c}{v} E \tag{76.3}$$

ou

$$\varepsilon_\perp E = \frac{c}{v} H, \quad H = \frac{c}{v} E \tag{76.4}$$

et de là

$$v = v_\perp \equiv v_0 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_\perp}}. \tag{76.5}$$

Lorsque le vecteur électrique est perpendiculaire à la section principale, la vitesse de l'onde ne dépend pas de la direction de sa propagation. Cette onde est appelée *onde* (ou *vibration*) *ordinaire.*

D e u x i è m e c a s. Le vecteur D est situé dans le plan de section principale. Comme le vecteur E est également contenu dans ce plan (voir fig. 257), on a $E = E_N + E_D$, où E_N est sa composante suivant N et E_D sa composante suivant D. Comme la composante E_N ne figure pas dans le produit vectoriel $[NE]$, on écrira la deuxième équation (75.5) sous la forme

$$H = \frac{c}{v} [NE_D].$$

Il est évident que

$$E_D = \frac{ED}{D} = \frac{E_\parallel D_\parallel + E_\perp D_\perp}{D} = \frac{(D_\parallel^2/\varepsilon_\parallel) + (D_\perp^2/\varepsilon_\perp)}{D}$$

ou

$$E_D = D\left(\frac{\sin^2\alpha}{\varepsilon_\parallel} + \frac{\cos^2\alpha}{\varepsilon_\perp}\right) = D\left(\frac{N_\perp^2}{\varepsilon_\parallel} + \frac{N_\parallel^2}{\varepsilon_\perp}\right),$$

où α est l'angle entre l'axe optique et la normale au front d'onde (fig. 258). En introduisant la notation

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{N_\perp^2}{\varepsilon_\parallel} + \frac{N_\parallel^2}{\varepsilon_\perp}, \tag{76.6}$$

on obtient $D = \varepsilon E_D$ et on en tire les relations

$$\varepsilon E_D = \frac{c}{v} H, \quad H = \frac{c}{v} E_D, \tag{76.7}$$

qui sont formellement identiques aux relations (76.4). Le rôle de $\varepsilon_\perp$ est assumé par ε qui est défini par (76.6). La vitesse normale de

l'onde est donnée par l'expression

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = c\sqrt{\frac{N_\perp^2}{\varepsilon_\parallel} + \frac{N_\parallel^2}{\varepsilon_\perp}} \equiv v_\parallel . \tag{76.8}$$

La vitesse dépend donc de la direction de la normale N. L'onde dont le vecteur électrique est contenu dans le plan de section principale du cristal est appelée *onde extraordinaire. La variation de la vitesse* $v_\parallel$ *de cette onde avec la direction de sa propagation tient à ce que toute variation de direction de la normale N entraîne une variation de l'angle que fait le vecteur électrique avec l'axe optique du cristal.* Pour $N_\perp = 0$, i.e. pour le cas où l'onde extraordinaire se propagerait le long de l'axe optique du cristal, la formule (76.8) donne $v = c/\sqrt{\varepsilon_\perp} = v_\perp \equiv v_0$. Dans ce cas il n'y a plus aucune différence entre les ondes ordinaire et extraordinaire. Si $N_\parallel = 0$, l'onde extraordinaire se propage dans une direction perpendiculaire à l'axe optique et sa vitesse est

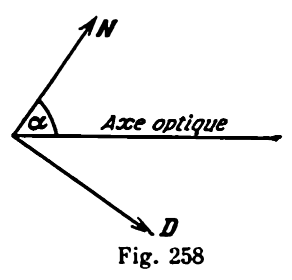


Fig. 258

$$v = v_e \equiv c/\sqrt{\varepsilon_\parallel} . \tag{76.9}$$

Le terme « axe optique » a été introduit pour désigner la droite le long de laquelle les deux ondes se propagent dans le cristal avec la même vitesse. Dans le cas général il existe deux axes optiques (cf. §§ 80 et 81) et les cristaux sont alors dits *biaxes*. Dans le cas particulier à l'étude les deux axes optiques sont confondus et c'est pour cela que le cristal est dit *uniaxe*.

2. Puisque pour les cristaux les équations de Maxwell sont linéaires et homogènes, *dans le cas général, l'onde qui pénètre dans le cristal en venant d'un milieu isotrope se divise dans le cristal en deux ondes polarisées rectilignement : une onde ordinaire dont le vecteur induction électrique est normal au plan de section principale et une onde extraordinaire dont le vecteur induction électrique est contenu dans le plan de section principale.* Ces ondes se propagent dans le cristal suivant des directions différentes et avec des vitesses $v_\perp$ et $v_\parallel$ différentes. Les vitesses des deux ondes sont égales lorsqu'elles se propagent suivant l'axe optique ; il en résulte que les ondes de toute polarisation peuvent se propager suivant cette direction.

On peut appliquer à ces deux ondes toutes les considérations que nous avons développées pour établir les lois géométriques de la réflexion et de la réfraction (cf. § 64), à condition de remplacer *les rayons lumineux par les normales aux fronts d'onde.* Les normales aux fronts de l'onde réfléchie et des deux ondes réfractées sont contenues dans le plan d'incidence et leurs directions vérifient formelle-

ment la loi de Snellius

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi_\perp}=n_\perp,\quad \frac{\sin\varphi}{\sin\psi_\parallel}=n_\parallel, \tag{76.10}$$

où $n_\perp$ et $n_\parallel$ sont les *indices de réfraction de l'onde ordinaire et de l'onde extraordinaire*, i.e.

$$n_\perp=\frac{c}{v_\perp}=n_o,\quad n_\parallel=\frac{c}{v_\parallel}=\left(\frac{N_\perp^2}{\varepsilon_\parallel}+\frac{N_\parallel^2}{\varepsilon_\perp}\right)^{-1/2}. \tag{76.11}$$

$n_\perp \equiv n_o$ ne dépend pas de l'angle d'incidence, tandis que $n_\parallel$ en dépend. La constante n_o est appelée *indice de réfraction ordinaire du cristal.* Lorsque l'onde extraordinaire se propage suivant une direction perpendiculaire à l'axe optique ($N_\perp = 1$, $N_\parallel = 0$),

$$n_\parallel=\sqrt{\varepsilon_\parallel}\equiv n_e. \tag{76.12}$$

La grandeur n_e est appelée *indice de réfraction extraordinaire du cristal.* On ne doit pas la confondre avec l'indice de réfraction $n_\parallel$ de l'onde extraordinaire; n_e est une grandeur *constante*, tandis que $n_\parallel$ *dépend de la direction de propagation de l'onde.* Ces deux grandeurs ne coïncident que lorsque l'onde se propage perpendiculairement à l'axe optique.

3. Il est maintenant facile d'expliquer la cause du phénomène de *biréfringence.* Faisons tomber une onde plane sur une lame à faces parallèles, découpée dans un cristal uniaxe. Lors de la réfraction sur la face antérieure de la lame, l'onde se partage à l'intérieur du cristal en une onde ordinaire et une onde extraordinaire. Ces ondes sont polarisées dans des plans rectangulaires et se propagent à l'intérieur du cristal *dans des directions et avec des vitesses différentes. Les normales aux fronts des deux ondes sont situées dans le plan d'incidence.* Comme la direction de propagation de l'onde ordinaire coïncide avec la direction de la normale à son front d'onde, *cette onde est également contenue dans le plan d'incidence. Quant au rayon extraordinaire, il se situe généralement en dehors du plan d'incidence.* (Dans les cristaux biaxes la distinction entre rayon ordinaire et rayon extraordinaire perd toute signification, car à l'intérieur du cristal les deux ondes sont « extraordinaires ». Lors de la réfraction les normales des deux ondes sont contenues dans le plan d'incidence, mais les deux rayons ne le sont pas en général.)

Si on limite l'onde incidente à l'aide d'un diaphragme, on observe dans la lame cristalline deux faisceaux lumineux qui, pour une épaisseur suffisante de la lame, sont *spatialement distincts.* Après réfraction sur la face postérieure de la lame, *deux faisceaux lumineux* en émergent, qui sont tous deux parallèles au rayon incident. Ces faisceaux sont polarisés rectilignement dans deux plans rectangulaires. Si la lumière incidente est de la lumière naturelle, il y aura toujours deux faisceaux émergents, mais si la lumière inci-

dente est polarisée rectilignement dans le plan de la section principale ou dans un plan qui lui est perpendiculaire, il n'y aura pas de biréfringence et un *seul faisceau* de même polarisation que le rayon incident émergera de la lame.

La biréfringence se manifeste aussi dans le cas d'une incidence normale sur la lame, mais dans ce cas c'est le rayon extraordinaire qui est réfracté, quoique ni les normales ni les fronts d'onde ne soient réfractés. C'est ce qui se produit si on utilise une lame cristalline taillée parallèlement à l'axe optique du cristal (fig. 259). Un faisceau cylindrique limité par un diaphragme tombe sur la lame sous incidence normale. Les fronts d'onde représentés sur la figure par des lignes horizontales fines sont partout parallèles à la surface de la lame. Le faisceau de rayons ordinaires *o* n'est pas réfracté, tandis que le faisceau extraordinaire *e* est dévié dans la lame, mais reprend sa direction initiale après émergence dans l'air.

4. Le phénomène de biréfringence fut découvert en 1669 par Erasmus Bartholin (1625-1698) sur des cristaux de spath d'Islande. Huygens interpréta ce phénomène en supposant que dans le cristal l'onde secondaire se partage en deux ondes — une onde sphérique (onde ordinaire) et une onde ellipsoïdale (onde extraordinaire). C'est Huygens qui découvrit la polarisation de la lumière accompagnant la biréfringence.

Le spath d'Islande est un carbonate de calcium ($CaCO_3$). On le trouve dans la nature sous forme de cristaux assez gros et optiquement purs. Son indice ordinaire est $n_o = 1,6585$ et son indice extraordinaire est $n_e = 1,4863$ (pour la raie jaune). La différence des deux indices étant importante, la biréfringence est importante. Jusqu'à nos jours on utilise les cristaux de spath d'Islande pour faire des expériences de démonstration de la biréfringence; c'est aussi le meilleur matériau connu pour la fabrication de prismes polariseurs et d'autres appareils de polarisation, quoiqu'on dispose actuellement d'autres cristaux naturels et artificiels présentant des propriétés analogues.

Les cristaux de spath d'Islande appartiennent au système hexagonal, mais se présentent sous des formes différentes. Par clivage des cristaux on leur confère une forme rhomboédrique; les rhomboèdres sont limités par six parallélogrammes semblables d'angles aux sommets 78°08′ et 101°52′ (fig. 260). Aux sommets opposés *A* et *B* convergent les arêtes définissant trois angles obtus, à deux autres sommets convergent des arêtes formant un angle obtus et deux angles aigus. La droite qui passe par le point *A* ou par le point *B* et qui est également inclinée sur les arêtes qui se coupent en ces points, ainsi que toute droite parallèle à celle-ci, est l'axe optique du cristal. Si on égalise, par usinage, les longueurs de toutes les arêtes, la ligne *AB* représentera l'axe optique.

5. Pour réaliser une expérience de démonstration de la biréfringence, on prend un rhomboèdre en spath d'Islande monté sur un

support tournant, le tout installé sur un banc optique. Le rayon lumineux doit passer perpendiculairement à deux faces opposées du rhomboèdre. Sur le même banc on installe un diaphragme-iris devant le condenseur d'un appareil à projeter. En l'absence de spath l'objectif à foyer long de l'appareil à projeter donne une image de l'ouverture du diaphragme sur un écran éloigné. Lorsqu'on interpose le cristal de spath immédiatement à la suite du diaphragme, l'image se dé-

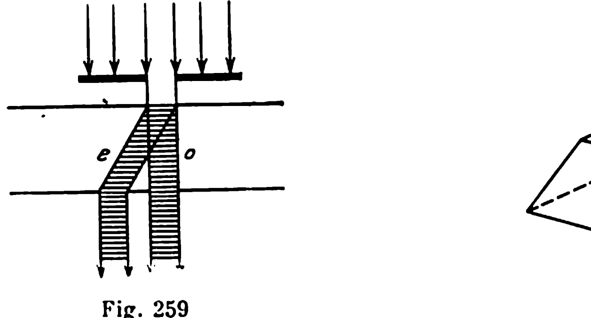


Fig. 259

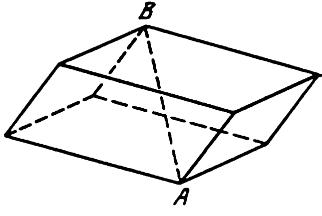


Fig. 260

double. En diminuant l'ouverture du diaphragme on s'arrange pour que les deux images ne soient pas superposées. En éclairant avec de la lumière naturelle, les deux images sont également brillantes. En faisant tourner le cristal de spath autour de l'axe optique principal de l'installation et si tout le réglage est correct, on voit une des images se déplacer suivant une circonférence autour de l'autre image qui, elle, reste fixe. Lorsque le cristal tourne d'un demi-tour, l'image mobile fait un tour complet. En disposant un polaroïde à la suite de l'objectif, on constate que les deux faisceaux sont polarisés rectilignement à angle droit. L'image fixe est formée par le rayon ordinaire et l'image mobile par le rayon extraordinaire. En augmentant l'ouverture du diaphragme, on arrive à superposer partiellement les deux images. Si on fait tourner le polaroïde, les parties non superposées des images deviennent périodiquement brillantes et noires: lorsque l'éclairement d'une partie de l'image est maximal, celui de l'autre est nul. L'éclairement des parties superposées des images ne change pas pendant la rotation du polaroïde, car elles sont éclairées par une lumière non polarisée.

ROBLÈMES

1. Lorsqu'on place une lame de spath d'Islande sur une page de texte imprimé, les lettres se dédoublent. Y aura-t-il dédoublement de l'image si on examine un objet éloigné à travers la lame de spath?

R é p o n s e. Non, l'image ne sera pas dédoublée.

2. On peut mesurer les indices de réfraction d'un cristal au moyen d'un réfractomètre dont le principe est le suivant. On dispose une lame du cristal à

étudier sur la face plane d'une demi-boule en verre de très grand indice de réfraction N (N peut atteindre 2). La lumière tombe sur la partie sphérique de la demi-boule le long d'un rayon et se réfléchit sur la lame. On calcule l'indice du cristal étudié par la formule $n = N \sin \varphi$, φ étant l'angle limite de réflexion totale. Dans le cas des cristaux, il existe deux angles limites correspondant aux deux rayons réfractés par le cristal.

Quelle doit être l'orientation d'une lame à faces parallèles, taillée de façon arbitraire dans un cristal uniaxe, pour pouvoir mesurer les deux indices principaux n_o et n_e du cristal?

S o l u t i o n. Pour mesurer l'indice ordinaire n_0 l'orientation de la lame peut être quelconque. Pour déterminer l'indice extraordinaire n_e (i. e. la valeur maximale ou minimale de $n_{\parallel}$) on doit orienter la lame de telle façon que le plan passant par l'axe optique du cristal et par la normale à la surface de séparation lame-verre du réfractomètre soit orthogonal au plan d'incidence.

En effet, dans le cas de la réflexion totale, le champ lumineux pénètre dans le « second » milieu généralement sous forme d'ondes évanescentes. Mais si la lumière tombe exactement sous l'angle limite, l'onde qui pénètre dans le second milieu sera une onde homogène et sa normale sera parallèle à la ligne d'intersection du plan d'incidence avec le plan de séparation des milieux. Faisons tourner le cristal jusqu'à ce que son axe optique soit perpendiculaire à cette ligne; dans ce cas l'onde se propagera dans le cristal suivant une direction normale à son axe optique. Pour cette orientation le vecteur électrique de l'onde extraordinaire est parallèle à l'axe optique et le réfractomètre permettra de mesurer l'indice principal n_e de l'onde extraordinaire.

3. Lors de la mesure des indices d'une lame cristalline par la méthode décrite ci-dessus, on constate que l'un des indices garde une valeur constante n_o, quelles que soient les rotations de la demi-boule du réfractomètre. L'autre indice variait de telle sorte que la valeur n_0 était 1) sa valeur maximale, 2) sa valeur minimale. Déterminer le signe optique *) du cristal et l'orientation de la lame par rapport à l'axe optique.

R é p o n s e. La lame a été taillée parallèlement à l'axe optique. 1) Le cristal est négatif. 2) Le cristal est positif.

4. Quelles seront les variations des deux indices d'une lame cristalline taillée perpendiculairement à l'axe optique lorsqu'on fait tourner la demi-boule du réfractomètre?

R é p o n s e. Aucun des indices ne variera et ils auront pour valeurs constantes n_o et n_e.

5. De quelle façon doit-on tailler un prisme dans un cristal uniaxe pour pouvoir mesurer l'indice ordinaire n_o et l'indice extraordinaire n_e du cristal par la méthode du minimum de déviation du rayon réfracté?

R é p o n s e. L'axe optique doit être parallèle à l'arête réfringente du prisme.

6. Un pinceau de rayons parallèles de lumière non polarisée tombe sous incidence normale sur une lame de spath d'Islande, taillée sous un angle différent de 90° par rapport à l'axe optique. Après avoir traversé la lame, le pinceau tombe sur une seconde lame identique à la première et disposée parallèlement à celle-ci, et finalement tombe sur un écran. Les plans de section principale des lames font entre eux un angle de 30°. Quelle figure verra-t-on apparaître sur l'écran?

R é p o n s e. On voit apparaître sur l'écran quatre taches dont les éclairements sont dans le rapport 1 : 3 : 1 : 3. Deux taches d'intensités lumineuses 1 : 3 sont polarisées rectilignement, les deux autres de mêmes intensités sont

---

*) Un cristal uniaxe est dit *positif* si l'indice ordinaire n_o est plus petit que l'indice extraordinaire n_e ($n_o < n_e$). Dans le cas contraire ($n_o > n_e$) le cristal est dit *négatif*.

produites par une lumière polarisée rectilignement mais à angle droit par rapport aux deux permières taches.

7. La glace pare-brise et les phares des voitures automobiles sont recouvertes de polaroïdes dont les plans de section principale sont parallèles les uns aux autres et font un angle de 45° avec l'horizon. Les polaroïdes de toutes les voitures doivent être orientés identiquement (en comptant dans le sens de la marche). Montrer que dans ces conditions les conducteurs voient la route éclairée par leurs propres phares, mais ne sont pas aveuglés par les phares des voitures qu'ils croisent.

8. Calculer l'angle maximal δ_{max} entre les directions du rayon et de la normale au front d'ondes dans un cristal de spath d'Islande.

S o l u t i o n. Les vecteurs $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}$ de l'onde extraordinaire sont situés dans un même plan, l'angle δ entre $\boldsymbol{N}$ et $\boldsymbol{S}$ étant égal à l'angle entre $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{E}$. Notons β l'angle entre $\boldsymbol{D}$ et l'axe optique du cristal, et γ l'angle entre $\boldsymbol{E}$ et l'axe optique. On a alors

$$D_{\parallel} = D\cos\beta = \varepsilon_{\parallel} E_{\parallel} = \varepsilon_{\parallel} E\cos\gamma,$$
$$D_{\perp} = D\sin\beta = \varepsilon_{\perp} E_{\perp} = \varepsilon_{\perp} E\sin\gamma.$$

On en tire $\operatorname{tg}\beta = (\varepsilon_{\perp}/\varepsilon_{\parallel})\operatorname{tg}\gamma = (n_o/n_e)^2\operatorname{tg}\gamma$. L'angle cherché $\delta = \beta - \gamma$, et par suite

$$\operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}(\beta-\gamma) = \frac{n_o^2 - n_e^2}{n_o^2 + n_e^2\operatorname{tg}^2\beta}. \qquad (76.13)$$

L'angle δ est maximal pour $\operatorname{tg}\beta = n_o/n_e = 1,1157$, i. e. pour $\beta = 48°7'53''$. L'angle maximal δ_{max} est donné par la formule

$$\operatorname{tg}\delta_{max} = \frac{n_o^2 - n_e^2}{2n_o n_e} = 0,1097. \qquad (76.14)$$

On en tire $\delta_{max} = 6°15'46''$.

9. Calculer l'indice de réfraction $n_{\parallel}$ de l'onde extraordinaire dans un rhomboèdre de spath d'Islande, sachant que la normale au front d'ondes est parallèle à l'arête latérale du cristal. Pour le spath d'Islande l'angle que fait l'arête latérale avec l'axe optique est $\alpha = 64°$. Calculer l'angle δ entre les directions du rayon et de la normale à l'onde dans le cristal.

R é p o n s e. $n_{\parallel} = \sqrt{(\sin\alpha/n_e)^2 + (\cos\alpha/n_o)^2} = 1,515$; $\delta = 4°36'20''$.

§ 77. Appareils de polarisation

1. On peut utiliser les cristaux biréfringents (surtout le spath d'Islande) pour produire de la lumière polarisée; il suffirait pour cela de supprimer l'un des faisceaux polarisés rectilignement qui émergent du cristal dans l'expérience illustrée par la figure 259. Il est cependant beaucoup plus commode d'utiliser des combinaisons de cristaux constituant ce que l'on appelle des *prismes polariseurs* (ou *prismes biréfringents*). Pour la fabrication de ces prismes on utilise du spath d'Islande, parfois le quartz et le salpêtre de soude, afin de réduire le prix des appareils de polarisation.

Un prisme polariseur se compose de deux ou de plusieurs prismes triangulaires taillés dans un cristal uniaxe dont les axes optiques ont même orientation ou des orientations différentes; ces prismes sont collés les uns aux autres avec une substance transparente ou sont

disposés côte à côte, en laissant entre eux une couche d'air. Pour coller les prismes on utilise le baume du Canada ($n_D = 1{,}550$), l'huile de lin ($n_D = 1{,}49$), la glycérine ($n_D = 1{,}474$) et d'autres substances. Dans l'ultraviolet on utilise les prismes collés avec de l'huile de ricin, de la glycérine ou des prismes à couche d'air.

On distingue les *prismes polariseurs à un faisceau* (n'en émerge qu'un seul faisceau polarisé rectilignement) et les *prismes polariseurs à deux faisceaux*, d'où émergent deux faisceaux polarisés rectilignement à angle droit. Les prismes du premier type utilisent la *réflexion totale*. Le faisceau de lumière naturelle se partage dans le prisme en deux faisceaux polarisés rectilignement à angle droit. L'un de ces faisceaux subit une réflexion totale sur le collage et se trouve dévié, tandis que l'autre traverse entièrement le prisme composé et donne le faisceau émergent qui sera utilisé ultérieurement.

2. Le premier prisme polariseur fut inventé en 1828 par le physicien écossais Nicol (1768-1851) et c'est pour cette raison qu'on désigne généralement ces prismes sous le nom de *nicols*. On les fabrique de la façon suivante. On taille, par clivage d'un cristal de spath d'Islande, un rhomboèdre allongé et par abrasion on amène les bases du rhomboèdre à faire un angle de 68° avec les arêtes latérales (cet angle vaut 71° dans le cristal naturel). On scie le cristal suivant un plan diagonal perpendiculairement aux bases et à la section principale (celle-ci est normale aux bases et passe par l'axe optique du cristal). On polit les faces de jonction et on colle les deux moitiés avec interposition d'une couche de baume du Canada.

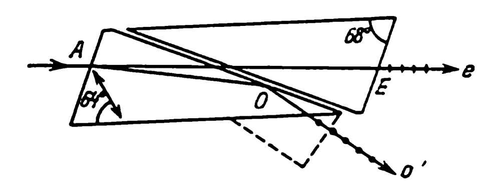


Fig. 261

La figure 261 représente la section du prisme de Nicol par le plan de la section principale. La droite doublement fléchée qui fait un angle de 64° avec l'arête longue indique la direction del 'axe optique. Nous utiliserons cette notation pour caractériser tous les autres prismes. Un rayon lumineux tombant sur la base artificielle du cristal se partage à l'intérieur du cristal en un rayon ordinaire AO et un rayon extraordinaire AE. L'indice de réfraction du baume du Canada (1,550) a une valeur intermédiaire entre les indices ordinaire ($n_o =$ $= 1{,}658$) et extraordinaire ($n_e = 1{,}486$) du spath d'Islande. Les angles du prisme de Nicol sont calculés de telle sorte que le rayon extraordinaire traverse la couche de baume du Canada et le rayon

ordinaire y subisse une réflexion totale et soit absorbé par une face latérale noircie. (Dans les prismes de grandes dimensions, pour éviter l'échauffement dû au noircissement, on évacue le rayon ordinaire à l'aide d'un petit prisme ordinaire collé sur la face latérale; ce prisme est indiqué en pointillé sur la figure 261). La lumière qui émerge du prisme est polarisée rectilignement.

Le faisceau qui tombe sur la face d'entrée du prisme de Nicol comporte des rayons de directions différentes. Lorsqu'un rayon tombe sur la face de jonction sous un angle trop grand, les rayons

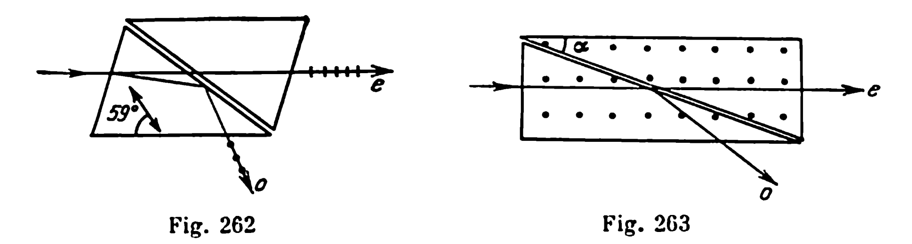


Fig. 262 Fig. 263

ordinaire et extraordinaire subissent une réflexion totale; si l'angle est trop petit, le prisme sera traversé aussi par le rayon ordinaire. Le prisme sera traversé uniquement par le rayon extraordinaire si et seulement si les angles d'incidence des rayons tombant sur la face d'entrée sont compris entre des limites déterminées. La différence d'inclinaison des rayons extrêmes du faisceau incident satisfaisant à cette condition définit le *champ total* du prisme. Le champ total du prisme de Nicol est de 29°; le rapport de la longueur du prisme à sa largeur est égal à 3,28 (voir problème n° 1 à la fin du paragraphe).

Le *prisme de Foucault* (fig. 262) se distingue du prisme de Nicol en ce que la couche de baume du Canada est remplacée par une mince couche d'air. Comme le baume du Canada absorbe les rayons ultraviolets, le prisme de Nicol ne peut être utilisé dans l'ultraviolet et on utilise alors le prisme de Foucault. L'indice de réfraction de la couche d'air est plus petit que les indices n_0 et n_e et c'est ce qui distingue le prisme de Foucault du prisme de Nicol où l'indice du baume est intermédiaire entre n_0 et n_e. Par suite, dans le prisme de Foucault la réflexion totale sur la face de jonction se réalise sous des angles plus petits que dans le prisme de Nicol; d'autre part, le prisme de Foucault d'une section droite donnée est beaucoup plus court et par suite moins cher que le prisme de Nicol. Mais son champ total n'est que de 8°.

3. Comme les prismes de Nicol et de Foucault ont des bases obliques, le rayon incident subit une déviation latérale lors de la traversée du prisme. Le résultat en est un déplacement circulaire du rayon émergent accompagnant la rotation du prisme autour de son

axe. Cet inconvénient n'existe pas dans les prismes ayant la forme d'un parallélépipède droit, qui ont été élaborés par Glazebrook (fig. 263), Glan, Glan-Thompson, Hartnack-Prazmowski, Frank-Ritter (fig. 264), Ahrens (fig. 265), etc. La section du prisme collé

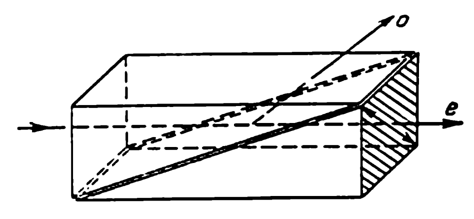


Fig. 264

de Glazebrook est représentée sur la figure 263. L'axe optique est perpendiculaire au plan de la figure (on l'a indiqué sur la figure par des points). Les prismes de Glan, Glan-Thompson, Hartnack-Prazmowski ont la même structure générale que le prisme de Gla-

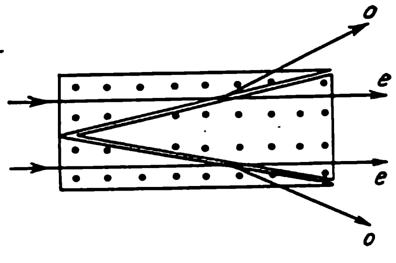


Fig. 265

zebrook et s'en distinguent par les particularités suivantes. Le prisme de Glan est à couche d'air, celui de Glan-Thompson a des paramètres différents; dans le prisme de Hartnack-Prazmowski l'axe

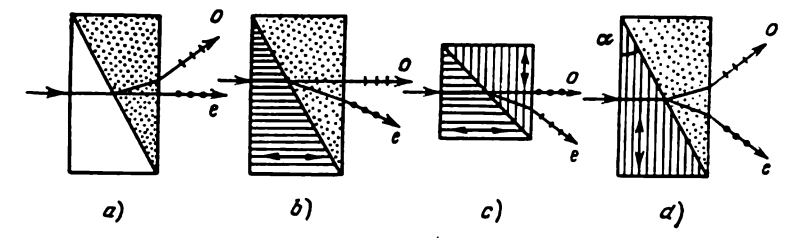


Fig. 266

optique est perpendiculaire à la surface de jonction et dans le prisme de Frank-Ritter il est parallèle à l'une des diagonales de la base du prisme. Le prisme d'Ahrens se compose de trois prismes disposés

comme indiqué sur la figure 265. Les paramètres des ces différents prismes sont consignés dans le tableau 8.

Tableau 8

Prismes	Champ total	Angle entre le plan de jonction et la face latérale	Rapport de la longueur à la largeur du prisme
Prisme de Nicol	29°	22°	3,28
Prisme de Nicol court, collé :			
a) au baume du Canada	13°	25°	2,83
b) au baume de Copahu	24°	25°	2,83
Prisme de Foucault	8°	40°	1,53
Prisme de Glazebrook collé :			
a) au baume du Canada	35°	12,1°	4,65
b) à l'huile de lin	42°	14°	4,02
c) à la glycérine	32,1°	17,3°	3,2
Prisme de Glan à couche d'air	7,9°	50,3°	0,83
Prisme de Glan-Thompson collé :			
a) au baume du Canada	27,5°	13,5°	4,15
b) à l'huile de lin	41°	13,5°	4,15
Prisme de Hartnack-Prazmowski	41,9°	13,9°	4,04
Prisme de Frank-Ritter collé au baume du Canada	19°	17,5°	3,17
Prisme d'Ahrens collé au baume du Canada	35°	12,1°	2,32

4. La figure 266 représente plusieurs types de *prismes polariseurs à deux rayons émergents.* Le premier prisme est une combinaison d'un prisme en verre et d'un prisme en spath d'Islande dont l'axe optique est parallèle à l'arête réfringente. Ces prismes sont juxtaposés ou collés, comme indiqué sur la figure 266, *a*. L'indice de réfraction du verre (1,49) coïncide presque exactement avec l'indice extraordinaire n_e du spath. Le faisceau incident de lumière non polarisée se partage dans le prisme de spath en un faisceau ordinaire et un faisceau extraordinaire. Le faisceau extraordinaire traverse l'appareil sans subir de réfraction, tandis que le faisceau ordinaire est fortement dévié vers la base du prisme de spath, du fait des deux réfractions qu'il subit sur les faces du prisme de spath. Les *prismes de Rochon* (fig. 266, *b*) et *de Sénarmont* (fig. 266, *c*) sont du même type. Dans le *prisme de Wollaston* (fig. 266, *d*) les rayons émergents de lumière polarisée rectilignement sont également déviés dans deux directions symétriques.

5. Pour de nombreux cristaux l'absorption de la lumière dépend de la direction du vecteur électrique de l'onde lumineuse. Cette dépendance est également mise à profit pour produire de la lumière polarisée au moyen de *lames dichroïques*, notamment de lames de tourmaline et de polaroïds. Comme la tourmaline absorbe plus forte-

ment le rayon ordinaire que le rayon extraordinaire, la lumière naturelle devient partiellement polarisée dans le plan de section principal après avoir traversé la lame. Si on utilise une lame épaisse (1 mm environ) et de la lumière naturelle, le rayon ordinaire est presque complètement absorbé et toute la lumière transmise est polarisée rectilignement. Dans certaines régions du spectre visible le rayon extraordinaire est lui aussi notablement absorbé. Les lames de tourmaline d'épaisseur appropriée agissent non seulement comme *polariseurs*, mais aussi comme *filtres de lumière* laissant passer surtout la lumière jaune-vert. C'est là un inconvénient majeur de la tourmaline utilisée en polariseur. Par contre son champ total de polarisation est très grand et n'est limité que par la construction de l'appareil.

Remarquons encore que toute variation de direction de la normale au front d'onde s'accompagne d'une variation des directions du vecteur électrique des deux ondes polarisées rectilignement résultant du partage de la lumière naturelle se propageant suivant cette normale. Il s'ensuit que l'absorption de ces ondes varie, l'absorption étant encore fonction de la longueur d'onde. Le résultat en est que la coloration du cristal dépend de la direction de propagation de la lumière. Ce phénomène est désigné sous le nom de *dichroïsme*, ou mieux *pléochroïsme*, et se manifeste dans la plupart des cristaux biréfringents.

PROBLÈMES

1. Dans le prisme polariseur de Nicol le plan de jonction BC (fig. 267) est perpendiculaire aux bases AB et CD. Ce plan de coupe passe par la diagonale du prisme. Calculer les angles limites de réflexion totale sur une couche de

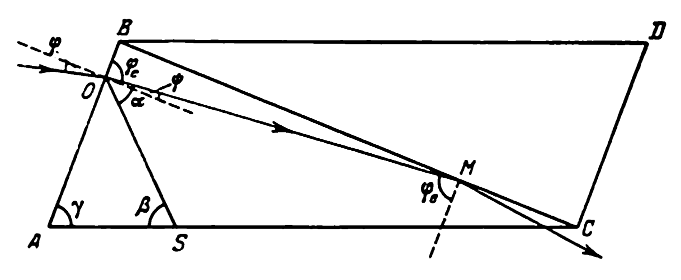


Fig. 267

baume du Canada pour les rayons ordinaire et extraordinaire. Déterminer les angles d'incidence sur la base AB correspondants et le champ total du prisme. Calculer l'indice de réfraction $n_{\parallel}$ de l'onde extraordinaire dans le cristal et le rapport de la longueur l du prisme à la largeur h de sa section droite. Les calculs doivent être faits pour deux cas différents: 1) la base du cristal est artificielle ($\gamma = 68°$), 2) la base du cristal est sa face naturelle ($\gamma = 71°$).

S o l u t i o n. Faisons le calcul pour le rayon extraordinaire en posant que $\gamma = 68°$. Soit $\beta = 64°$ l'angle que fait l'axe optique du cristal avec l'arête longitudinale AC, OM la normale de l'onde correspondant à la réflexion totale, φ_e l'angle d'incidence sur la couche de baume du Canada BC pour lequel se produit la réflexion totale. On a alors $\sin \varphi_e = n/n_\parallel$, où n est l'indice de réfraction du baume du Canada. L'indice $n_\parallel$ de l'onde extraordinaire dans le cristal le long de la direction considérée de la normale de l'onde est défini par l'équation

$$\frac{1}{n_\parallel^2} = \frac{\sin^2 \alpha}{n_e^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{n_o^2}.$$

D'après la figure 267, $\alpha = \beta + \gamma - \varphi_e$. En substituant dans cette équation les valeurs numériques indiquées plus haut, on obtient l'équation

$$\operatorname{tg}^2 \varphi - 7{,}046608 \operatorname{tg} \varphi - 32{,}84593 = 0.$$

Il en découle

$$\operatorname{tg} \varphi = 10{,}250829, \quad \varphi = 84{,}422825°, \quad n_\parallel = n/\sin \varphi_e = 1{,}5573726.$$

L'angle de réfraction sur la base AB est $\psi = \pi/2 - \varphi_e = 5{,}5771175°$. A l'aide de la loi de Snellius on trouve l'angle d'incidence

$$\sin \varphi = n_\parallel \sin \psi = 0{,}1513532, \quad \varphi = 8{,}705349°.$$

Pour que l'onde extraordinaire ne subisse pas de réflexion totale, l'angle d'incidence φ doit vérifier la condition $\varphi > 8{,}705349°$.

Il va de soi qu'un calcul analogue pour l'onde ordinaire est plus simple car l'indice de réfraction de cette onde ne dépend pas de la direction de sa propagation. Pour un angle limite de réflexion totale on trouve dans ce cas $\varphi_o = 69{,}20573°$ et pour un angle d'incidence correspondant $\varphi = 36{,}05854°$. Pour que l'onde ordinaire soit totalement réfléchie, l'angle d'incidence doit être inférieur à cette valeur. Pour un angle d'incidence vérifiant la condition $8{,}705349° < \varphi < 36{,}05854°$, la lumière transmise sera totalement polarisée. Le champ total du prisme est $\varepsilon = 36{,}06 - 8{,}71 \approx 27{,}35°$. (Dans ces calculs nous avons utilisé une valeur de l'angle β qui n'est pas précise. On a conservé les décimales pour ne pas affecter la précision des calculs.)

Le rapport l/h est

$$\frac{l}{h} = \frac{1}{\sin \gamma \cos \gamma} = \frac{2}{\sin 2\gamma} = 2{,}88.$$

En pratique, on scie le prisme de Nicol non pas suivant la diagonale, mais comme indiqué sur la figure 261, afin de faciliter son montage; dans ce dernier cas le rapport l/h est un peu plus grand.

Examinons maintenant le cas d'un cristal naturel pour lequel $\gamma = 71°$. Les calculs relatifs à l'onde ordinaire sont les mêmes que ci-dessus et ceux relatifs à l'onde extraordinaire deviennent beaucoup plus simples grâce à la relation fortuite: $\beta + \gamma = 135°$, d'où $\sin (\beta + \gamma) = -\cos (\beta + \gamma)$. Les résultats définitifs sont: $n_\parallel = 1{,}564955$, $\varphi_e = 82{,}0728°$, $\varphi = 12{,}46454°$, $\varepsilon = 23{,}59°$, $l/h = 3{,}25$. En comparaison avec le cas précédent, on voit que le champ total est moins avantageux.

2. Un prisme de Wollaston (fig. 266, *d*) a été fabriqué en spath d'Islande. L'angle $\alpha = 15°$. Quel sera l'angle de divergence δ des rayons ordinaire et extraordinaire?

R é p o n s e. $\delta = 5°17'$.

3. Deux prismes à couche d'air ont été fabriqués avec du spath d'Islande. Dans l'un de ces prismes l'axe optique est perpendiculaire au plan d'incidence et dans l'autre l'axe optique est parallèle au plan d'incidence (fig. 268). Décrire

l'action de ces prismes sur la lumière incidente. Quelle sera la polarisation de la lumière transmise? Lequel des deux prismes transmet plus de lumière? Dans quelles limites doit être compris l'angle α pour que la lumière qui émerge du prisme soit polarisée rectilignement? La lumière tombe sur la face d'entrée des prismes sous incidence normale.

Réponse. Les prismes sont traversés par le rayon extraordinaire. Le deuxième prisme transmet plus de lumière que le premier. Dans les deux cas la

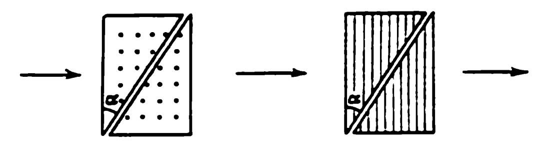


Fig. 268

condition suivante doit être vérifiée: $1/n_0 < \sin\alpha < 1/n_e$, i. e. $37°6' < \alpha < 42°18'$.

4. On colle les prismes de Glazebrook (fig. 263) au baume du Canada ($n = 1{,}550$) ou à l'huile de lin ($n = 1{,}494$). Calculer le champ total optimal du prisme et le rapport correspondant de la longueur a à la largeur b pour les deux colles. Pour obtenir une polarisation totale, le faisceau de rayons incidents doit être symétrique par rapport à l'axe parallèle à l'arête latérale du prisme.

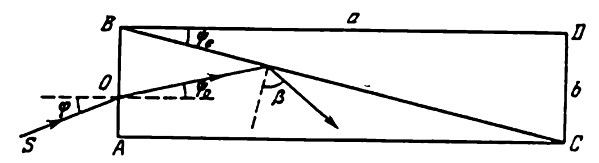


Fig. 269

Solution. Dans le cas considéré le vecteur électrique de l'onde extraordinaire est toujours parallèle à l'axe optique, tandis que le rayon ordinaire est perpendiculaire à cet axe. De ce fait les directions des rayons et des normales de l'onde coïncident. Le rayon extraordinaire ne peut subir de réflexion totale sur la face de jonction, puisque n_e est plus petit que l'indice de la colle. La plus grande inclinaison du rayon extraordinaire allant de gauche à droite et vers le bas (fig. 269) est déterminée par la direction de la diagonale BC. Pour ce rayon l'angle de réfraction $\psi_e = \arcsin(1/\sqrt{1+(a/b)^2})$ et l'angle d'incidence

$$\varphi = \arcsin\frac{n_e}{\sqrt{1+(a/b)^2}}. \tag{77.1}$$

Si l'angle d'incidence est supérieur à cette valeur, le rayon extraordinaire ne tombe pas sur le plan de jonction et sera absorbé par la face latérale AC du prisme. Cherchons maintenant la valeur du rapport a/b pour laquelle le rayon ordinaire SO, tombant sous l'angle φ sur la face d'entrée et se propageant dans le cristal suivant une direction allant de bas en haut et de gauche à droite, rencontre le plan de jonction BC sous l'angle de réflexion totale $\beta = \arcsin(n/n_0)$. Pour cette valeur du rapport a/b, tout rayon ordinaire tombant de bas en haut sous un angle inférieur à β, ainsi que tout rayon allant de haut en bas, subit une réflexion totale sur le plan de jonction BC. Le champ total est $\varepsilon = 2\varphi$. D'après la figure 269, $\beta = \frac{\pi}{2} - (\psi_e + \psi_o)$, d'où $\cos(\psi_e + \psi_o) = n/n_0$. En

utilisant encore la loi de la réfraction $\sin\varphi = n_o \sin\psi_o = n_e \sin\psi_e$, on obtient un système complet d'équations permettant de calculer le rapport a/b et le champ total 2φ. On en tire des formules facilitant les calculs:

$$(n_o^2 - n^2)\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^2 + [n_o^2 - n_e^2 - 2n(n+n_e)]\frac{a^2}{b^2} - (n+n_e)^2 = 0, \qquad (77.2)$$

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \frac{n_e}{\sqrt{1+(a/b)^2}}. \qquad (77.3)$$

A l'aide de ces formules on trouve pour le prisme au baume du Canada $a/b =$ $= 5{,}32$, $\varepsilon = 31°51'$ et pour le prisme à l'huile de lin $a/b = 4{,}25$, $\varepsilon = 39°50'$.

5. Résoudre le même problème que ci-dessus en supposant que la colle a été remplacée par une lame d'air.

S o l u t i o n. Pour que le rayon ordinaire tombant sur la face AB sous un angle φ en allant de bas en haut et de gauche à droite (fig. 270) subisse une réflexion totale sur le plan de jonction BC, il faut que l'angle d'incidence sur ce plan soit supérieur à l'angle limite de réflexion totale:

$$\alpha - \psi_o \geqslant \beta_o, \qquad \sin\beta_o = 1/n_o. \qquad (77.4)$$

Pour que le rayon extraordinaire tombant sur la face AB sous l'angle φ', en allant de haut en bas et de gauche à droite, puisse traverser le plan de jonction BC, il faut qu'il tombe sur ce plan sous un angle inférieur à l'angle limite de réflexion totale:

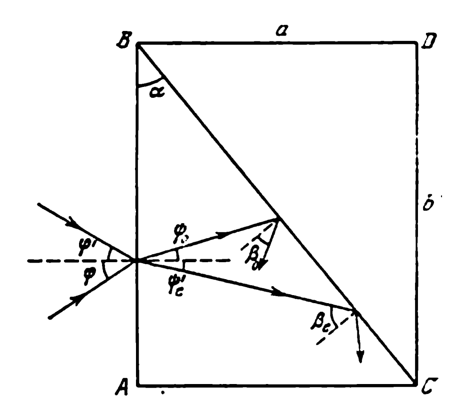


Fig. 270

$$\alpha + \psi_e' \leqslant \beta_e, \qquad \sin\beta_e = 1/n_e. \qquad (77.5)$$

Dans (77.4) et (77.5) le signe d'égalité définit le champ total maximal du prisme. Dans ce cas l'angle $\varphi + \varphi'$ est égal au champ total ε du prisme. En imposant que $\varphi = \varphi'$ on a

$$\alpha - \psi_o = \beta_o, \qquad \alpha + \psi_e' = \beta_e, \qquad (77.6)$$

avec

$$\sin\varphi = n_o \sin\psi_o = n_e \sin\psi_e', \qquad (77.7)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = a/b. \qquad (77.8)$$

On en déduit toutes les grandeurs qui nous intéressent. On tire de (77.6)

$$\psi_o + \psi_e' = \beta_e - \beta_o = 5°12'. \qquad (77.9)$$

Les angles ψ_o, ψ_e' et φ sont petits et on peut donc remplacer les sinus par les angles. Le champ total du prisme est

$$\varepsilon = 2\varphi = \frac{2n_o n_e}{n_o + n_e}(\beta_e - \beta_o) = 8°9'. \qquad (77.10)$$

Le rapport des longueurs est

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg}(\beta_o + \psi_o) = \operatorname{tg}\left(\beta_o + \frac{\varphi}{n_o}\right) = 0{,}826. \qquad (77.11)$$

§ 78. Analyse de la lumière polarisée

1. On peut se rendre compte qu'une lumière est polarisée rectilignement à l'aide du prisme polariseur (ou nicol) ou de tout autre polariseur susceptible de produire une lumière totalement polarisée rectilignement. (Nous désignerons dorénavant *nicols* tous les polariseurs.) On interpose le nicol sur le trajet de la lumière à analyser. Si on fait tourner le nicol autour de la direction du rayon, l'intensité de la lumière transmise variera en général. Si pour une certaine position du nicol il se produit une extinction totale, c'est que la lumière étudiée était polarisée *rectilignement*.

Si la lumière est naturelle, ou présente une polarisation circulaire, l'intensité de la lumière transmise ne variera pas lors de la rotation du nicol. Pour pouvoir distinguer ces deux types de lumière, on utilise une *lame quart-d'onde* ($\lambda/4$) que l'on appelle *compensateur*. C'est une lame en substance cristalline qui introduit une différence de phase supplémentaire de $\pi/2$ entre les rayons polarisés dans des plans rectangulaires. Ces plans définissent dans le plan de la lame deux directions appelées *directions principales* (*lignes neutres*). On taille généralement les lames quart-d'onde dans un cristal uniaxe (le quartz par exemple) parallèlement à son axe optique. La lame introduit alors une différence de phase supplémentaire de $\pi/2$ entre les rayons ordinaire et extraordinaire. On peut aussi tailler une lame quart-d'onde dans un cristal biaxe, le mica par exemple. Dans ce qui suit on supposera que la lame quart-d'onde a été taillée dans un cristal uniaxe. Dans le cas d'une lumière polarisée circulairement, la différence de phase entre deux vibrations rectangulaires quelconques est égale à $\pm\pi/2$. Si on interpose une lame quart-d'onde sur le trajet d'une lumière polarisée circulairement, elle introduira une différence de phase supplémentaire de $\pm\pi/2$. La différence de phase résultante est alors égale à 0 ou à π, i.e. la lumière est maintenant polarisée *rectilignement*. On peut provoquer son extinction totale en faisant tourner le nicol. Si on éclaire la lame avec une lumière naturelle, elle ne changera pas après avoir traversé la lame quart-d'onde et il n'y aura pas d'extinction.

2. Le même dispositif peut servir à distinguer une lumière circulaire droite d'une lumière circulaire gauche. Supposons que la lumière se propage suivant l'axe Z vers le lecteur et que l'axe optique de la lame est orienté suivant l'axe Y. Le vecteur $\boldsymbol{E}$ de l'onde extraordinaire sera alors parallèle à l'axe Y et celui de l'onde ordinaire sera parallèle à l'axe X. Posons pour fixer les idées que la lumière circulaire est droite (fig. 271), i.e. le vecteur $\boldsymbol{E}$ tourne dans le sens horaire. Dans ce cas, en avant de la lame, l'onde extraordinaire est en avance de $\pi/2$ sur l'onde ordinaire (cf. § 62, pt. 4). En notant z l'épaisseur de la lame, après traversée de la lame il apparaît entre

ces ondes une différence de phase supplémentaire égale à

$$\Delta_{sup} = (\omega t - kn_e z) - (\omega t - kn_o z) = k(n_o - n_e) z,$$

où k est le nombre d'onde dans le vide. Pour un cristal négatif ($n_o > n_e$, spath d'Islande par exemple), $\Delta_{sup} = +\pi/2$ et pour un cristal positif ($n_o < n_e$, quartz par exemple), $\Delta_{sup} = -\pi/2$. Dans le premier cas la différence de marche totale est égale à $\Delta = \pi$, de sorte que le plan des vibrations de la lumière transmise est dirigé sui-

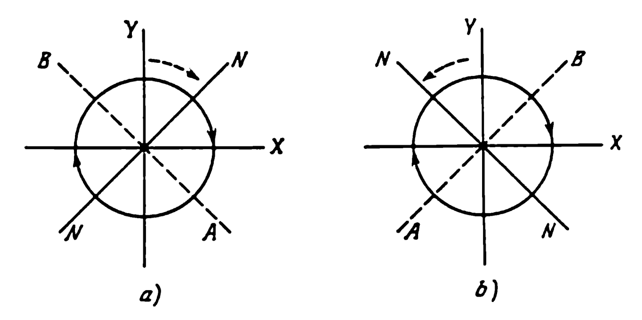


Fig. 271

vant la bissectrice AB (en pointillé sur la figure 271, *a*). Si la section principale du nicol passe initialement par l'axe optique Y de la lame quart-d'onde, on devra la faire tourner dans le sens de la fléchette en pointillé, i.e. *dans le même sens* que celui dans lequel tourne le vecteur $\boldsymbol{E}$ de l'onde incidente, jusqu'à ce qu'elle vienne occuper la position NN pour provoquer l'extinction totale de la lumière transmise. Dans le second cas $\Delta = 0$ (fig. 271, *b*) et on doit tourner le nicol dans le sens opposé, i.e. *à l'encontre du sens de rotation du vecteur* $\boldsymbol{E}$ de l'onde incidente. Si l'onde incidente est polarisée *à gauche*, on doit intervertir toutes les rotations du nicol.

Ces résultats peuvent être résumés par la règle suivante. *Posons que dans la position initiale le plan de section principale du nicol passe par l'axe optique de la lame quart-d'onde. La rotation du nicol à droite sera comptée positivement et sa rotation à gauche sera comptée négativement (si la lumière sortant du nicol tombe dans l'œil de l'observateur). Si le nicol et la lame sont de même signe, la polarisation circulaire sera gauche et s'ils sont de signe contraire, la polarisation sera droite.*

3. Considérons une question plus générale: comment distingue-t-on une lumière naturelle d'une lumière polarisée circulairement ou d'un mélange de lumière naturelle et de lumière polarisée circulairement? Interposons une lame quart-d'onde et un nicol sur le chemin de la lumière. *Si la rotation du nicol ne modifie pas l'intensité de la lumière, quelle que soit la position de la lame, la lumière, est naturelle. Si l'intensité de la lumière varie et tombe à zéro, la lu-*

mière est circulaire. Si l'intensité de la lumière varie, mais ne tombe pas à zéro, la lumière incidente est un mélange de lumière naturelle et de lumière polarisée circulairement.

4. Considérons maintenant le cas d'une lumière *elliptique*. Si on interpose un nicol et si on le fait tourner, on constate que pour deux positions du nicol (distantes de 180°) l'intensité lumineuse sera maximale; dans deux positions du nicol, rectangulaires par rapport aux précédentes, l'intensité lumineuse sera minimale. Ces positions déterminent les directions des axes principaux de l'ellipse des vibrations. Interposons sur le trajet de la lumière incidente une lame quart-d'onde dont l'axe optique est parallèle à l'un des axes principaux de l'ellipse. Après traversée de la lame, la lumière sera polarisée rectilignement et son extinction pourra être obtenue par rotation du nicol. On devra faire tourner le nicol d'un certain angle par rapport à sa position initiale à laquelle correspond une intensité lumineuse maximale ou minimale. En effet, dans la position initiale, la section principale du nicol était orientée parallèlement à l'un des axes principaux de l'ellipse des vibrations. Après passage à travers la lame $\lambda/4$, le plan de vibration de la lumière polarisée rectilignement passera par l'une des diagonales du rectangle représenté sur la figure 236.

5. Il est facile de comprendre ce qu'il faut faire pour faire la distinction entre: 1) une lumière elliptique; 2) un mélange de lumière naturelle et de lumière polarisée rectilignement (*lumière polarisée rectilignement en partie*); 3) un mélange de lumière naturelle et de lumière elliptique (*lumière partiellement elliptique*). On doit interposer sur le trajet de la lumière d'abord une lame quart-d'onde, puis un nicol. Si, en faisant tourner la lame autour de la direction des rayons, on peut trouver une position de la lame telle qu'en faisant tourner le nicol on peut réaliser l'extinction de la lumière transmise, cela signifiera que la lumière est *polarisée elliptiquement*. Si l'extinction est irréalisable, cela signifie qu'on a affaire à un mélange de lumière naturelle et de lumière polarisée rectilignement ou à un mélange de lumière naturelle et de lumière elliptique. Pour distinguer ces deux cas, on interpose sur le trajet de la lumière d'abord seulement un nicol et on le fait tourner jusqu'à l'obtention du minimum d'intensité lumineuse. Ensuite on dispose en avant du nicol une lame quart-d'onde et en faisant tourner les deux on cherche à obtenir le minimum d'intensité lumineuse. Si ce minimum s'obtient pour la même position du nicol que lorsque celui-ci était seul (ou pour sa rotation de 180°), cela signifie que l'on a affaire à un *mélange de lumière naturelle et de lumière polarisée rectilignement*. Mais si on doit faire tourner le nicol d'un certain angle pour arriver au minimum d'intensité, c'est qu'on a affaire à un *mélange de lumière naturelle et de lumière elliptique*.

6. On peut remplacer la lame quart-d'onde (ou une lame demi-

onde qui introduit un retard d'une demi-longueur d'onde) par un dispositif plus perfectionné appelé *compensateur*. Les compensateurs conviennent aussi à l'analyse de la polarisation de la lumière.

Le *compensateur de Babinet* est formé d'un système de deux coins de quartz *I* et *II* dont les axes optiques sont rectangulaires (fig. 272— les orientations des axes y sont figurées par des points et par un ombrage). Le coin *I* est fixe et le coin *II* peut être déplacé suivant la verticale à l'aide de vis micrométriques. Lors de ces déplacements, les plans des coins qui se font face restent mutuellement parallèles. Soit un rayon tombant de gauche à droite sous incidence normale sur le compensateur. Après avoir pénétré dans le compensateur, ce rayon se partage en un rayon ordinaire et un rayon extraordinaire se propageant dans la même direction. Le rayon, qui est le rayon ordinaire dans le premier coin, devient rayon extraordinaire dès qu'il pénètre dans le second coin et le rayon extraordinaire initial devient un rayon ordinaire dans le second coin. De ce fait il apparaît une différence de phase supplémentaire entre les vibrations parallèles et perpendiculaires au plan de la figure

$$\Delta_{sup} = (\omega t - kn_e d_1 - kn_o d_2) - (\omega t - kn_o d_1 - kn_e d_2) = k(n_e - n_o)(d_2 - d_1),$$

où d_1 et d_2 sont les épaisseurs du premier et du second coin comptées le long du rayon qui les traverse ; $k = 2\pi/\lambda$ est le nombre d'onde dans le vide.

Pour le quartz (cristal positif) $n_e > n_o$. Là où $d_1 = d_2$ la différence de phase supplémentaire Δ_{sup} est nulle. Au-dessus de ce point la différence de phase Δ_{sup} qu'introduit le compensateur est positive et au-dessous de ce point Δ_{sup} est négative ; la valeur de Δ_{sup} augmente linéairement avec la distance lorsque le rayon se déplace vers le haut. Si on éclaire le compensateur avec un faisceau de lumière rectiligne ou elliptique, à la sortie du compensateur la différence de phase totale Δ sera différente en différents points. Les lignes de même différence de phase sont des droites parallèles aux arêtes des coins. La lumière émergente reste elliptique, mais la forme de l'ellipse des vibrations est partout différente lorsqu'on passe d'une ligne de même différence de phase à une autre. Lorsque la différence de phase totale $\Delta = 2m\pi$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$) la lumière sera polarisée rectilignement. Si on l'examine à travers un nicol convenablement orienté, on discerne sur la surface du compensateur des franges sombres équidistantes et parallèles. Si on tourne le nicol de 90°, les franges se déplacent d'une demi-interfrange, i.e. se déplacent là où $\Delta = (2m + 1)\pi$. En déplaçant le coin *II* au moyen de la vis micrométrique, la position du rayon restant la même, la différence de phase supplémentaire Δ_{sup} varie. On peut graduer l'échelle sur le tambour de la vis micrométrique directement en valeurs de Δ_{sup}.

La différence de phase Δ_{sup} qu'introduit le compensateur de Babinet dépend du point où le rayon le traverse. Cet inconvénient a été éliminé dans le modèle du compensateur perfectionné par Soleil (1798-1878), où tous les rayons incidents acquièrent la même différence de phase supplémentaire. Comme le compensateur de Babinet, le *compensateur de Babinet-Soleil* se compose de coins de quartz,

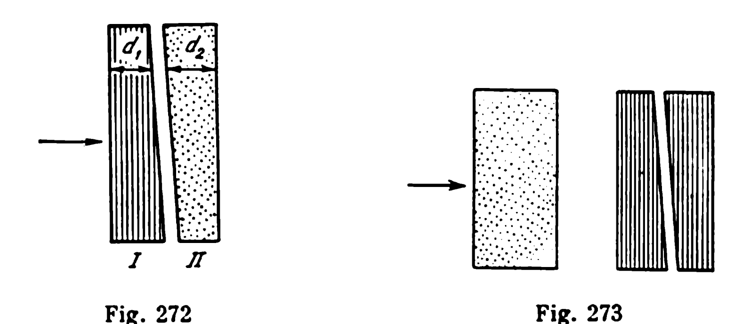


Fig. 272 Fig. 273

mais leurs axes optiques sont mutuellement parallèles (fig. 273). On dispose devant le compensateur une lame de quartz à faces parallèles dont l'axe optique est perpendiculaire aux axes optiques des coins. L'épaisseur de la lame doit être égale à l'épaisseur totale des coins en position zéro (déplacement relatif nul des coins). L'ensemble des deux coins se comporte comme une lame à faces parallèles dont on peut faire varier l'épaisseur au moyen d'une vis micrométrique. Ainsi l'action de ce compensateur est équivalente à celle de deux lames cristallines dont les axes optiques sont rectangulaires.

PROBLÈMES

1. Calculer l'épaisseur minimale d d'une lame de mica pour qu'elle puisse être utilisée en lame quart-d'onde pour la lumière jaune du sodium. Pour cette radiation les indices de réfraction des ondes se propageant dans la lame normalement à ses faces sont: $n_1 = 1{,}5941$, $n_2 = 1{,}5887$. Faire le même calcul pour le quartz ($n_o = 1{,}5442$, $n_e = 1{,}5533$).

Réponse. 1) $d = \dfrac{\lambda}{4(n_1 - n_2)} = 27$ μm; 2) $d = \dfrac{\lambda}{4(n_e - n_o)} = 16{,}2$ μm.

2. On examine un mélange de lumière naturelle et de lumière circulaire à travers une lame cristalline quart-d'onde et un nicol. Lorsqu'on fait tourner le nicol autour de la direction du pinceau lumineux, on constate que l'intensité maximale de la lumière transmise par le système est $m = 3$ fois plus grande que l'intensité minimale. Calculer le rapport de l'intensité I_c de la lumière polarisée circulairement à l'intensité I_n de la lumière naturelle.

Réponse. $I_c/I_n = {}^1/_2\,(m - 1) = 1$.

3. On interpose une lame demi-onde sur le trajet d'une lumière polarisée rectilignement. Le plan de vibration de la lumière incidente fait un angle α avec l'axe optique de la lame. Déterminer la polarisation de la lumière transmise par la lame.

R é p o n s e. La lumière conserve sa polarisation rectiligne, mais le plan de vibration sera incliné sur l'axe optique sous un angle $\beta = -\alpha$, i. e. aura tourné d'un angle 2α. Dans le cas où $\alpha = 45°$, le plan de vibration tournera de 90°.

4. Un faisceau cylindrique de lumière monochromatique polarisée circulairement à droite tombe sous incidence normale sur une lame demi-onde. Déterminer l'état de polarisation de la lumière transmise par la lame.

R é p o n s e. La lumière sera polarisée circulairement à gauche.

5. Un faisceau de rayons parallèles de lumière monochromatique tombe normalement sur la surface d'un polaroïde, puis sur une lame demi-onde. Le plan principal du polaroïde (qui contient le vecteur électrique de l'onde qu'il transmet) fait un angle α avec l'axe de la lame demi-onde. Déterminer l'état de polarisation de la lumière transmise qui émerge de la lame demi-onde.

R é p o n s e. La lumière reste polarisée rectilignement mais le plan de vibration du vecteur électrique tourne d'un angle 2α par rapport à l'axe de la lame demi-onde.

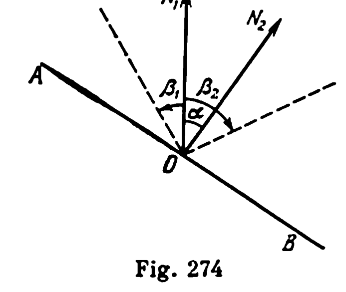


Fig. 274

6. Un faisceau de rayons parallèles de lumière monochromatique traverse deux nicols dont les sections principales font entre elles un angle $\alpha = 20°$. On place entre les nicols une lame demi-onde taillée dans un cristal uniaxe parallèlement à l'axe optique. Quel doit être l'angle β entre l'axe optique de la lame et la direction principale du premier nicol pour que le système ne laisse passer aucune lumière?

S o l u t i o n. La lumière ne passera pas à travers le second nicol si le vecteur électrique sera perpendiculaire à la section principale de ce nicol, i. e. sera parallèle à la droite AB perpendiculaire à cette section principale (fig. 274). L'axe de la lame doit être orienté suivant la bissectrice de l'angle AON_1 ou de l'angle N_1OB complémentaire de π (voir problème précédent). On trouve deux valeurs de l'angle β:

$$\beta_1 = -\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} = -35°, \quad \beta_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2} = +55°.$$

7. Une onde polarisée rectilignement traverse une lame cristalline dont l'une des directions principales fait un angle φ avec la section principale du polariseur. La différence de phase qu'introduit la lame est δ. Déterminer: 1) le rapport des demi-axes de l'ellipse de vibration de la lumière elliptique obtenue; 2) l'angle entre les directions principales de la lame et les demi-axes de l'ellipse.

S o l u t i o n. Après avoir traversé la lame, la lumière polarisée rectilignement est transformée en lumière elliptique:

$$x = a \cos \omega t, \quad y = b \cos (\omega t + \delta),$$

où x et y sont les composantes du vecteur électrique suivant les axes de coordonnées confondus avec les directions principales de la lame. Pour déterminer les demi-axes de l'ellipse de vibration, on doit calculer les projections x' et y' du vecteur lumineux sur les axes d'un système de coordonnées faisant un angle θ avec le système initial:

$$x' = a \cos \theta \cos \omega t + b \sin \theta \cos (\omega t + \delta) = A \cos (\omega t + \alpha),$$
$$y' = -a \sin \theta \cos \omega t + b \cos \theta \cos (\omega t + \delta) = B \cos (\omega t + \beta),$$

où A et B sont les demi-axes de l'ellipse définis par les équations

$$\begin{aligned} A \cos \alpha &= a \cos \theta + b \sin \theta \cos \delta, & A \sin \alpha &= b \sin \theta \sin \delta, \\ B \cos \beta &= -a \sin \theta + b \cos \theta \cos \delta, & B \sin \beta &= b \cos \theta \sin \delta. \end{aligned} \quad (78.1)$$

On en tire

$$\begin{aligned} A^2 &= a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta + ab\sin 2\theta\cos\delta, \\ B^2 &= a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta - ab\sin 2\theta\cos\delta. \end{aligned} \tag{78.2}$$

En faisant la somme et la différence de ces équations on trouve

$$A^2 + B^2 = a^2 + b^2 = R^2; \tag{78.3}$$

$$A^2 - B^2 = (a^2 - b^2)\cos 2\theta + 2ab\sin 2\theta\cos\delta, \tag{78.4}$$

où R désigne l'amplitude de l'onde transmise par le polariseur. Pour que les amplitudes A et B correspondent aux vibrations suivant les axes de l'ellipse, il faut que θ ait une valeur telle que la différence $A^2 - B^2$ soit maximale ou minimale. En égalant sa dérivée à zéro on trouve

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2ab}{a^2 - b^2}\cos\delta. \tag{78.5}$$

On tire de (78.1)

$$\begin{aligned} AB\sin(\alpha-\beta) &= -ab\sin\delta, \\ AB\cos(\alpha-\beta) &= ab\cos 2\theta\cos\delta - \frac{a^2-b^2}{2}\sin 2\theta \end{aligned} \tag{78.6}$$

ou

$$\frac{AB\cos(\alpha-\beta)}{ab\cos 2\theta\cos\delta} = 1 - \frac{a^2-b^2}{2ab\cos\delta}\operatorname{tg} 2\theta.$$

En remplaçant $\operatorname{tg} 2\theta$ par son expression (78.5) on a $\dfrac{AB\cos(\alpha-\beta)}{ab\cos 2\theta\cos\delta} = 0$, d'où $\cos(\alpha - \beta) = 0$, $(\alpha - \beta) = \pm\pi/2$. On tire de la première équation (78.6) $AB = \pm ab\sin\delta$. Puisque $b/a = \operatorname{tg}\varphi$,

$$\sin 2\varphi = \frac{2ab}{a^2+b^2}, \quad \cos 2\varphi = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}, \quad \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2ab}{a^2-b^2}.$$

L'équation (78.5) se réduit à

$$\operatorname{tg} 2\theta = \operatorname{tg} 2\varphi\cos\delta.$$

C'est cette équation qui définit l'angle θ entre les directions principales de la lame et les axes de l'ellipse. Adoptons pour la deuxième inconnue la notation $B/A = \operatorname{tg} I$ et utilisons la formule $\sin 2I = 2\operatorname{tg} I/(1 + \operatorname{tg}^2 I)$. On obtient alors

$$\sin 2I = \frac{2AB}{A^2+B^2} = \frac{2ab\sin\delta}{a^2+b^2} = \sin 2\varphi\sin\delta.$$

8. On fait tomber sous incidence normale une lumière polarisée circulairement sur une lame cristalline taillée parallèlement à l'axe optique. La lumière transmise est examinée à travers un analyseur.

1) Déterminer l'intensité de la lumière transmise en négligeant les pertes à la réflexion sachant que la section principale de l'analyseur fait un angle α avec l'une des directions principales de la lame. 2) Dans quelle position angulaire doit se trouver l'analyseur pour obtenir le maximum et le minimum d'intensité?

Solution. 1) Si la lumière est polarisée circulairement, les composantes des vibrations suivant les axes de coordonnées sont de la forme

$$x = a\cos\omega t, \quad y = a\sin\omega t.$$

Après traversée de la lame cristalline, qui introduit une différence de phase δ, les équations des vibrations sont

$$x = a\cos\omega t, \quad y = a\sin(\omega t + \delta).$$

A l'émergence de l'analyseur la vibration résultante est

$$\xi = a \cos\alpha \cos\omega t + a \sin\alpha \sin(\omega t + \delta) =$$
$$= a(\cos\alpha + \sin\alpha \sin\delta)\cos\omega t + a \sin\alpha \cos\delta \sin\omega t.$$

On en déduit l'intensité de la lumière transmise

$$I = a^2\{(\cos\alpha + \sin\alpha \sin\delta)^2 + (\sin\alpha \cos\delta)^2\} = a^2(1 + \sin 2\alpha \sin\delta).$$

2) Pour $\delta = \text{const}$ l'intensité prend sa valeur maximale ou minimale lorsque $\cos 2\alpha = 0$, i. e. pour $\alpha = {}^1/_4\pi$, ${}^3/_4\pi$. Si $\sin\delta > 0$, à la première valeur de α correspond un maximum et à la seconde un minimum. Pour $\sin\delta < 0$ c'est le contraire qui se produit.

9. On interpose un coin de substance biréfringente sur le trajet d'une lumière monochromatique circulaire. L'axe optique est parallèle à l'arête du coin. Décrire les figures que l'on observera à travers un nicol lorsque le coin est immobile et lorsqu'on le tourne autour de la direction de propagation de la lumière.

S o l u t i o n. D'après ce que nous avons obtenu dans le problème précédent, l'intensité de la lumière transmise par l'analyseur est

$$I = a^2(1 + \sin 2\alpha \sin\delta).$$

Pour $\sin 2\alpha > 0$ et pour α constant, l'intensité sera minimale lorsque

$$\sin\delta = -1, \quad \text{i. e.} \quad \text{pour} \quad \delta = 3\pi/2,\ 7\pi/2,\ \ldots,$$

et elle sera maximale lorsque

$$\sin\delta = 1, \quad \text{i. e.} \quad \text{pour} \quad \delta = \pi/2,\ 5\pi/2,\ 9\pi/2,\ \ldots$$

Pour $\sin 2\alpha < 0$, on obtient un maximum d'intensité dans le premier cas et un minimum dans le second. Dans tous les cas on trouvera dans le champ de vision des franges alternativement claires et sombres. La rotation du coin fait varier l'angle α et par suite l'intensité lumineuse en tout point du coin. Lorsque $\alpha = 90$, 180 et 270°, tout le coin sera éclairé uniformément et lorsque $\alpha =$ $= 45$, 135, 225, 315°, le contraste entre les franges claires et obscures sera maximal. En passant par les angles $\alpha = 90$, 180, 270°, les franges sombres deviennent claires et les franges claires deviennent noires.

10. Deux faisceaux cohérents de lumière quasi monochromatique non polarisée, de même intensité, produisent des franges d'interférence sur un écran. Quelle doit être l'épaisseur d'une lame cristalline que l'on interposera sur le trajet de l'un des faisceaux pour que les franges non seulement disparaissent, mais qu'on ne puisse les rétablir par introduction d'une lame de verre quelconque sur le trajet de l'autre faisceau? Quelle modification subira le système de franges si on dispose un polaroïde derrière la lame cristalline? Pour quelle position du polaroïde les franges disparaissent-elles?

S o l u t i o n. Décomposons en pensée l'onde lumineuse en deux composantes dont les vecteurs électriques sont rectangulaires et parallèles aux axes principaux de la lame. L'interposition de la lame provoque un déplacement des franges d'interférence produites par chacune des composantes. Si c'est une lame demi-onde, la différence de ces déplacements sera égale à une demi-interfrange et l'introduction de cette lame fait disparaître les franges d'interférence. Lorsqu'on introduit le polaroïde, les franges réapparaissent, sauf si les axes du polaroïde sont inclinés de 45° sur les axes de la lame; on ne pourra alors observer les franges d'interférence.

11. Une onde plane est polarisée elliptiquement. Les longueurs des demi-axes de l'ellipse des vibrations sont respectivement égales à a et b. Quelle lame cristalline doit-on interposer sur le trajet de l'onde et comment doit-on orienter la lame pour obtenir une lumière polarisée circulairement: 1) de même sens de rotation; 2) de sens de rotation opposé?

S o l u t i o n. Dans le système d'axes principaux X, Y la vibration elliptique a pour équation: $E_X = a\cos\omega t$, $E_Y = b \sin\omega t$ (fig. 275). Passons à un autre système ξ, η dont les axes sont les bissectrices du premier système.

Dans ce système la même vibration a pour équations

$$E_\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(a\cos\omega t + b\sin\omega t) = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\cos(\omega t - \varphi),$$

$$E_\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(-a\cos\omega t + b\sin\omega t) = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\cos[\omega t - (\pi - \varphi)],$$

où φ est un angle aigu défini par l'équation $\operatorname{tg}\varphi = b/a$. Les vibrations suivant les axes ξ et η sont de même amplitude $\sqrt{(a^2+b^2)/2}$, la vibration suivant l'axe ξ a une avance de phase sur la vibration suivant l'axe η égale à $\delta = \pi - 2\varphi$.

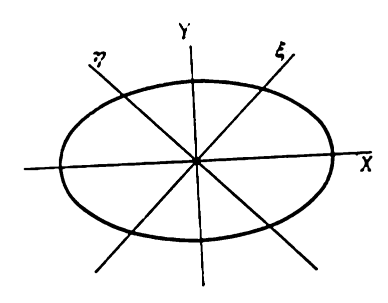


Fig. 275

Interposons la lame cristalline en l'orientant de manière que ses axes soient confondus avec ξ et η et qu'elle fasse varier la différence de phase jusqu'à $\pm\pi/2$. Pour cela il faut que soit vérifiée la relation

$$(\omega t - \varphi - k_\xi l) - (\omega t - \pi + \varphi - k_\eta l) = \pm\pi/2,$$

d'où

$$l = \frac{2\varphi - \pi \pm \pi/2}{k_\eta - k_\xi} = \lambda\,\frac{\varphi/\pi - {}^1/_2 \pm {}^1/_4}{n_\eta - n_\xi}.$$

L'onde initiale sera transformée alors en une onde à polarisation circulaire. Au signe plus correspond le même sens de rotation que celui de l'onde elliptique et au signe moins un sens de rotation opposé à celui de l'onde elliptique. On obtiendra le même résultat si on modifie l'épaisseur de la lame de $m\lambda/(n_\eta - n_\xi)$, où m est un nombre entier.

§ 79. Interférences de la lumière polarisée

1. La découverte du phénomène d'*interférences de la lumière polarisée* représenta un événement important pour le développement de la physique et contribua grandement à l'éclaircissement de la question de la *nature des vibrations lumineuses*. Ce phénomène fit l'objet des fameuses expériences de Fresnel et Arago (1816). Il est évident que les rayons envoyés par des sources indépendantes n'interfèrent pas même si on leur fait traverser un polariseur. Pour qu'il y ait des interférences, il faut que les vibrations soient *cohérentes*. Cependant, conformément à la formule (26.2), le résultat des interférences des

vibrations rectilignes dépend de l'angle entre les plans de vibration. Les franges d'interférences sont particulièrement nettes lorsque ces plans sont parallèles. Les interférences ne s'observent jamais si les ondes sont polarisées dans des plans rectangulaires. C'est ce que démontrèrent les expériences de Fresnel et Arago, et Fresnel en conclut que *les vibrations lumineuses étaient transversales.*

2. Un des montages permettant d'étudier les interférences de la lumière polarisée est représenté sur la figure 276. Les rayons envoyés

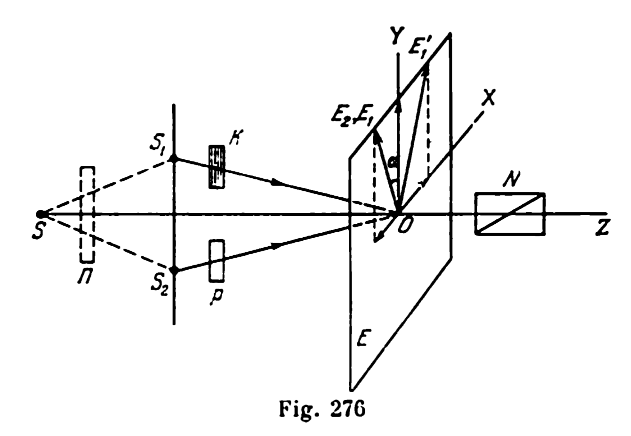


Fig. 276

par la source lumineuse primaire S traversent le polaroïde Π ou tout autre polariseur. Les sources cohérentes secondaires S_1 et S_2 sont réalisées par un des procédés utilisés dans les expériences d'interférence à deux faisceaux. Les faisceaux de rayons qu'elles émettent sont polarisés dans des plans parallèles. On interpose une lame cristalline demi-onde K sur le trajet de l'un des faisceaux. Pour compenser la différence de marche qui apparaît on interpose une lame de verre P d'épaisseur appropriée sur le trajet de l'autre faisceau. Cette lame de verre ne modifie pas les directions des vibrations de l'onde polarisée rectilignement qui la traverse. La lame cristalline ne se comporte de même que si son axe optique est parallèle ou perpendiculaire au plan de vibration. Dans ce cas des lames K et P émergent des faisceaux cohérents de même polarisation. Les directions des vibrations de ces faisceaux sont repérées sur la figure 276 par les vecteurs confondus $\boldsymbol{E}_1$ et $\boldsymbol{E}_2$.

Si on tourne la lame K d'un angle α autour de sa normale, le vecteur $\boldsymbol{E}_1$ tournera d'un angle 2α et viendra occuper la position $\boldsymbol{E}_1'$ (voir problème n° 5 à la fin du paragraphe précédent). On peut donc étudier les interférences pour différentes valeurs de l'angle 2α que font entre eux les plans de vibration des ondes qui interfèrent.

On peut observer la figure d'interférences sur l'écran E ou sans aucun écran au moyen d'une loupe ou d'une lunette. Dans ce qui

suit le plan de l'écran est confondu avec le plan de coordonnées XY, la direction de l'axe optique de la lame K est confondue avec l'axe Y, et la normale à l'écran orientée dans le sens de propagation de la lumière est confondue avec l'axe Z. Il s'ensuit que la rotation de la lame K entraînera la rotation de l'axe Y.

La superposition des ondes monochromatiques polarisées rectilignement produit partout, y compris sur l'écran E, une polarisation elliptique de la lumière. Si l'angle entre les plans de vibration reste constant, la forme et l'orientation de l'ellipse des vibrations varieront avec la variation de la différence de marche entre les rayons interférents. Pour certaines valeurs déterminées de la différence de marche, les vibrations elliptiques dégénèrent en vibrations rectilignes. Les surfaces d'égales différences de marche (sur l'écran ce seront des lignes d'égales différences de phase) sont simultanément des surfaces (des lignes) des ellipses des vibrations identiques et de même orientation.

Décomposons toutes les vibrations dans le montage de la figure 276 suivant les axes X et Y. Au centre O de l'écran les composantes y des vecteurs E_1' et E_2 sont de même sens, i.e. les vibrations le long de l'axe Y sont en phase. Les composantes de ces vecteurs suivant l'axe X sont de sens opposé, de sorte que le long de cet axe les vibrations sont en opposition de phase et se détruisent mutuellement. Le résultat en est qu'au point O, ainsi qu'en tout point de l'axe X, apparaît une vibration rectiligne parallèle à l'axe Y. Si on se déplace d'une demi-interfrange parallèlement à l'axe Y, les composantes x des vibrations seront de même phase et les composantes y seront en opposition de phase. La vibration résultante sera également rectiligne, mais orientée suivant l'axe X. Du fait de l'existence d'une différence de marche, l'extinction aux points intermédiaires ne peut être complète ni pour les vibrations x ni pour les vibrations y. Comme il existe entre ces vibrations une différence de phase égale à $\pi/2$, la vibration résultante sera elliptique, les axes principaux de l'ellipse étant parallèles aux axes de coordonnées X et Y.

3. L'état de polarisation elliptique se manifeste si on examine la lumière à travers un nicol. Si le nicol laisse passer les vibrations parallèles à l'axe Y, on verra apparaître sur l'écran des franges d'interférence parallèles à l'axe X. La frange centrale passant par le centre O de l'écran (où la différence de marche est nulle) sera claire. Si on tourne le nicol de 90°, ces franges disparaissent, mais il apparaît un autre système de franges d'interférence décalé d'une demi-interfrange par rapport au premier système. La frange centrale de ce nouveau système est noire. Ainsi une rotation du nicol de 90° par rapport à sa position initiale donne lieu au remplacement des franges brillantes par des franges noires et inversement.

La même situation se retrouve dans le cas particulier d'une pola-

risation circulaire (la lame K est tournée alors par rapport à sa position initiale d'un angle $\alpha = 45°$). Les franges d'interférence observées visuellement ont le même aspect, quelle que soit l'orientation du nicol. Lorsqu'on fait tourner celui-ci, les franges se déplacent parallèlement à elles-mêmes. Pour une rotation de 90° ce déplacement est égal à la moitié d'une interfrange et la direction des vibrations tourne elle aussi de 90°. Si on enlève le nicol, il se produira une superposition de deux systèmes de franges d'interférence incohérentes, décalés d'une demi-frange l'un par rapport à l'autre, dont les vibrations sont rectangulaires. Le résultat en est un éclairement uniforme de l'écran, ce qui tient à ce que les ondes dont les vibrations sont rectangulaires n'interfèrent jamais. Ainsi la rotation de 90° du plan de vibration de l'un des faisceaux de polarisation rectiligne (ce qui est réalisé, par exemple, en faisant tourner la lame cristalline K) modifie notablement l'éclairement de l'écran. En l'absence d'une telle rotation on observe des franges d'interférence sur l'écran. Si on les observe à travers un nicol, l'intensité lumineuse des franges change et les franges disparaissent lorsque les vibrations sont perpendiculaires à la section principale du nicol. Si on fait tourner de 90° le plan de vibration de l'un des rayons et s'il n'y a pas de nicol, on n'observera plus aucune frange d'interférence, mais elles réapparaissent dès qu'on interpose un nicol et se mettent à défiler parallèlement si on fait tourner le nicol, et lorsque celui-ci aura tourné de 90° le déplacement des franges deviendra égal à la moitié d'une interfrange.

Si on réalise la même expérience avec de la lumière naturelle (en supprimant le polaroïde Π) l'introduction de la lame cristalline en toute position ne modifie pas la lumière naturelle qui passe au travers. Mais comme le montra S. I. Vavilov, la figure d'interférence formée sur l'écran se modifie, puisque même après introduction de la lame les rayons ne restent pas indépendants mais sont corrélés d'une certaine façon.

On peut en effet représenter la lumière naturelle incidente sous forme d'une superposition d'ondes incohérentes polarisées rectilignement, dont les plans de vibration ont des directions quelconques. Considérons une de ces ondes. En présence de la lame K et en observant à travers le nicol N, on voit sur l'écran le système de franges d'interférence décrit ci-dessus. Ce qui importe est que la position des franges ne dépend pas de l'angle que font entre eux les plans de vibration des ondes interférentes. Cela signifie que toutes les composantes polarisées rectilignement résultant de la décomposition de l'onde incidente forment des systèmes de franges de mêmes positions. Comme ces systèmes sont incohérents, leur superposition ne peut donner lieu qu'à leur renforcement mutuel. La lumière naturelle étant statistiquement isotrope pour toutes les directions normales au rayon, la rotation du nicol ne modifie pas l'aspect des fran-

ges d'interférence et ne provoque qu'un déplacement parallèle des franges comme dans le cas de la lumière polarisée circulairement. En tournant le nicol de 90° les franges brillantes cèdent leurs places aux franges obscures et inversement. Mais la situation change si on enlève la lame cristalline *K*. Dans ce cas les franges se forment même en l'absence de nicol et leur intensité lumineuse diminue de deux fois dès qu'on introduit le nicol. La rotation de celui-ci n'affecte ni la position ni l'éclairement des franges.

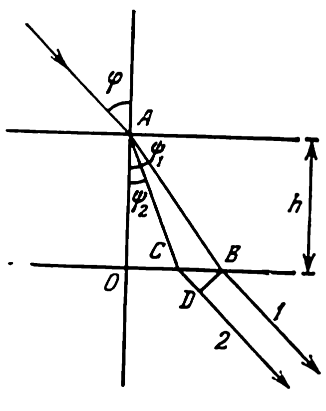


Fig. 277

4. Lorsqu'on fait passer une lumière polarisée à travers un cristal, on se trouve en présence d'un cas d'interférence spécial. Faisons tomber une onde sur une lame cristalline à faces parallèles sous un angle φ (fig. 277). A l'intérieur du cristal l'onde initiale se divise en deux ondes se propageant dans des directions différentes et avec des vitesses différentes. Soient *AB* et *AC* les normales aux plans de ces ondes et ψ_1 et ψ_2 les angles de réfraction correspondants. Dans le cristal les normales ne coïncident pas, tandis qu'à l'extérieur toute différence entre leurs directions s'estompe. Du cristal émergent deux rayons *1* et *2*, tous deux parallèles au rayon incident, qui sont polarisés dans des plans rectangulaires. La différence de marche optique entre ces rayons est

$$\Delta = (ACD) - (AB) = n_2 \cdot AC + CD - n_1 \cdot AB,$$

où n_1 et n_2 sont les indices de réfraction des deux ondes et *D* désigne le pied de la perpendiculaire abaissée du point *B* sur le rayon *2*. Si *h* est l'épaisseur de la lame, on a

$$AC = h/\cos\psi_2, \quad AB = h/\cos\psi_1, \quad CD = h\,(\operatorname{tg}\psi_1 - \operatorname{tg}\psi_2)\sin\varphi.$$

Conformément à la loi de la réfraction, $\sin\varphi = n_1 \sin\psi_1 = n_2 \sin\psi_2$, ce qui fournit la relation

$$\Delta = h\,(n_2\cos\psi_2 - n_1\cos\psi_1). \qquad (79.1)$$

La différence de marche Δ entre les rayons *1* et *2* est déterminée par: 1) la différence des indices de réfraction n_1 et n_2; 2) la différence des angles de réfraction ψ_1 et ψ_2. Cette deuxième cause ne joue qu'un rôle secondaire et on peut la négliger dans la plupart des cas, ce qui conduit à la relation approchée

$$\Delta = h\cos\psi\,(n_2 - n_1). \qquad (79.2)$$

où l'angle ψ peut avoir toute valeur intermédiaire entre celles des angles ψ_1 et ψ_2.

5. On peut utiliser la différence de marche Δ pour obtenir les interférences des rayons *1* et *2*. Si la lumière tombant sur la lame cristalline était naturelle, il n'y aurait pas d'interférences, puisqu'il n'y aurait aucune corrélation entre les rayons *1* et *2*. Pour établir une corrélation entre ces rayons il faut que la lumière incidente soit polarisée rectilignement ou elliptiquement. Mais même dans

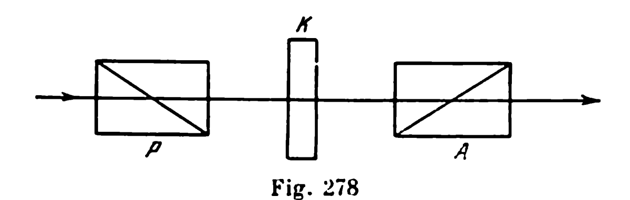


Fig. 278

ce cas il n'y aura pas d'interférences, car les rayons *1* et *2* sont polarisés à angle droit. Il faut donc que les vibrations s'effectuent suivant une même direction, résultat qu'on obtient en faisant passer la lumière à travers un nicol. Avec des lames à faces parallèles on rassemble les rayons dans le plan focal d'une lentille et on obtient des franges d'égale inclinaison. Avec des lames minces d'épaisseur variable on obtient des franges de même épaisseur localisées sur la surface des lames.

La figure 278 représente le schéma de montage utilisé pour obtenir des *interférences en rayons parallèles*. On place la lame cristalline K entre le polariseur P et l'analyseur A. Après avoir traversé la lame cristalline K, la lumière rectiligne sortant du polariseur P devient elliptique et après avoir traversé l'analyseur A redevient rectiligne. L'intensité de la lumière transmise dépend de l'orientation de l'analyseur; si on fait tourner l'analyseur, l'intensité I varie.

La différence de phase qui est introduite lorsqu'on fait passer la lumière à travers la lame cristalline est égale à $2\pi\Delta/\lambda$ et dépend donc de la longueur d'onde λ. Lorsque l'analyseur est fixe, la différence de phase dépend de la longueur d'onde et par suite les franges d'interférence sont colorées. La coloration change lorsqu'on fait tourner l'analyseur; lorsqu'il tourne de 90°, on obtient la teinte complémentaire, les régions claires deviennent sombres et inversement. Si les sections principales de l'analyseur et de la lame sont mutuellement parallèles ou perpendiculaires, la lame ne sera traversée que par un seul rayon; comme il n'y a pas d'autre rayon avec lequel ce rayon pourrait interférer, la coloration disparaît. Ces différents phénomènes ont été appelés *polarisation chromatique*, ce qui, physiquement parlant, est un terme plutôt malencontreux. La polarisation chromatique fut découverte par Arago en 1911.

7—0791

Généralement, les sections principales du polariseur et de l'analyseur sont placées parallèlement (*nicols parallèles*) ou perpendiculairement les unes aux autres (*nicols croisés*). Dans ce dernier cas le dispositif d'étude permet de déceler avec une grande sensibilité l'anisotropie des corps solides. La lumière ne passe pas à travers deux nicols croisés (champ de vision sombre). Mais si on place un corps anisotrope entre les nicols, le système se laisse traverser par la lumière (le champ de vision devient plus clair) même si l'anisotropie est faible.

Fig. 279

Pour procéder à un calcul quantitatif, confondons les directions principales de la lame cristalline avec les axes de coordonnées X et Y (fig. 279). Supposons que le polariseur ne laisse passer les vibrations que suivant la direction P, et l'analyseur seulement suivant la direction A. Notons α et β les angles que font ces directions avec l'axe X. Posons égale à l'unité l'amplitude de la lumière sortant du polariseur. A la sortie de la lame cristalline l'amplitude des vibrations sera égale à $\cos\alpha$ suivant l'axe X et à $\sin\alpha$ suivant l'axe Y. L'analyseur ne laissera passer que les vibrations d'amplitudes $a_1 =$ $= \cos\alpha\cos\beta$ et $a_2 = \sin\alpha\sin\beta$; la lame introduit une différence de phase δ entre ces deux vibrations. Par composition de ces vibrations on obtient une vibration dont l'amplitude a est

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos\delta = (a_1 + a_2)^2 - 4a_1a_2\sin^2\frac{\delta}{2}.$$

Après substitution des expressions de a_1 et a_2, on trouve que l'intensité de la lumière transmise est

$$I = \cos^2(\beta - \alpha) - \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin^2\frac{\delta}{2}. \qquad (79.3)$$

Les formules (79.3) et (79.1) fournissent l'explication de toutes les particularités des interférences de la lumière polarisée en rayons parallèles. Lorsque la lumière est monochromatique et l'épaisseur de la lame est partout la même, toutes les grandeurs figurant dans (79.3) sont constantes et la lame est *éclairée uniformément*. Si on fait tourner l'analyseur ou le polariseur de 90°, l'expression (79.3) s'écrira

$$I' = \sin^2(\beta - \alpha) + \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin^2\frac{\delta}{2}.$$

Par conséquent $I + I' = 1$. Ce résultat est évident, puisque toute la lumière qui était transmise avant rotation sera arrêtée après rotation et toute la lumière qui était arrêtée avant sera transmise après la rotation. Dans le cas particulier de nicols parallèles ($\alpha = \beta$)

on a

$$I = 1 - \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\delta}{2}, \tag{79.4}$$

et dans le cas de nicols croisés

$$I' = \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\delta}{2}. \tag{79.5}$$

En lumière blanche décomposée en ses composantes spectrales, le premier terme de (79.3) reste constant, tandis que le second dépend de la longueur d'onde et détermine la coloration du champ de vision. Si la direction P coïncide avec l'une des directions princi-

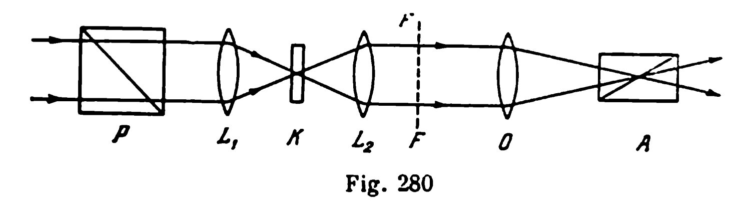


Fig. 280

pales de la lame ($\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi/2$), on a $I = \cos^2(\beta - \alpha)$, i.e. l'intensité lumineuse I est constante et ne dépend pas de la longueur d'onde. Dans ce cas il n'y a pas d'interférences et avec de la lumière blanche le champ de vision est uniformément éclairé sans coloration aucune. On peut faire varier son éclairement en tournant le nicol analyseur A, mais il restera blanc.

6. Les phénomènes que l'on observe lors des *interférences en rayons polarisés convergents* sont plus compliqués. Le schéma de montage utilisé pour l'observation des phénomènes est représenté sur la figure 280. Un faisceau de rayons parallèles d'une lumière polarisée rectilignement est transformé par la lentille L_1 en un faisceau convergent qui se concentre sur la lame cristalline K. Après traversée de la lame K, chaque rayon se dédouble en deux rayons parallèles entre lesquels apparaît une différence de marche. La superposition de ces rayons fournit une lumière elliptique; la différence de marche des rayons ainsi que les caractéristiques de la polarisation elliptique dépendent de l'inclinaison du rayon incident. La lentille L_2, identique à L_1, rend les rayons à nouveau parallèles. La répartition de l'éclairement dans le plan focal FF de la lentille est projetée par l'objectif O et par le nicol analyseur A sur un écran où on observe la figure d'interférence.

Pour se faire une idée de la forme des franges d'interférence, introduisons la notion de *surface isochromatique* (surface de même teinte). Choisissons un point O dans un milieu cristallin illimité et imaginons que des ondes planes de même phase passent par ce point dans toutes les directions. Deux ondes polarisées rectilignement dans deux plans rectangulaires se propagent suivant chaque normale d'on-

de. A une distance r du point O apparaît une différence de marche $\Delta = (n_2 - n_1)\, r$, où n_1 et n_2 sont les indices de réfraction de ces ondes. Ayant fixé la valeur de Δ, portons le long des normales des segments de longueur $r = \Delta/(n_2 - n_1)$. Le lieu géométrique des extrémités de ces segments est la surface de même différence de phase entre les ondes se propageant le long d'une seule et même normale. Ce sont ces surfaces que l'on appelle *surfaces isochromatiques*. Lorsqu'on considère différentes valeurs de Δ, on obtient une *famille de surfaces isochromatiques* de centre O commun. Les lignes qui re-

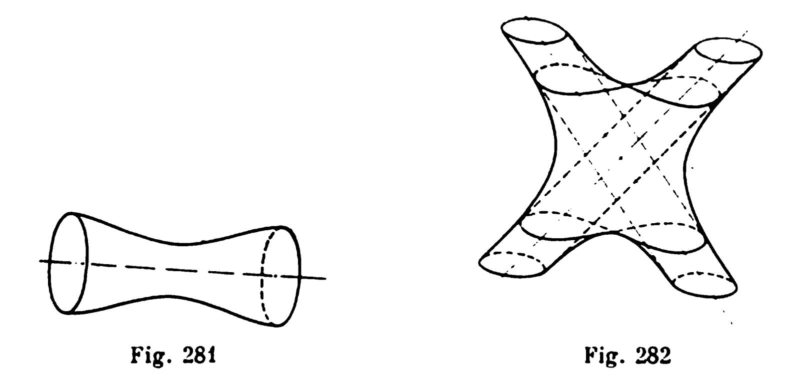


Fig. 281 Fig. 282

présentent l'intersection de ces surfaces par des plans sont appelées *lignes isochromatiques*. Chacune de ces lignes correspond à une *valeur constante de la différence de phase* entre les ondes pouvant se propager le long d'une seule et même normale d'onde.

Pour un cristal uniaxe la surface isochromatique est une surface de révolution par rapport à l'axe optique (fig. 281) qui s'éloigne à l'infini le long de cet axe, car suivant cette direction les deux indices n_1 et n_2 coïncident. Pour les cristaux biaxes on trouve deux directions jouissant de cette propriété (fig. 282). Ce sont les axes optiques ou plus exactement les axes des normales (cf. § 80). Nous n'établirons pas les équations des surfaces isochromatiques et nous nous limiterons à quelques considérations qualitatives.

Rappelons que les ondes interférentes résultent de la biréfringence d'une seule et même onde incidente. Les normales aux ondes qui se propagent dans la lame cristalline ont des directions légèrement différentes, mais nous négligerons cette différence, comme nous l'avons fait pour remplacer la formule exacte (79.1) par la formule approchée (79.2). Nous montrerons plus loin que dans cette approximation on peut identifier les franges d'interférences à une certaine famille de lignes isochromatiques. Imaginons, en effet, que l'on ait placé un petit diaphragme sur la face antérieure de la lame cristalline K (fig. 280). (Le diaphragme est inutile si le foyer image de la lentille L_1

est situé sur la face antérieure de la lame.) Confondons le centre du diaphragme avec le centre O de la famille de surfaces isochromatiques. La face postérieure de la lame K coupera cette famille de surfaces suivant des lignes isochromatiques. Dans l'approximation que nous utilisons, ces lignes coïncident avec les lignes d'interférences qui se forment sur la face postérieure de la lame K. Si le système optique forme une image de cette surface sur un écran, on obtient une image semblable du système de lignes d'interférences. Avec une mise au point différente, du fait de la réfraction des normales à l'émergence de la lame K, la similitude entre les lignes isochromatiques et les lignes d'interférences sera imparfaite. Néanmoins l'aspect de ces dernières n'en sera pas trop affecté et les lignes isochromatiques reproduisent d'une façon qualitativement correcte la forme des franges d'interférences.

La forme des lignes isochromatiques et des franges d'interférences dépend de la symétrie du cristal et de l'orientation de ses axes optiques. La figure 283 représente les franges d'interférences formées par une lame de cristal uniaxe, taillée perpendiculairement à son axe optique. Du fait de la symétrie axiale, les franges se présentent sous forme d'anneaux concentriques. Cette figure a été obtenue entre nicols croisés. Une croix sombre est superposée aux anneaux ; son origine s'explique très simplement. Une lumière polarisée rectilignement tombe sur la lame K. Considérons le plan de section principale et un plan qui lui est perpendiculaire. Posons que ces deux plans se coupent suivant l'axe de révolution du système. N'étant pas soumis à la biréfringence, les rayons contenus dans ces plans n'interfèrent pas. Après avoir traversé la lame, les deux ensembles de rayons conservent leur polarisation rectiligne et leur direction de vibration. Le nicol analyseur assure l'extinction de ces rayons. La croix dont il est question se forme tout autour des droites suivant lesquelles ces plans de vibration coupent le plan de l'écran. Si on place les nicols en position parallèle, la figure d'interférences est remplacée par la figure complémentaire, la croix noire étant remplacée par une croix blanche.

Si dans l'expérience ci-dessus on remplace la lame K par deux lames superposées de quartz droit et gauche, taillées perpendiculairement à l'axe optique, on observera des figures d'interférences appelées *spirales d'Airy* (fig. 284). L'apparition de ces spirales est due à ce que le quartz *tourne le plan de polarisation*. Le quartz droit tourne le plan dans un sens et le quartz gauche le tourne en sens inverse.

La figure 285 représente les lignes isochromatiques formées sur une lame taillée dans un cristal uniaxe parallèlement à son axe optique et la figure 286 les lignes formées sur une lame taillée dans un cristal biaxe perpendiculairement à la bissectrice de l'angle formé par ses axes optiques.

7. Les interférences des rayons polarisés sont mises en œuvre pour déceler et étudier l'anisotropie optique des corps faiblement anisotropes. On utilise généralement à cet effet un appareil en lu-

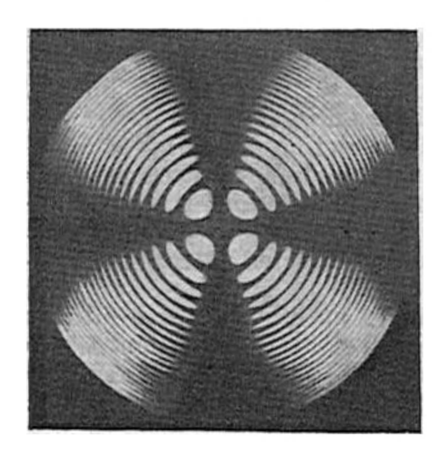


Fig. 283

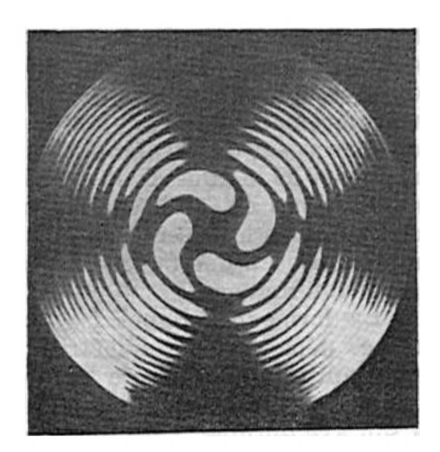


Fig. 284

mière parallèle à nicols croisés, représenté sur la figure 278. A la place de la lame cristalline, on dispose l'échantillon étudié. En l'absence de l'échantillon, le système optique ne laisse passer aucune

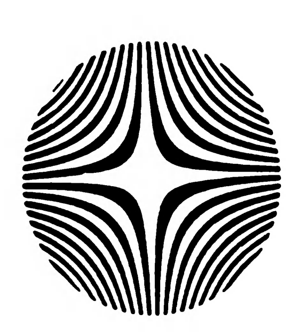


Fig. 285

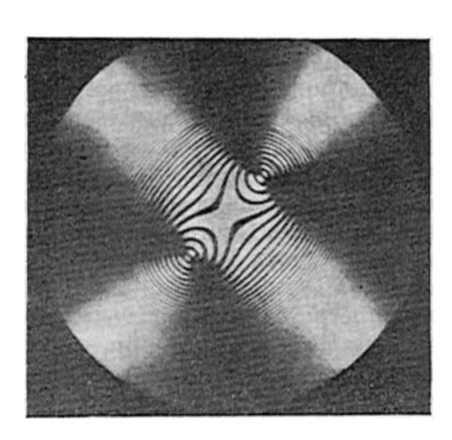


Fig. 286

lumière. Lorsqu'on introduit un échantillon possédant une certaine anisotropie, le champ de vision devient plus clair et si on travaille en lumière blanche, il se teinte. Cette méthode est utilisée pour étudier l'*anisotropie accidentelle* ou *artificielle*.

En 1815, Brewster découvrit la *biréfringence par déformation* des corps isotropes. Le milieu peut être constitué de molécules anisotropes; en l'absence de déformation, ces molécules étant orientées de façon parfaitement désordonnée, le milieu est macroscopiquement isotrope. Si on le déforme, la disposition et l'orientation spatiale des molécules se modifient et il apparaît une orientation privilégiée des molécules qui détermine la biréfringence. Dans le cas simple d'une compression ou d'une traction unilatérale, le corps se comporte comme un cristal uniaxe dont l'axe optique est dirigé suivant la direction de la déformation. L'expérience montre que la différence $n_o - n_e$ des indices ordinaire et extraordinaire est proportionnelle à l'effort appliqué, le coefficient de proportionnalité étant fonction de la longueur d'onde. L'effet se conserve en présence de déformations résiduelles et on le met à profit pour déceler les contraintes élastiques et les déformations résiduelles dans les corps solides. Une biréfringence se manifeste dans les liquides à molécules anisotropes lors de leur écoulement (effet Maxwell), ainsi qu'en soumettant les corps à l'action de champs électriques et magnétiques (cf. §§ 90 et 91).

PROBLÈMES

1. Expliquer pourquoi on n'observe jamais d'interférences entre les rayons ordinaire et extraordinaire sortant d'une lame biréfringente tellement mince que les rayons ne se séparent pas de façon notable.

2. Expliquer pourquoi il est plus commode de réaliser des expériences de démonstration des interférences des rayons polarisés avec des lames minces qu'avec des lames épaisses. Pourquoi est-il difficile de produire en lumière blanche des figures d'interférences même avec des lames minces en spath d'Islande?

R é p o n s e. La différence entre les indices ordinaire et extraordinaire du spath d'Islande est tellement grande que même avec des lames minces on obtient une différence de marche trop importante pour donner lieu à des interférences en lumière blanche.

3. Deux lames épaisses taillées dans un cristal uniaxe, d'épaisseurs presque égales, également orientées, transmettent chacune de la lumière blanche lorsqu'on les place entre deux nicols croisés. Pour quelle raison apparaît-il une coloration lorsqu'on fait tourner de 90° une lame par rapport à l'autre?

S o l u t i o n. Lorsque les lames ont la même orientation, la différence de marche qu'elles introduisent est grande, i. e. correspond à un grand ordre d'interférence. On ne peut donc observer dans ce cas d'interférences en lumière blanche. Si on fait tourner de 90° l'une des lames par rapport à l'autre, elles introduiront une différence de marche égale à celle qu'introduirait une lame dont l'épaisseur serait égale à la différence des épaisseurs des lames considérées. Si la différence des épaisseurs est petite, la différence de marche est assez petite pour donner lieu à des interférences en lumière blanche.

4. Une lame de quartz de 1 mm d'épaisseur a été taillée perpendiculairement à l'axe optique. Comment fera-t-on pour déterminer si le quartz est droit ou gauche, en disposant de deux nicols et d'une source: 1) de lumière monochromatique, 2) de lumière blanche?

R é p o n s e. 1) En plaçant la lame dont le plan est perpendiculaire à l'axe optique entre des nicols croisés et en l'éclairant avec de la lumière monochromatique, le système transmet de la lumière. On réalise l'extinction de la

lumière transmise en tournant l'analyseur d'un angle inférieur à 90°. Si on doit faire tourner l'analyseur dans le sens horaire, c'est que le quartz est droit et si c'est dans le sens antihoraire, c'est que le quartz est gauche.

2) Si on éclaire le système avec de la lumière blanche, la lame apparaîtra teintée. Comme le pouvoir rotatoire augmente à mesure que la longueur d'onde diminue, lors de la rotation de l'analyseur dans le sens horaire la coloration évoluera vers les ondes courtes si le quartz est droit et vers les ondes longues si le quartz est gauche.

§ 80. Vitesses normales et polarisation des ondes dans les cristaux biaxes

1. Nous allons étudier maintenant le propagation des ondes dans des *cristaux biaxes au point de vue optique*. Dans le cas général, le vecteur $\boldsymbol{D}$ peut dépendre non seulement du vecteur $\boldsymbol{E}$, mais encore de ses dérivées spatiales. Ce phénomène est désigné sous le nom de *dispersion spatiale* (cf. § 96). Dans les champs faibles on peut admettre que cette dépendance est linéaire. Pour les ondes monochromatiques planes la différentiation de $\boldsymbol{E}$ par rapport aux coordonnées x, y, z se réduit à une multiplication de ses projections par $-ik_x$, $-ik_y$, $-ik_z$. Dans ce cas la variation de $\boldsymbol{D}$ en fonction des dérivées spatiales peut être prise en compte par la formule (75.2), à condition de considérer que le tenseur diélectrique ε_{kj} est complexe. Formellement on peut le faire même si les ondes ne sont pas planes, mais on doit admettre alors qu'elles sont monochromatiques.

Pour les milieux non absorbants, le tenseur diélectrique doit être *hermitien*, i. e. $\varepsilon_{kj} = \varepsilon_{jk}^*$. En effet, selon l'électrodynamique, la dérivée de la densité u de l'énergie électromagnétique par rapport au temps est (cf. t. III, § 84)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} (\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{D}} + \boldsymbol{H}\dot{\boldsymbol{B}}).$$

Pour une onde monochromatique se propageant dans un milieu non absorbant, selon la loi de la conservation de l'énergie, la valeur moyenne de cette dérivée doit être nulle. Si on utilise l'expression complexe du champ monochromatique, cette condition s'écrit sous la forme $(\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{D}}^* + \boldsymbol{H}\dot{\boldsymbol{B}}^*)$ + conj. compl. = 0. Mais comme nous négligeons toute différence entre $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{H}$, on a $\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{D}}^*$ + conj. compl. = 0. Compte tenu des relations $\dot{\boldsymbol{D}} = i\omega \boldsymbol{D}$, $\dot{\boldsymbol{D}}^* = -i\omega \boldsymbol{D}^*$, on en déduit $\boldsymbol{E}\boldsymbol{D}^* - \boldsymbol{E}^*\boldsymbol{D} = 0$ ou

$$\sum E_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta}^* E_\beta^* - \sum E_\alpha^* \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta = 0.$$

Remplaçons dans la première somme l'indice muet α par β et inversement ; alors

$$\sum (\varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\beta\alpha}^*) E_\alpha^* E_\beta = 0.$$

Cette égalité doit être vérifiée pour tout champ E, ce qui est possible si et seulement si $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon^*_{\beta\alpha}$. Supposons en effet que toutes les composantes du vecteur E, sauf une E_α, soient nulles. L'égalité précédente devient alors $(\varepsilon_{\alpha\alpha} - \varepsilon^*_{\alpha\alpha}) E_\alpha E^*_\alpha = 0$, d'où $\varepsilon_{\alpha\alpha} = \varepsilon^*_{\alpha\alpha}$. Supposons maintenant que deux composantes E_α et E_β soient différentes de zéro, la troisième étant nulle. On aura alors

$$(\varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon^*_{\beta\alpha}) E^*_\alpha E_\beta + (\varepsilon_{\beta\alpha} - \varepsilon^*_{\alpha\beta}) E_\alpha E^*_\beta = 0.$$

En posant $E_\alpha = E_\beta$ on obtient

$$(\varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon^*_{\beta\alpha}) + (\varepsilon_{\beta\alpha} - \varepsilon^*_{\alpha\beta}) = 0.$$

Si on pose $E_\beta = iE_\alpha$ on aura

$$(\varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon^*_{\beta\alpha}) - (\varepsilon_{\beta\alpha} - \varepsilon^*_{\alpha\beta}) = 0.$$

On déduit de ces deux dernières relations: $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon^*_{\beta\alpha}$. Ainsi l'égalité $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon^*_{\beta\alpha}$ est vérifiée que les indices α et β soient identiques ou différents, ce qui signifie que pour les cristaux non absorbants le tenseur $\varepsilon_{\alpha\beta}$ est hermitien. Pour les cristaux absorbants il n'est pas hermitien.

Supposons maintenant que le milieu ne présente pas de dispersion spatiale ou qu'elle est tellement petite qu'on puisse la négliger. Les quantités $\varepsilon_{\alpha\beta}$ sont alors réelles et par suite $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\beta\alpha}$, ce qui signifie que le tenseur $\varepsilon_{\alpha\beta}$ est *symétrique*. Dans ce qui suit nous ne considérerons que ce cas. Supposons encore que tous les éléments diagonaux $\varepsilon_{\alpha\alpha}$ soient *positifs*; le milieu est alors *transparent* et les ondes planes s'y propagent sans atténuation. Dans le cas contraire, on observera une atténuation sans absorption, comme cela se produit dans le plasma par exemple (cf. § 87).

Tout tenseur symétrique peut être mis sous une *forme diagonale*, ce qui revient à trouver un système de coordonnées rectangulaires où les éléments non diagonaux du tenseur s'annulent. Nous noterons ε_x, ε_y, ε_z les composantes diagonales du tenseur rapporté à ce système de coordonnées (indices x, y, z simples et non pas doubles). Dans ce système les équations matérielles sont de la forme

$$D_\alpha = \varepsilon_\alpha E_\alpha. \tag{80.1}$$

Les axes de coordonnées, par rapport auxquels le tenseur $\varepsilon_{\alpha\beta}$ est diagonal, sont appelés *axes principaux du tenseur* ou encore *axes diélectriques du cristal*, et les grandeurs ε_x, ε_y, ε_z sont les *permittivités diélectriques principales*. Nous prendrons ces axes pour axes de coordonnées en les indexant X, Y, Z dans un ordre tel que soient vérifiées les inégalités

$$\varepsilon_x \leqslant \varepsilon_y \leqslant \varepsilon_z. \tag{80.2}$$

Comme les composantes du tenseur $\varepsilon_{\alpha\beta}$ peuvent dépendre de la longueur d'onde λ, les directions des axes diélectriques peuvent en dépendre aussi. Ce phénomène dit *dispersion des axes diélectriques* existe réellement dans les cristaux tricliniques et monocliniques, dont la symétrie est la plus basse.

Notons enfin que l'angle α entre les vecteurs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{D}$ est toujours aigu. Cela tient à ce que le produit scalaire $(\boldsymbol{ED}) = ED \cos \alpha$ est proportionnel à la densité d'énergie électrique qui est essentiellement positive.

2. Procédons à uue étude générale des ondes planes (75.3) se propageant dans les cristaux transparents. Fixons la direction de la normale d'onde $\boldsymbol{N}$ et cherchons les ondes planes pouvant se propager dans cette direction. A l'aide de (80.1) récrivons la relation (75.7) sous la forme

$$(v^2 - a_\alpha^2)\, D_\alpha = -c^2\, (\boldsymbol{NE})\, N_\alpha, \tag{80.3}$$

où on a utilisé la notation

$$a_\alpha = c/\sqrt{\varepsilon_\alpha}. \tag{80.4}$$

En divisant par $v^2 - a_\alpha^2$ on obtient

$$D_\alpha = -\frac{c^2}{v^2 - a_\alpha^2}\,(\boldsymbol{NE})\, N_\alpha. \tag{80.5}$$

Multiplions les deux membres de (80.5) par N_α et sommons sur α. On trouve alors

$$\sum_\alpha D_\alpha N_\alpha \equiv (\boldsymbol{DN}) = -c^2 (\boldsymbol{NE}) \sum_\alpha \frac{N_\alpha^2}{v^2 - a_\alpha^2} = 0,$$

puisque $(\boldsymbol{DN}) = 0$. Le produit scalaire $(\boldsymbol{NE})$ est généralement différent de zéro. Par suite

$$\sum \frac{N_\alpha^2}{v^2 - a_\alpha^2} = 0. \tag{80.6}$$

Sous forme développée

$$\frac{N_x^2}{v^2 - a_x^2} + \frac{N_y^2}{v^2 - a_y^2} + \frac{N_z^2}{v^2 - a_z^2} = 0, \tag{80.7}$$

et après élimination des dénominateurs

$$F(v^2) \equiv N_x^2 (v^2 - a_y^2)(v^2 - a_z^2) + N_y^2 (v^2 - a_z^2)(v^2 - a_x^2) + N_z^2 (v^2 - a_x^2)(v^2 - a_y^2) = 0. \tag{80.8}$$

Quoique l'équation (80.8) ait été déduite de (80.7), elle jouit d'une généralité plus grande que (80.7). Pour arriver à (80.7) il a fallu admettre que $v^2 - a_\alpha^2 \neq 0$ et $(\boldsymbol{NE}) \neq 0$. L'équation (80.7) perd toute signification si au moins l'une des différences $v^2 - a_\alpha^2$ devient nulle. Quant à l'équation (80.8) elle reste vérifiée même dans ce cas, mais nous omettrons d'en faire la démonstration, qui est d'ailleurs fort simple.

3. L'équation (80.6) ou (80.8) exprime la *loi de Fresnel pour les vitesses normales de propagation des ondes lumineuses dans les cristaux.* Si on se donne la direction de la normale N, ces équations permettent de calculer la vitesse normale v. L'équation (80.8) est du second degré en v^2. Démontrons qu'elle possède des racines non seulement réelles, mais encore positives. Pour les cristaux transparents, les permittivités diélectriques principales et donc les quantités a_α^2 sont essentiellement positives, et en raison de la condition (80.2)

$$a_x \geqslant a_y \geqslant a_z. \qquad (80.9)$$

En attribuant les valeurs a_x^2, a_y^2, a_z^2 à l'argument v^2 de la fonction $F(v^2)$, on obtient les inégalités:

$$F(a_x^2) = N_x^2 (a_x^2 - a_y^2)(a_x^2 - a_z^2) \geqslant 0,$$
$$F(a_y^2) = N_y^2 (a_y^2 - a_z^2)(a_y^2 - a_x^2) \leqslant 0,$$
$$F(a_z^2) = N_z^2 (a_z^2 - a_x^2)(a_z^2 - a_y^2) \geqslant 0.$$

Ces inégalités montrent que la fonction $F(v^2)$ change de signe deux fois, une première fois entre a_x^2 et a_y^2 et une seconde fois entre a_y^2 et a_z^2. Il en résulte que l'équation $F(v^2) = 0$ possède deux racines réelles et positives: v_1^2 et v_2^2, avec

$$a_x \geqslant v_1 \geqslant a_y \geqslant v_2 \geqslant a_z. \qquad (80.10)$$

Il s'ensuit que deux ondes peuvent se propager suivant la direction N: l'une avec la vitesse normale v_1, l'autre avec la vitesse normale v_2. Dans certains cas particuliers les vitesses v_1 et v_2 peuvent coïncider.

Si les vitesses v_1 et v_2 sont différentes, chacune des ondes sera polarisée rectilignement. Cela résulte de la relation

$$D_x : D_y : D_z = \frac{N_x}{v^2 - a_x^2} : \frac{N_y}{v^2 - a_y^2} : \frac{N_z}{v^2 - a_z^2}, \qquad (80.11)$$

qui découle de (80.5) et où on entend par v soit v_1 soit v_2. Comme toutes les grandeurs figurant dans le second membre de (80.11) sont réelles, il n'y a pas de déphasages différents de 0 ou π entre les composantes D_x, D_y, D_z et par suite les ondes sont polarisées rectilignement.

Démontrons encore que si les vitesses v_1 et v_2 sont différentes, les vecteurs D des deux ondes qui peuvent se propager suivant la direction de N sont rectangulaires. En désignant par l'indice 1 les grandeurs se rapportant à l'une des ondes et par l'indice 2 les grandeurs se rapportant à l'autre onde, on tire de (75.7)

$$v_1^2 D_1 - c^2 E_2 = -c^2 (NE_1) N,$$
$$v_2^2 D_2 - c^2 E_2 = -c^2 (NE_2) N.$$

Multiplions scalairement la première équation par D_2 et la seconde par D_1 et faisons la différence des résultats. Comme $(D_1 N) = (D_2 N) =$

$= 0$, on obtient

$$(v_1^2 - v_2^2) D_1 D_2 = c^2 (E_1 D_2 - E_2 D_1).$$

Comme chacun de ces produits scalaires est égal à $\sum \varepsilon_\alpha E_{1\alpha} E_{2\alpha}$, on a évidemment $E_1 D_2 = E_2 D_1$. Il en résulte que

$$(v_1^2 - v_2^2) D_1 D_2 = 0.$$

Pour $v_1 \neq v_2$, $(D_1 D_2) = 0$, ce qu'il fallait démontrer. On démontre de même que $(B_1 B_2) = 0$.

*Suivant n'importe quelle direction choisie dans le cristal, peuvent se propager deux ondes polarisées rectilignement dont les vitesses sont, en général, différentes. Ces deux ondes sont transversales par rapport aux vecteurs **D** et **B**. Les vecteurs **D** (ainsi que les vecteurs **B**) de ces ondes sont rectangulaires. Ces deux ondes ne sont pas transversales par rapport au vecteur **E**, à l'exclusion des cas où le vecteur **E** est parallèle à l'un des axes diélectriques du cristal.* Néanmoins on ne peut classer les ondes en ondes ordinaire et extraordinaire que pour les *cristaux uniaxes*. Dans le cas général ce classement n'a pas de sens, puisque les deux ondes se comportent dans les cristaux comme des ondes extraordinaires.

Pour dégager la signification physique des constantes a_α, orientons le vecteur E suivant l'axe diélectrique α. On a alors $D = \varepsilon_\alpha E$ et l'équation (75.8) se ramène à

$$v^2 = c^2 \frac{\varepsilon_\alpha E^2}{\varepsilon_\alpha^2 E^2} = \frac{c^2}{\varepsilon_\alpha} = a_\alpha^2,$$

d'où $v = a_\alpha$. Ainsi *la quantité a_α est la vitesse normale de propagation de l'onde dont le vecteur électrique est parallèle à l'axe diélectrique α.* Cette proposition devient parfaitement évidente en remarquant que dans le cas particulier où le champ électrique est parallèle à l'axe diélectrique, les équations de propagation des ondes dans le cristal ne se distinguent pas des équations dans les milieux isotropes.

Les quantités a_α sont appelées *vitesses principales de propagation de la lumière dans les cristaux.* A côté des vitesses principales, on utilise pour caractériser les propriétés optiques des cristaux les *indices de réfraction principaux* définis par

$$n_\alpha = c/a_\alpha = \sqrt{\varepsilon_\alpha}. \qquad (80.12)$$

Pour une onde de direction arbitraire, l'indice de réfraction du cristal est défini par

$$n = c/v. \qquad (80.13)$$

Comme le montre (75.8) sa valeur est déterminée de façon univoque par la direction du vecteur D ou E. A chaque direction de la normale N correspondent *deux* valeurs de l'indice de réfraction, conformément aux deux polarisations possibles de l'onde.

4. Pour l'étude de l'équation de Fresnel nous utiliserons une méthode géométrique. Faisons passer des droites par un point arbitraire O, dans toutes les directions, et portons sur chacune de ces droites des segments dont les longueurs sont égales aux valeurs des vitesses normales dans ces directions. Le lieu géométrique des extrémités de ces segments est appelé *surface des normales*. Dans tout cristal, à chaque direction de la normale correspondent deux valeurs de la vitesse. Il s'ensuit que dans un cristal la surface des normales

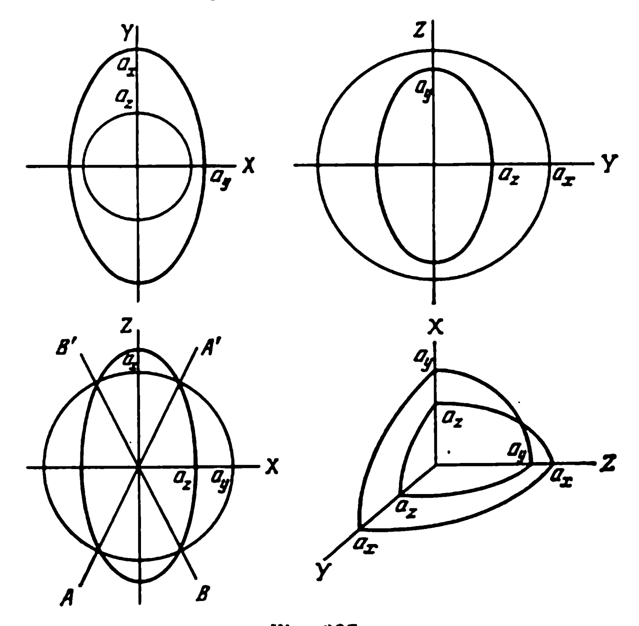


Fig. 287

est une *surface double*, i. e. comporte deux nappes. C'est une surface de sixième ordre qui est fort complexe. Pour se faire une idée de la surface des normales des ondes électromagnétiques dans un cristal, considérons les sections de cette surface par les plans de coordonnées XY, YZ, ZX.

Section par le plan XY. La normale d'onde est située dans le plan XY, i. e. $N_z = 0$. L'équation de Fresnel (80.8) prend la forme

$$(v^2 - a_z^2)\,[N_x^2 (v^2 - a_y^2) + N_y^2 (v^2 - a_x^2)] = 0.$$

On en tire deux valeurs des vitesses normales:

$$v_2 = a_z, \quad v_1^2 = N_x^2 a_y^2 + N_y^2 a_x^2. \qquad (80.14)$$

La vitesse v_2 ne dépend pas de la direction de N et il lui correspond une *section circulaire* de la surface des normales (fig. 287). La vitesse

v_1 varie avec la direction de N et il lui correspond une section de la surface des normales ayant une *forme ovale*. Il résulte des équations (80.14) : $v_1 \geqslant v_2$, ce qui implique que le cercle est tout entier contenu dans l'ovale. Le vecteur $\boldsymbol{D}$ doit être perpendiculaire à $\boldsymbol{N}$. En raison de la symétrie il est clair que le vecteur $\boldsymbol{D}$ de l'une des ondes est parallèle à l'axe Z et le vecteur $\boldsymbol{D}$ de l'autre onde est parallèle au plan XY. A la première direction du vecteur $\boldsymbol{D}$ correspond la *section circulaire* de la surface des normales et à la seconde la *section ovale*.

Section par le plan YZ. La normale N à l'onde est contenue dans le plan YZ, i. e. $N_x = 0$. L'équation de Fresnel correspondante est

$$(v^2 - a_x^2)\,[N_y^2\,(v^2 - a_z^2) + N_z^2\,(v^2 - a_y^2)] = 0.$$

Elle fournit deux valeurs des vitesses normales:

$$v_1 = a_x, \quad v_2^2 = N_y^2 a_z^2 + N_z^2 a_y^2. \qquad (80.15)$$

La vitesse v_1 ne dépend pas de la direction de N; à cette vitesse correspond une *section circulaire* de la surface des normales et le vecteur $\boldsymbol{D}$ parallèle à l'axe X. La vitesse v_2 dépend de la direction de la normale $\boldsymbol{N}$. A cette vitesse correspond une *section ovale* de la surface des normales et le vecteur $\boldsymbol{D}$ parallèle au plan YZ. Cette section est entièrement contenue à l'intérieur du cercle, puisque $v_2 \leqslant v_1$, conformément aux équations (80.15).

Section par le plan ZX. La normale N à l'onde est contenue dans le plan ZX, i. e. $N_y = 0$. L'équation de Fresnel s'écrit

$$(v^2 - a_y^2)\,[N_z^2\,(v^2 - a_x^2) + N_x^2\,(v^2 - a_z^2)] = 0$$

et fournit deux valeurs des vitesses normales:

$$v_1 = a_y, \quad v_2^2 = N_z^2 a_x^2 + N_x^2 a_z^2. \qquad (80.16)$$

La vitesse v_1 ne dépend pas de la direction de N et il lui correspond une *section circulaire* de la surface des normales et le vecteur $\boldsymbol{D}$ parallèle à l'axe Y. La vitesse v_2 varie en fonction de la direction de la normale N. Il lui correspond une *section ovale* de la surface des normales et le vecteur $\boldsymbol{D}$ parallèle au plan ZX.

5. Le troisième cas se distingue essentiellement des deux premiers. Dans les deux premiers cas l'ovale ne coupe pas le cercle, tandis que dans le troisième ils se coupent en quatre points (fig. 287). Cela signifie qu'il existe dans le plan ZX *deux directions* AA' et BB' symétriques par rapport à l'axe Z, le long desquelles les deux ondes se propagent avec la même vitesse normale. *Les directions suivant lesquelles les vitesses normales des ondes sont les mêmes sont appelées axes optiques de seconde espèce ou axes des normales, ou encore binormales.*

Si dans un cristal les trois vitesses principales a_x, a_y, a_z *sont différentes, il existe dans ce cristal deux et seulement deux axes optiques de seconde espèce.* En effet, si le vecteur N est orienté suivant un axe

optique de seconde espèce, on doit avoir $v_1 = v_2$. En vertu des relations (80.10), ce n'est possible que si $v_1 = v_2 = a_y$; or dans ce cas l'équation (80.8) fournit le résultat suivant : $N_y^2 (a_y^2 - a_z^2)(a_y^2 - a_x^2) = 0$. Comme par hypothèse $a_x \neq a_y \neq a_z$, il en résulte $N_y = 0$, ce qui implique que les axes optiques sont situés dans le plan ZX. Or nous avons démontré ci-dessus que ce plan contient deux et seulement deux axes optiques de seconde espèce qui sont symétriques par rapport à l'axe Z et font avec cet axe un certain angle β. Pour trouver β il suffit de substituer les expressions de v_1 et v_2 fournies par (80.16) dans l'égalité $v_1 = v_2$. On obtient ainsi

$$a_y^2 = N_z^2 a_x^2 + N_x^2 a_z^2 \quad \text{ou} \quad a_y^2 (N_x^2 + N_z^2) = N_z^2 a_x^2 + N_x^2 a_z^2,$$

d'où

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{N_x}{N_z} = \sqrt{\frac{a_x^2 - a_y^2}{a_y^2 - a_z^2}}. \tag{80.17}$$

Ainsi se trouve justifié le terme « cristal optiquement biaxe » que nous avons déjà utilisé.

Lorsque deux des trois vitesses principales coïncident ($a_x = a_y$ ou $a_y = a_z$) les axes optiques se confondent en un seul axe parallèle à l'axe Z (si $a_x = a_y$) ou à l'axe X (si $a_y = a_z$). Le cristal devient *uniaxe au point de vue optique*. Enfin, dans le cas où les trois vitesses principales seraient égales, n'importe quelle direction dans le cristal jouit des propriétés d'axe optique. Dans ces cristaux les ondes planes se propagent avec la même vitesse, quelles que soient les polarisations et les directions des ondes, et les cristaux se comportent comme des *milieux isotropes*. Les cristaux cubiques font partie des cristaux isotropes *).

PROBLÈMES

1. Quelle doit être l'orientation d'une lame taillée dans un cristal biaxe pour que les mesures au réfractomètre fournissent les valeurs des trois indices de réfraction principaux?

Réponse. La lame doit être orientée perpendiculairement à l'un des axes diélectriques du cristal.

2. En se basant sur des considérations de symétrie, démontrer que tous les cristaux tri-, tétra- et hexagonaux sont uniaxes au point de vue optique.

---

*) On doit noter cependant qu'en cas de *dispersion spatiale* les cristaux cubiques peuvent être optiquement anisotropes. Déjà H. A. Lorentz nota cette possibilité, mais ce n'est qu'en 1960 que E. F. Gross et A. A. Kaplianski observèrent le phénomène d'absorption anisotrope de la lumière dans des monocristaux de Cu_2O.

§ 81. Rayons lumineux et normales aux plans d'onde

1. La propagation de la lumière dans les cristaux, tout comme celle de n'importe quelles ondes dans les milieux anisotropes, présente une remarquable *dualité* ou *réciprocité*. Cette réciprocité est déterminée par ce que, dans les milieux anisotropes, on peut associer à toute normale de l'onde un rayon lumineux, i. e. une droite le long de laquelle se propage l'énergie de l'onde. Comme l'énergie se propage avec la vitesse de groupe, pour étudier les propriétés des rayons et pour justifier la notion même de rayon, il faut calculer la vitesse de groupe dans un milieu anisotrope (on l'appelle parfois *vitesse radiale*). On la calcule à l'aide de la formule (8.16) en y posant $\omega = kv(k)$. En dérivant par rapport à k_i et en remarquant que $\partial k/\partial k_i = k_i/k$, on obtient

$$\frac{\partial \omega}{\partial k_i} = v\frac{k_i}{k} + k\frac{\partial v}{\partial k_i}.$$

On en déduit le vecteur vitesse de groupe

$$\boldsymbol{u} = v\boldsymbol{N} + k\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{k}}, \tag{81.1}$$

où $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{k}/k$ est le vecteur unitaire de la normale à l'onde et v la *vitesse normale*, i. e. la vitesse de propagation de la phase suivant la normale à l'onde.

Dans un milieu anisotrope la vitesse de groupe $\boldsymbol{u}$ diffère de la vitesse normale v d'un terme additionnel $k\,\partial v/\partial \boldsymbol{k}$. Ce terme comporte à son tour une composante suivant la normale $\boldsymbol{N}$, que l'on détermine en remarquant que $\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{N}$; elle est donc égale à $\boldsymbol{k}\,\partial v/\partial \boldsymbol{k}$. L'expression de la vitesse de groupe $\boldsymbol{u}_N$ suivant la normale $\boldsymbol{N}$ est

$$\boldsymbol{u}_N = \left(v + k\frac{\partial v}{\partial k}\right)\boldsymbol{N} = \left(v - \lambda\frac{\partial v}{\partial \lambda}\right)\boldsymbol{N}. \tag{81.2}$$

Ce résultat coïncide avec la formule de Rayleigh (8.6) pour la vitesse de groupe dans un milieu isotrope. On pouvait s'y attendre, puisque ce résultat concerne non pas le vecteur vitesse de groupe lui-même, mais seulement sa projection sur la direction de la normale à l'onde. Le calcul de cette projection se fait exactement de la même manière que le calcul de la vitesse de groupe dans un milieu isotrope.

La différence entre u_N et v résulte de la *dispersion des ondes*, i. e. de la variation de la vitesse normale v avec la fréquence ω. La dispersion se manifeste aussi bien dans les milieux isotropes que dans les milieux anisotropes. Les particularités de la propagation des ondes dans les cristaux sont déterminées non pas tant par la dispersion que par ce que *les directions des normales aux ondes sont différentes de celles des rayons*. Pour ne pas compliquer les choses, nous négligerons totalement la dispersion en posant que les cristaux

ne sont pas dispersifs. Dans ces conditions $\partial v/\partial\lambda = 0$ et par suite $\boldsymbol{u}_N = vN$ ou $u_N = v$. Mais $u_N = (\boldsymbol{u}N)$, de sorte que

$$(\boldsymbol{u}N) = v. \tag{81.3}$$

2. Introduisons, en plus de la surface des normales définie au paragraphe précédent, la *surface d'onde* (ou *surface radiale*). Faisons passer par un point arbitraire O des rayons dans toutes les directions et portons sur ces rayons les valeurs de la vitesse radiale dans ces directions. Le lieu géométrique des extrémités de ces segments est une surface fermée appelée *surface d'onde.*

Si on construit la surface d'onde et la surface des normales à partir d'un centre O commun, on peut établir entre ces surfaces une relation simple et importante. Pour cela multiplions (81.3) par k et écrivons le résultat sous la forme

$$(\boldsymbol{u}\boldsymbol{k}) = \omega. \tag{81.4}$$

Il s'ensuit que les variations infinitésimales des grandeurs $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{k}$, ω sont liées entre elles par la relation $(\boldsymbol{u}\,\delta\boldsymbol{k}) + (\boldsymbol{k}\,\delta\boldsymbol{u}) = \delta\omega$. Par définition de la vitesse de groupe, $(\boldsymbol{u}\,\delta\boldsymbol{k}) = \delta\omega$; par conséquent $(\boldsymbol{k}\,\delta\boldsymbol{u}) = 0$ ou

$$(N\delta\boldsymbol{u}) = 0. \tag{81.5}$$

Comme $\boldsymbol{u}$ est le rayon-vecteur de la surface d'onde, tout vecteur infiniment petit $\delta\boldsymbol{u}$ est contenu dans un plan tangent à cette surface en un point de contact correspondant. Il résulte des formules (81.5) et (81.3) que *le plan tangent à la surface d'onde est perpendiculaire à la normale à l'onde considérée et coupe sur cette normale un segment dont la longueur est égale à la vitesse normale de l'onde.* On en déduit que *la surface d'onde est l'enveloppe des ondes planes qui sont émises par unité de temps du centre O de la surface d'onde dans toutes les directions.* Ces théorèmes expriment la relation géométrique entre la surface d'onde et la surface des normales.

On peut dire aussi que *le plan tangent à la surface d'onde est le front d'onde correspondant au rayon mené par le point de contact.* Ainsi formulé, le théorème s'interprète de façon particulièrement simple. La surface d'onde est la surface de phase égale à laquelle les perturbations émises par une source ponctuelle parviennent en une seconde. Un petit élément de cette surface peut être considéré comme plan. Si les dimensions de cet élément de surface sont très grandes devant la longueur d'onde, sa propagation au cours d'un intervalle de temps court sera régie avec une précision suffisante par les lois de l'optique géométrique. Selon ces lois cet élément de surface doit se propager le long du rayon comme une onde plane illimitée, les vitesses radiale et normale étant liées par la relation (81.3). Il s'ensuit que le front d'onde est le plan tangent à la surface d'onde.

8–0791

Cette interprétation simple ne peut cependant servir de démonstration rigoureuse. Celle-ci se fonde sur l'assertion qu'un faisceau divergent issu d'une source ponctuelle se comporte comme un système d'ondes planes indépendantes dont la propagation se laisse représenter géométriquement par la surface d'onde. Lamé (1795-1870) nota dès 1852 qu'il s'agissait là d'un problème mathématique ardu consistant à représenter en termes de mathématiques tout le complexe d'ondes envoyées dans un milieu anisotrope par une source ponctuelle (par analogie avec une onde sphérique se propageant dans un milieu isotrope). Lamé résolut ce problème pour le cas d'un *milieu anisotrope élastique* et en éliminant les ondes longitudinales il obtint effectivement une surface d'onde de même forme que celle qu'établit Fresnel. En théorie électromagnétique, le problème analogue se ramène au calcul du champ créé par un *dipôle de Hertz ponctuel placé dans un milieu anisotrope homogène.*

3. Tous les résultats obtenus plus haut s'appliquent à *n'importe quelles ondes se propageant dans un milieu anisotrope.* Le comportement particulier des ondes électromagnétiques se propageant dans un milieu cristallin résulte de ce que la direction des rayons coïncide avec celle du *vecteur de Poynting.* Démontrons-le pour le cas d'un milieu cristallin non dispersif. Dans ce cas la vitesse radiale le long de la normale à l'onde est $u_N = vN = v^2N/v$ et en vertu de (75.8)

$$u_N = \frac{c^2}{D^2 v}(DE)N. \tag{81.6}$$

Calculons la composante de la vitesse radiale $u_\perp = k\,\partial v/\partial k$ qui est perpendiculaire à la normale à l'onde. En multipliant la formule (80.6) par k^2, mettons-la sous la forme

$$\sum_\alpha \frac{k_\alpha^2}{v^2 - a_\alpha^2} = 0.$$

En différentiant cette expression par rapport à k_i, on obtient

$$\sum_\alpha \frac{k_\alpha\, \partial k_\alpha/\partial k_i}{v^2 - a_\alpha^2} - \sum_\alpha \frac{k_\alpha^2}{(v^2 - a_\alpha^2)^2}\, v \frac{\partial v}{\partial k_i} = 0,$$

ou compte tenu des relations $\partial k_\alpha/\partial k_i = \delta_{\alpha i}$ et $k_i = kN_i$,

$$(u_\perp)_i\, v \sum_\alpha \frac{N_\alpha^2}{(v^2 - a_\alpha^2)^2} = \frac{N_i}{v^2 - a_i^2}.$$

La formule (80.5) donne

$$\frac{1}{v^2 - a_\alpha^2} = -\frac{D_\alpha}{c^2 (NE) N_\alpha}, \quad \sum_\alpha \frac{N_\alpha^2}{(v^2 - a_\alpha^2)^2} = \frac{1}{c^4} \frac{D^2}{(NE)^2}.$$

En portant ces expressions dans la relation précédente et en exprimant le résultat sous forme vectorielle on trouve

$$u_{\perp} = -\frac{c^2 (NE)}{vD^2} D. \qquad (81.7)$$

Il s'ensuit que

$$u = u_N + u_{\perp} = \frac{c^2}{vD^2} \{(DE) N - (NE) D\} = \frac{c^2}{vD^2} [E [ND]].$$

D'après la première formule (75.5)

$$[ND] = -\frac{c}{v} [N [NH]] = \frac{c}{v} H,$$

et d'après (75.8) $v^2D^2 = c^2 (DE) = c^2H^2$, de sorte que

$$vD = cH. \qquad (81.8)$$

On obtient finalement

$$u = \frac{c}{H^2} [EH].$$

Ainsi la vitesse radiale u et par conséquent le rayon lumineux lui-même sont dirigés suivant le vecteur de Poynting. Comme les vecteurs E et H sont rectangulaires, on a $[EH] = EHs$, où s est le vecteur unitaire suivant le rayon. Par suite

$$u \equiv us = \frac{cE}{H} s. \qquad (81.9)$$

Pour faire cette démonstration nous avons admis que le produit scalaire (NE) n'était pas nul. Si $(NE) = 0$, le vecteur E est parallèle à l'un des axes diélectriques du cristal et le théorème est évident.

4. Nous avons justifié la notion de rayon lumineux ainsi que sa direction en partant de la vitesse de groupe dans un milieu anisotrope. Nous n'avons pas utilisé le théorème de Poynting, afin de bien montrer que la notion de rayon et les propriétés de celui-ci ne sont pas propres aux ondes électromagnétiques seulement, mais s'appliquent aux ondes de *toute nature physique*. D'autre part, le théorème de Oumov-Poynting n'est démontré de façon rigoureuse que pour les flux d'énergie à travers les *surfaces fermées*. La localisation spatiale du flux d'énergie implique des considérations supplémentaires. Dans les limites de validité de l'optique géométrique, i. e. là où la notion de rayon lumineux est valable, la localisation du flux d'énergie ne se heurte à aucune difficulté. Dans ces conditions le théorème de Oumov-Poynting fournit une méthode aussi simple que générale pour résoudre tous les problèmes liés à la notion de rayons lumineux.

Soit, par exemple, AB un élément d'un front d'onde plan, délimité par un diaphragme interposé sur le trajet d'une onde électromagnétique (fig. 288). Si les dimensions de cet élément de surface sont grandes par rapport à la longueur d'onde, l'optique géométrique est applicable et il suffit de déterminer les directions des rayons

lumineux. Construisons sur l'élément de surface AB pris comme base un cylindre $ABA'B'$ dont le génératrices coïncident avec les directions du vecteur de Poynting. Le flux d'énergie électromagnétique à travers la surface latérale du cylindre sera alors identiquement nul et ne subsisteront que les flux à travers les bases AB et $A'B'$. L'énergie qui pénètre à travers AB s'écoule toute entière à travers $A'B'$. Or les rayons lumineux de l'optique géométrique se comportent exactement de la même façon. Il s'ensuit que les directions des rayons lumineux et du vecteur de Poynting doivent coïncider *non seulement dans les milieux non dispersifs* (comme nous l'avons admis dans la démonstration donnée dans ce qui précède), *mais aussi dans les milieux dispersifs*.

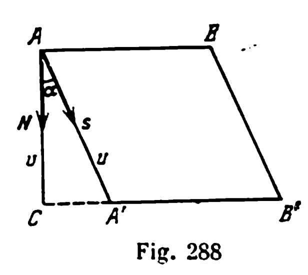


Fig. 288

5. La dualité propre à l'optique des milieux cristallins, dont il a été question au début de ce paragraphe, s'exprime en théorie électromagnétique par le *théorème* dit *d'inversion*. Cet important théorème permet de mieux s'orienter parmi la multitude des formules compliquées de l'optique des milieux cristallins et aide à mettre en évidence les liens existant entre ces formules. On dira, en simplifiant beaucoup, que ce théorème permet de supprimer la moitié des formules et des théorèmes de l'optique des milieux cristallins que l'on devrait connaître. Pour établir ce théorème multiplions vectoriellement par s la première équation (75.5). On obtient

$$[sD] = -\frac{c}{v}[s[NH]] = \frac{c}{v}\{(Ns)H - (sH)N\} = \frac{c}{v}(Ns)H.$$

D'après (81.3), $u(Ns) = v$. En éliminant (Ns) on trouve $H = \frac{u}{c}[sD]$. On trouve de même $E = -\frac{u}{c}[sH]$. On obtient ainsi deux séries de formules:

$$\begin{aligned} D &= -\frac{c}{v}[NH], & E &= -\frac{u}{c}[sH], \\ H &= \frac{c}{v}[NE], & H &= \frac{u}{c}[sD], \\ N &= \frac{1}{DH}[DH], & s &= \frac{1}{EH}[EH], \\ D_\alpha &= \varepsilon_\alpha E_\alpha, & E_\alpha &= \frac{1}{\varepsilon_\alpha} D_\alpha. \end{aligned} \tag{81.10}$$

Tous les résultats relatifs à la propagation des ondes planes dans des cristaux homogènes avaient été obtenus à l'aide de la première série de formules. Or on peut déduire les formules de la seconde

série de celles de la première série par un procédé purement formel consistant à effectuer les substitutions suivantes:

$$\begin{matrix} D & H & N & c & v & \varepsilon_\alpha \\ E & H & s & 1/c & 1/u & 1/\varepsilon_\alpha \end{matrix} \tag{81.11}$$

Il s'ensuit que *toute relation entre les grandeurs caractérisant la propagation d'ondes planes dans un milieu cristallin homogène restera vérifiée si on remplace toutes les grandeurs qui y figurent par les grandeurs correspondantes selon le schéma* (81.11). Sont correspondantes deux grandeurs disposées l'une au-dessus de l'autre dans les rangées (81.11). C'est l'énoncé du *théorème d'inversion*.

6. A l'aide de ce théorème il est facile de calculer la vitesse radiale dans un cristal connaissant la direction du rayon s. Remplaçons dans l'équation (80.6) ou (80.7) N par s, v par $1/u$ et a_α par $1/a_\alpha$; on obtient

$$\sum_\alpha \frac{s_\alpha^2}{(1/u)^2-(1/a_\alpha)^2}=0 \tag{81.12}$$

ou

$$\sum_\alpha \frac{a_\alpha^2 s_\alpha^2}{u^2-a_\alpha^2}=0. \tag{81.13}$$

Cette équation exprime la *loi de Fresnel pour la vitesse radiale dans un milieu cristallin*. Elle est analogue à la loi de Fresnel pour la vitesse normale et peut être étudiée par les mêmes procédés. Une telle étude est superflue, puisqu'on peut déduire tous les résultats à l'aide du théorème d'inversion. Résumons ces résultats.

L'équation (81.13) *est du second degré en* u^2. *Elle possède deux racines réelles positives* u_1^2 *et* u_2^2 *pour chaque direction de* s, *qui sont telles que*

$$a_x \geqslant u_1 \geqslant a_y \geqslant u_2 \geqslant a_z. \tag{81.14}$$

Deux rayons polarisés rectilignement peuvent se propager le long de n'importe quelle direction dans le cristal avec les vitesses radiales u_1 *et* u_2 *qui sont différentes dans le cas général. Les vecteurs électriques de ces deux rayons sont rectangulaires.*

La surface d'onde, tout comme la surface des normales, comporte *deux nappes*. C'est une surface de *quatrième ordre*. Examinons les sections de cette surface par les plans de coordonnées XY, YZ, ZX. On peut utiliser la figure 287, car les sections de la surface d'onde par les plans de coordonnées ne se distinguent pas qualitativement des sections de la surface des normales par les mêmes plans. La différence qui existe étant difficile à représenter graphiquement, il est préférable de la caractériser par des formules mathématiques. La section de la surface des normales par des plans fournit des *cercles*

et des *ovales*. Les sections de la surface d'onde sont des *cercles* et des *ellipses*.

Section par le plan XY. Le rayon $\boldsymbol{s}$ est situé dans le plan XY, i. e. $s_z = 0$. La vitesse radiale peut prendre deux valeurs:

$$u_2 = a_z, \quad \frac{1}{u_1^2} = \frac{s_x^2}{a_y^2} + \frac{s_y^2}{a_x^2}. \tag{81.15}$$

La vitesse u_2 ne dépend pas de la direction du rayon; il lui correspond une *section circulaire* de la surface d'onde. La vitesse u_1 varie en fonction de la direction du rayon et la section correspondante a la *forme d'une ellipse*. Sous forme vectorielle l'équation de cette section est $\boldsymbol{r} = u_1\boldsymbol{s}$, d'où $s_x = x/u_1$, $s_y = y/u_1$. En portant ces valeurs dans (81.15) on obtient

$$\frac{x^2}{a_y^2} + \frac{y^2}{a_x^2} = 1, \tag{81.16}$$

qui est l'équation d'une ellipse de demi-axes a_y et a_x. Compte tenu de (81.14) $u_1 \geqslant u_2$, de sorte que le cercle est contenu tout entier dans l'ellipse. Le vecteur $\boldsymbol{E}$ doit être perpendiculaire à $\boldsymbol{s}$. Par raison de symétrie, le vecteur $\boldsymbol{E}$ d'une onde est parallèle à l'axe Z et le vecteur $\boldsymbol{E}$ de l'autre onde est parallèle au plan XY. A la première direction du vecteur $\boldsymbol{E}$ correspond la section circulaire de la surface d'onde et à la seconde la section elliptique.

Section par le plan YZ. Dans ce plan les vitesses radiales peuvent avoir deux valeurs:

$$u_1 = a_x, \quad \frac{1}{u_2^2} = \frac{s_y^2}{a_z^2} + \frac{s_z^2}{a_y^2}. \tag{81.17}$$

La vitesse u_1 ne dépend pas de la direction du rayon; il lui correspond la section circulaire de la surface d'onde et le vecteur $\boldsymbol{E}$ parallèle à l'axe X. La vitesse u_2 varie avec la direction du rayon. La section correspondante est une ellipse d'équation

$$\frac{y^2}{a_z^2} + \frac{z^2}{a_y^2} = 1, \tag{81.18}$$

et le vecteur $\boldsymbol{E}$ est contenu dans le plan ZX. Selon (81.14) $u_1 \geqslant u_2$, de sorte que l'ellipse est contenue toute entière dans le cercle.

Section par le plan ZX. La vitesse radiale est définie par deux expressions:

$$u_1 = a_y, \quad \frac{1}{u_2^2} = \frac{s_z^2}{a_x^2} + \frac{s_x^2}{a_z^2}. \tag{81.19}$$

A la vitesse u_1 correspond la section circulaire de la surface d'onde et le vecteur $\boldsymbol{E}$ parallèle à l'axe Y. Pour u_2 on obtient une ellipse d'équation

$$\frac{z^2}{a_x^2} + \frac{x^2}{a_z^2} = 1, \tag{81.20}$$

et le vecteur E est contenu dans le plan ZX. L'ellipse et le cercle se coupent en quatre points (fig. 287) ; par suite, il existe dans le plan ZX deux directions AA' et BB' symétriques par rapport à l'axe Z, le long desquelles deux rayons se propagent avec la même vitesse radiale. Ces directions sont appelées *axes optiques de première espèce* ou *axes radiaux.*

Si dans un cristal les trois vitesses principales a_x, a_y, a_z sont différentes, il peut y avoir deux et seulement deux axes optiques de première espèce ; ces axes sont contenus dans le plan ZX et sont symétriques par rapport à l'axe Z. L'angle γ que fait l'un de ces axes avec l'axe Z est défini par la formule

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{s_x}{s_z} = \sqrt{\frac{(1/a_x^2)-(1/a_y^2)}{(1/a_y^2)-(1/a_z^2)}} = \frac{a_z}{a_x} \sqrt{\frac{a_x^2-a_y^2}{a_y^2-a_z^2}}\,. \tag{81.21}$$

En comparant cette formule avec la formule (80.17) on obtient

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{a_z}{a_x} \operatorname{tg} \beta. \tag{81.22}$$

Il résulte de (81.22) que $\gamma < \beta$, ce qui signifie que *les axes optiques de première espèce sont situés plus près de l'axe Z que les axes optiques de seconde espèce.* Généralement, a_x et a_z ne sont pas très différents et par suite l'angle entre les axes de première et de seconde espèce est petit et on peut le négliger dans l'étude de nombreux phénomènes. Pour le mica il est égal à 40′ environ.

Si deux vitesses principales sont égales, les axes optiques de seconde espèce se confondent en un seul axe qui est dirigé parallèlement à l'axe Z (pour $a_x = a_y$) ou à l'axe X (pour $a_y = a_z$). Dans ce cas les axes optiques de première et de seconde espèce sont confondus. Enfin, si les trois vitesses principales sont égales, toute direction choisie au hasard dans le cristal jouit des propriétés d'axe optique.

D'après le nombre d'axes optiques de première espèce, on classe les cristaux en : 1) *cristaux biaxes*, 2) *cristaux uniaxes* et 3) *cristaux optiquement isotropes.* Cette classification coïncide avec celle qui est basée sur le nombre d'axes optiques de seconde espèce.

7. Notons encore un corollaire du théorème d'inversion qui nous sera utile dans le paragraphe suivant. En multipliant scalairement l'équation (75.7) par s et en remarquant que $(Es) = 0$, on obtient

$$(Ds) = -\frac{c^2}{v^2}(NE)(Ns) = -\frac{c^2}{uv}(NE). \tag{81.23}$$

Transformons la relation (80.3) en appliquant le théorème d'inversion :

$$\left(\frac{1}{u^2}-\frac{1}{a_\alpha^2}\right) E_\alpha = -\frac{1}{c^2}(sD)\, s_\alpha,$$

ce qui s'écrit, en vertu de (81.23),

$$\frac{a_\alpha^2-u^2}{a_\alpha^2}E_\alpha=\frac{u}{v}(NE)\,s_\alpha.$$

Multiplions et divisons le premier membre par ε_α et tenons compte des relations $D_\alpha = \varepsilon_\alpha E_\alpha$, $a_\alpha^2\varepsilon_\alpha = c^2$. On obtient

$$(a_\alpha^2-u^2)\,D_\alpha=\frac{c^2u}{v}(NE)\,s_\alpha. \tag{81.24}$$

En identifiant (81.24) et (80.3) on trouve

$$u\,(a_\alpha^2 - v^2)\,s_\alpha = v\,(a_\alpha^2 - u^2)\,N_\alpha, \tag{81.25}$$

d'où

$$\frac{us_\alpha}{a_\alpha^2-u^2}=\frac{vN_\alpha}{a_\alpha^2-v^2}\,. \tag{81.26}$$

En multipliant (81.26) par N_α et sommant sur α on obtient, compte tenu de (80.6),

$$\sum_\alpha \frac{N_\alpha s_\alpha}{a_\alpha^2-u^2}=0 \tag{81.27}$$

ou

$$N_xs_x\,(a_y^2-u^2)\,(a_z^2-u^2)+N_ys_y\,(a_z^2-u^2)\,(a_x^2-u^2)+$$
$$+N_zs_z\,(a_x^2-u^2)\,(a_y^2-u^2)=0.$$

Cette dernière relation présente un caractère plus général que (81.27), car sa validité n'est pas liée à l'hypothèse selon laquelle $a_\alpha^2 - u^2 \neq \neq 0$.

8. L'application du théorème établissant une liaison entre la surface d'onde et la surface des normales (voir le point 2) permet de construire l'une de ces surfaces connaissant l'autre. Soit, par exemple, ACB une région de la surface d'onde de centre O (fig. 289). En tout point de cette surface faisons passer un plan tangent et abaissons du point O une perpendiculaire à ce plan. Le lieu géométrique des pieds de ces perpendiculaires est la surface des normales. Inversement, pour construire la surface d'onde à partir de la surface des normales, on fera passer par le centre O des rayons vecteurs dans toutes les directions et aux points où ils coupent la surface des normales on dressera des plans perpendiculaires aux rayons vecteurs. L'enveloppe de ces plans est la surface d'onde.

Supposons qu'on connaisse la position du front d'onde plan dans le cristal à un instant t. Pour construire le front d'onde à un instant ultérieur t', on peut procéder de la façon suivante en se fondant sur le théorème démontré. Menons par tous les points du front d'onde initial des ondes élémentaires dont les rayons vecteurs sont égaux aux produits des rayons vecteurs correspondants de la surface

d'onde par $(t' - t)$. Le plan tangent à toutes les ondes élémentaires définit la position du front d'onde à l'instant t'. Comme il existe deux plans tangents, on retiendra celui auquel correspond l'onde possédant la polarisation convenable. On trouve la direction du rayon lumineux en reliant le centre de l'onde élémentaire avec le point de contact correspondant.

Cette construction est une généralisation de la *construction d'Huygens* pour les milieux isotropes. Huygens l'élabora pour interpréter la biréfringence et postuler que dans les cristaux l'onde élémentaire est composée de deux ondes: une *onde sphérique* et une *onde ellipsoïdale*. Les ondes sphériques produisent les *ondes ordinaires* et les ondes ellipsoïdales les *ondes extraordinaires*. Cette hypothèse d'Huygens a été pleinement justifiée mais elle n'est vraie que pour les *cristaux optiquement uniaxes*.

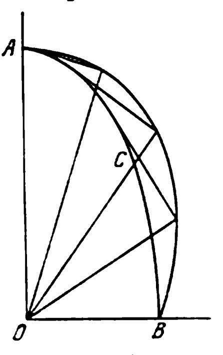


Fig. 289

§ 82. Réfraction conique

1. Lorsque la normale N à l'onde est parallèle à l'un des axes optiques de seconde espèce, les vitesses normales v_1 et v_2 des deux ondes sont égales et les directions des vecteurs D deviennent indéterminées. Il en résulte que dans la direction d'un axe optique de seconde espèce il peut se propager une onde plane de n'importe quelle polarisation, la vitesse de propagation étant indépendante de son état de polarisation. A ce point de vue ce cas présente des analogies avec la propagation dans un milieu isotrope. Mais si le cristal est biaxe, il existe entre ces deux cas des différences notables.

Dans un milieu isotrope les directions des vecteurs D et E ainsi que des vecteurs N et S coïncident toujours. Il en va tout autrement pour une onde se propageant suivant un axe optique d'un cristal biaxe. Dans ce cas le vecteur D peut prendre n'importe quelle direction perpendiculaire à N et comme N est contenu dans le plan ZX, une des directions possibles du vecteur D est l'axe Y. Ce n'est que dans ce cas que la direction du vecteur D coïncide avec celle du vecteur E et la direction de la normale N avec celle du rayon s. Dans tous les autres cas la normale à l'onde et le rayon ont des directions différentes. En attribuant à D toutes les directions possibles normales à l'axe optique on définit une infinité de directions pour le rayon s. La direction du vecteur s devient *indéterminée*. Nous allons démontrer que dans ce cas tous les rayons lumineux forment un cône de second degré.

Pour le démontrer nous utiliserons la relation (81.27) qui est vérifiée pour toute direction de la normale à l'onde. Comme la normale N à l'onde est dirigée suivant l'axe optique, on a $N_y = 0$ et la relation (81.27) s'écrit

$$\frac{N_x s_x}{a_x^2 - u^2} + \frac{N_z s_z}{a_z^2 - u^2} = 0,$$

ce qui donne

$$a_z^2 N_x s_x + a_x^2 N_z s_z = u^2 (Ns).$$

En vertu de (81.3) $u(Ns) = v = a_y$. Par conséquent

$$(a_z^2 N_x s_x + a_y^2 N_z s_z)(N_x s_x + N_z s_z) = a_y^2.$$

Considérons un point arbitraire sur le rayon s de rayon vecteur $r(x, y, z)$. Il est évident que $x_\alpha = rs_\alpha$ et la relation précédente s'écrit

$$(a_z^2 N_x x + a_y^2 N_z z)(N_x x + N_z z) = a_y^2 (x^2 + y^2 + z^2). \qquad (82.1)$$

Cette équation homogène de second degré représente un *cône*. Les génératrices du cône sont les rayons lumineux correspondant à la normale N parallèle à l'un des axes optiques de seconde espèce du cristal. Le cône défini par (82.1) caractérise la *réfraction conique intérieure*. La normale à l'onde est l'une des génératrices du cône (82.1) puisque les directions de s et de N coïncident lorsque le vecteur D est parallèle à l'axe diélectrique Y.

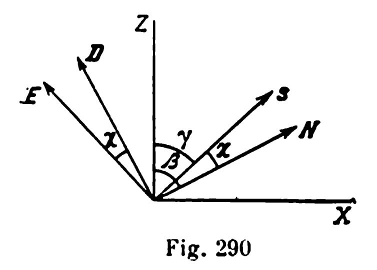


Fig. 290

2. Le front d'onde

$$Nr = N_x x + N_z z = a_y \qquad (82.2)$$

coupe le cône de réfraction conique intérieure suivant un cercle. En effet, la ligne d'intersection est définie par le système formé par les équations (82.1) et (82.2), qui est équivalent au système

$$a_z^2 N_x x + a_y^2 N_z z = a_y (x^2 + y^2 + z^2), \quad Nr = a_y. \qquad (82.3)$$

La première équation est celle d'une sphère et la seconde est l'équation d'un plan. La sphère et le plan se coupent suivant un cercle, ce qui démontre notre proposition.

Déterminons l'angle d'ouverture du cône de réfraction conique intérieure, plus exactement l'angle χ déterminé par l'intersection de ce cône et du plan ZX passant par l'axe optique du cristal (fig. 290). Lorsque le vecteur D est parallèle à l'axe diélectrique Y, les vecteurs s et N, ainsi que l'axe optique de seconde espèce, ont même direction. Lorsque le vecteur D est situé dans le plan ZX, le rayon s y est également situé, puisque les quatre vecteurs E, D, s, N doivent être toujours situés dans un même plan (cf. § 75). L'angle χ est égal à l'angle que font entre eux les vecteurs D et E, puisque les côtés de ces angles sont rectangulaires. Comme dans le cas considéré la vitesse normale v est égale à a_y, on peut déterminer cet angle à l'aide de la formule (75.8). On trouve

$$\cos\chi = \frac{D}{E}\left(\frac{a_y}{c}\right)^2.$$

D'après la figure 290, $D_x = -D\cos\beta$, $D_z = D\sin\beta$, où β est l'angle que fait l'axe optique de seconde espèce avec l'axe Z. Par suite

$$E_x = \frac{D_x}{\varepsilon_x} = -\frac{D\cos\beta}{c^2}a_x^2, \quad E_z = \frac{D_z}{\varepsilon_z} = \frac{D\sin\beta}{c^2}a_z^2.$$

En portant ces expressions dans la formule donnant $\cos\chi$ on obtient

$$\cos\chi = \frac{a_y^2}{\sqrt{a_x^4\cos^2\beta + a_z^4\sin^2\beta}},$$

d'où

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{1}{a_y^2}\sqrt{a_x^4\cos^2\beta + a_z^4\sin^2\beta - a_y^4}.$$

En utilisant la formule (80.17) on obtient, après quelques réarrangements

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{1}{a_y^2}\sqrt{(a_x^2 - a_y^2)(a_y^2 - a_z^2)}. \qquad (82.4)$$

La section du cône de réfraction conique intérieure par la surface d'onde est un cercle ; le front d'onde est tangent à la surface d'onde le long de ce cercle. Ce résultat découle directement du théorème démontré au § 81 (pt. 2).

3. Le théorème d'inversion permet d'étendre les résultats obtenus aux rayons lumineux. Si le rayon est dirigé dans le cristal biaxe suivant un des axes optiques de première espèce, il lui correspond une infinité de normales formant un cône. Ce cône est le *cône de réfraction conique extérieure.* Le rayon lumineux est l'une des génératrices de ce cône. La section du cône de réfraction conique extérieure par un plan perpendiculaire au rayon est un cercle. L'angle d'ouverture du cône est donné par l'équation

“♦«s/(-g—è) 5>w—›• “‘■>

Menons un plan tangent à la surface d'onde au point *S* où elle coupe l'axe radial. Ce plan est perpendiculaire à la normale à l'onde et comme il existe une infinité de normales correspondant au rayon dirigé suivant l'axe radial, on peut mener par le point *S* une infinité de plans tangents à la surface d'onde. Cela signifie qu'à proximité de ce point la surface d'onde a une forme conique.

La figure 291 représente la section de la surface des normales et de la surface d'onde par le plan *ZX*. Le point *N* est le point double de la surface des normales, *ON* est l'axe optique de seconde espèce. La normale *NA* à cet axe représente la section du front d'onde par le plan de la figure. La droite *NA* est tangente en .4 à la surface d'onde, l'angle

X =*NOA* est l'angle d'ouverture du cône de ré: fraction conique intérieure, *S* est le point double de la surface d'onde, *OS* est Taxe radial. La tangente en *S* à la surface d'onde coupe la surface des normales en *B* ; la droite *OB* est l'une des normales à l'onde du rayon *OS*. Le rayon *OS* est la normale à l'onde plane qui est tangente en *S* à la section circulaire de la surface d'onde *u* = *ay*. L'angle ț>= _ *SOB* est l'angle d'ouverture du cône de réfraction conique extérieure. A chaque rayon appartenant au cône de réfraction conique intérieure, au rayon *OA* par exemple (fig. 291), correspond une polarisation rectiligne parfaitement déterminée. En effet, suivant la direction *OA* peuvent se propager deux rayons dont les vecteurs électriques sont rectangulaires, mais un seul de ces rayons correspond à l'onde se propageant suivant la normale *ON* à l'onde. A l'autre rayon correspond la vitesse radiale *OL* et donc une autre direction de la normale à l'onde. Une polarisation rectiligne bien déterminée correspond de même à chaque normale à l'onde appartenant au cône de réfraction conique extérieure.

Fig. 291

4. Le front d'onde *AN*, qui se propage suivant la direction de l'axe optique de seconde espèce *ON*, est tangent à la surface d'onde en tous les points de la section circulaire formée par intersection de cette surface par le cône ae réfraction conique intérieure. Ce front d'onde ne peut couper la surface d'onde. En effet, coupons la surface d'onde par le plan *ANO* passant par l'axe optique *ON* (fig. 292). La section en est la courbe *CBA*. La vitesse radiale étant finie, si le front *AN* coupait la surface d'onde, on pourrait trouver sur la courbe *CBA* deux points *B* et *C* tels que les projections des rayons vecteurs *OB* et *OC* sur la direction *ON* soient maximales ou minimales. Si on menait le plan *ANO* dans toutes les directions passant par l'axe optique *ON*, les points *B* et *C* décriraient des courbes fermées. On pourrait trouver sur ces courbes des points dont les rayons vecteurs auraient des projections sur la direction de la binormale *ON*, qui seraient

maximales ou minimales. Soit B un de ces points; le plan tangent BN' à la surface d'onde au point B sera alors parallèle au front d'onde AN, donc perpendiculaire à la binormale ON. Cela signifie que le plan BN' est un front d'onde se propageant suivant la direction de la binormale ON.

Ainsi, si le front d'onde NA coupait la surface d'onde, deux ondes pourraient se propager le long de la binormale à des vitesses normales différentes $v = ON$ et $v' = ON'$, ce qui mettrait en défaut la définition de la binormale. Comme

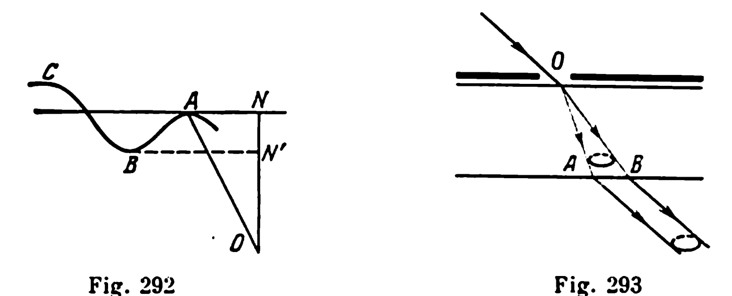


Fig. 292 Fig. 293

le front d'onde est en contact avec la surface d'onde le long d'une circonférence (aux points A), il résulte de la démonstration que la surface d'onde est située tout entière du côté du front d'onde AN où se trouve son centre O (fig. 291). Il s'ensuit qu'au point S la surface d'onde présente un *ombilic*.

5. Ayant éclairé ces relations géométriques, passons à une analyse de la réfraction conique intérieure qui avait été prévue, en 1832, par Hamilton (1805-1865). Le raisonnement de Hamilton était à peu de choses près le suivant. Soit une lame à faces parallèles taillée dans un cristal biaxe; recouvrons l'une de ses faces d'un écran opaque percé d'une petite ouverture O (fig. 293). Eclairons la lame avec un faisceau de rayons parallèles non polarisés de façon que, après réfraction sur la face antérieure, la normale à l'onde soit dirigée suivant l'un des axes optiques de seconde espèce — l'axe OA. Un cône de rayons réfractés correspond à la normale OA à l'onde. Comme l'énergie se propage le long des rayons, si l'ouverture O est petite à l'intérieur du cristal le faisceau lumineux formera un cône OAB. Après réfraction sur la face postérieure de la lame, la normale à l'onde reprendra sa direction initiale et comme dans les milieux isotropes les directions des rayons et des normales coïncident, tous les rayons émergent de la lame sous forme d'un faisceau en forme de cylindre creux dont la trace sur un écran est un anneau lumineux. Sur suggestion de Hamilton, Lloyd entreprit la recherche de ce phénomène; il le découvrit, en 1833, sur un cristal d'aragonite: une ellipse lumineuse apparut sur l'écran (pour l'aragonite l'angle d'ouverture χ du cône est égal à $1°52'$).

Quoique ce fût Hamilton qui prédit le phénomène de la réfraction conique, son explication du phénomène était incorrecte. A la suite d'études détaillées, il apparut que le phénomène avait une allure différente. Poggendorff (1796-1877) fit dans l'écran des trous plus petits et constata que l'anneau lumineux était *double*. Voigt (1850-1919) donna une explication du phénomène observé. Hamilton envisageait une onde parfaitement plane se propageant dans le cristal exactement le long de l'axe optique; or c'est physiquement irréalisable. Même si on arrivait à envoyer sur l'orifice O une onde rigoureusement plane, après traversée de cet orifice l'onde ne serait plus plane du fait de la diffraction. L'onde incidente se divise en un nombre infini d'ondes planes dont les directions de propagation sont proches de celle de l'axe optique. On ne peut donc se contenter de considérer une seule onde se propageant exactement le long de l'axe optique, puisqu'elle ne transporte qu'une partie infime de l'énergie incidente et on ne changerait rien au phénomène si on éliminait cette onde de l'en-

semble d'ondes planes. On doit donc envisager un nombre infini d'ondes planes dont les normales sont groupées autour de Taxe optique. C'est ce que fit Voigt.

Nous avons montré que lorsqu'une onde rigoureusement plane se propageait dans la direction d'un axe optique de seconde espèce, le front d'onde était tangent à la surface d'onde le long d'un cercle. Confondons le plan de ce cercle avec le plan de la figure 294. Soit *N* le point où l'axe optique coupe ce plan. Supposons qu'il existe un nombre infini d'ondes planes dont les normales sont contenues à l'intérieur d'un cône de faible ouverture dont l'axe est confondu avec l'axe optique. Le plan de la figure coupe ce cône suivant le cercle *k*. A chaque normale correspond un point se trouvant à r intérieur ou à la périphérie du cercle *k*. Déterminons les positions des rayons correspondants. A la normale *N* à l'onde correspond un faisceau conique de rayons coupant le plan de la figure suivant la circonférence *K*. Le contact entre la surface d'onde et le plan de la figure se fait le long de cette circonférence ; il s'ensuit que la courbure de la surface d'onde dans la direction de *K* est égale à zéro. D'autre part, la surface d'onde doit être située d'un côte du plan de la figure. Posons, pour concrétiser, que toutes les ondes se propagent vers le lecteur. La surface d'onde se trouvera alors derrière le plan de la figure et la partie de surface se trouvant au voisinage de la circonférence *K* sera convexe par rapport au lecteur. Cette partie de surface d'onde présente une forme annulaire.

Coupons la surface d'onde par deux plans parallèles PAPB et *AB* orthogonaux au plan de la figure et passant par les centres des circonférences *K* et *k*. Les segments infiniment courts *PAP*B et $P_a P_b$ sont perpendiculaires à la circonférence *K* et par suite la courbure de la surface d'onde sera maximale le long de ces segments et minimale suivant les directions perpendiculaires à ces segments. Il en résulte que les perpendiculaires à ces segments infinitésimaux doivent être situées dans le plan $P_a P^*_b$ et seront donc parallèles aux normales d'onde situées dans le plan *AB*. On en conclut que le plan tangent à la surface d'onde en un point du segment *PAP* ou du segment $P_a P'$ sera orthogonal à la normale à l'onde correspondante passant par le segment *AN*. D'autre part, le plan tangent à la surface d'onde en un point quelconque des segments PP_b et $P'P'_b$ sera orthogonal à la normale à l'onde passant par le segment *NB*. Cela signifie qu'à toute normale passant par le segment *AN* correspondent deux rayons, l'un passant par le segment PAP, l'autre par le segment $P_a P$ \ De même, à chaque normale à l'onde passant par le segment *NB* correspondent deux rayons passant parles segments *PPB* et $P'P_b$. Ainsi, à chaque normale inclinée d'un petit angle sur l'axe optique de seconde espèce correspondent deux rayons, l'un passant à l'intérieur du cône de réfraction conique intérieure, l'autre passant a l'extérieur de ce cône.

L'origine de l'anneau lumineux double de Poggendorff est maintenant évidente. Aux normales aux ondes qui coupent le plan de la figure à l'intérieur d'un petit cercle de rayon *dr* et de centre *N* correspond une petite partie d'énergie 3ui doit être répartie sur l'aire relativement grande *dS* de l'anneau, de part et autre de la circonférence *K*. Si on considérait les normales coupant le plan de la figure à l'intérieur d'un anneau de rayon moyen r et de même épaisseur dr, l'énergie revenant à ces normales serait beaucoup plus grande puisqu'elle serait proportionnelle à l'aire 2*nr dr* de l'anneau. Cette énergie doit se répartir entre tes aires de deux anneaux, l'un se trouvant en deçà et l'autre au-delà de la circonférence *K*. Ces aires sont égales toujours à l'aire *dS*, à des infiniment petits d'ordre supérieur près. De ce fait l'éclairement des deux anneaux sera beaucoup

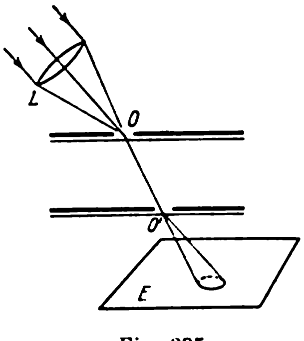


Fig. 295

plus grand que l'éclairement de la bague centrale proche de la circonférence K. L'éclairement doit être nul tout le long de la circonférence K et augmenter lorsqu'on s'en éloigne vers l'intérieur ou vers l'extérieur. Ainsi, là où selon Hamilton on devrait observer le maximum d'éclairement, règne l'obscurité.

6. Hamilton avait aussi prévu le phénomène de la *réfraction conique extérieure* qui fut découverte expérimentalement par Lloyd en 1833. Ce phénomène est déterminé par ce qu'à tout rayon lumineux se propageant le long d'un axe radial du cristal biaxe correspond un ensemble infini de normales aux ondes situées sur une surface conique. Sans entrer dans les détails de la théorie, il suffit de se référer au théorème d'inversion et de décrire l'effet qu'observa Lloyd. Les deux faces d'une lame d'aragonite à faces parallèles étaient recouvertes d'écrans percés de petits trous O et O' (fig. 295) centrés sur l'axe optique de première espèce. Une lentille L envoyait sur O un faisceau de rayons convergents. Les diaphragmes O et O' ne laissaient passer que les rayons qui se propageaient suivant l'axe optique OO'. A l'émergence de la lame, les rayons s'écartaient en formant un cône dont la trace sur un écran E était un anneau lumineux. Si les trous O et O' sont petits, l'anneau sera *double*.

§ 83. Remarques relatives à la réflexion et à la réfraction de la lumière sur les surfaces cristallines

1. Tout comme en optique des milieux isotropes, le problème de la réflexion et de la réfraction en optique des milieux cristallins peut être entièrement résolu sur la base des *conditions aux limites* que doivent vérifier les vecteurs du champ électromagnétique: des deux côtés de la surface de séparation, les composantes tangentielles des vecteurs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{H}$ doivent être égales. Le problème se scinde en deux parties: 1) une partie *géométrique* où on détermine les directions de propagation, la polarisation et les vitesses des ondes réfléchies et réfractées, et dans les cas des ondes évanescentes leur atténuation spatiale; 2) une partie *physique* où on détermine les amplitudes des ondes (qui sont complexes dans le cas général). Nous n'envisagerons ici que la partie géométrique du problème. Nous n'établirons pas les formules des amplitudes qui sont fort compliquées.

Faisons tomber une onde monochromatique plane de vecteur d'onde $\boldsymbol{k}_1$ sur une surface de séparation plane. Si le milieu est isotrope, il ne se forme qu'une seule onde réfléchie et une seule onde réfractée. Généralement, il n'en est pas ainsi si le milieu est anisotrope, mais quel que soit le nombre d'ondes réfléchies et réfractées, il résulte du caractère linéaire et homogène des conditions aux limites que les composantes tangentielles des vecteurs d'onde des ondes incidente, réfléchie et réfractée doivent être égales (cf. § 69). Il en résulte que *les normales aux ondes incidente, réfléchie et réfractée*

ainsi que la normale à la surface de séparation sont toutes contenues, dans un même plan. En outre, *la réfraction des normales aux ondes vérifie la loi de réfraction Snellius: le rapport du sinus de Vangle d'incidence au sinus de l'angle de réfraction est égal au rapport des vitesses normales correspondantes des ondes.* Pratiquement, cette loi ne sert pas à grand-chose. Cette loi ne suffit pas à trouver la normale à Tonde réfractée, puisqu'on *ne connaît pas* la vitesse normale de Tonde réfractée. Cette vitesse dépend de la direction de Tonde incidente et *doit être définie.* On y arrive par une méthode graphique,.

2. Considérons une des ondes réfractées. Supposons que $k = OA$ ou $k — OB$ est son vecteur d'onde. Conformément aux conditions aux limites, on peut poser connue la composante tangentielle de ce vecteur: $k_t = k_u$. Elle est située dans le plan d'incidence. Il reste à déterminer la composante normale k_n. On peutaffirmer tout d'abord qu'elle doit être dirigée de haut en bas vers le deuxième milieu, puisque Tonde réfractée doit *s'éloigner de la surface de séparation.* Pour trouver la solution du problème, on peut utiliser la construction géométrique suivante. Menons des droites du point O pris comme- centre (fig. 296) dans toutes les directions pointant vers le second milieu, et portons sur les droites les longueurs du vecteur d'onde k. Comme les directions de k et de N coïncident et à chaque direction de N correspondent deux valeurs de la vitesse normale, on peut également dire qu'à chaque direction de la normale N correspondent deux valeurs du nombre d'onde k. La construction fournit ainsi une surface complexe comportant deux nappes que nous appellerons surface des *vecteurs d'onde* *). Cette surface est liée simplement à la surface des. normales. Comme $k =$ co/u, la surface des vecteurs d'onde est *réciproque* par rapport à la surface des normales : les longueurs de ses rayons vecteurs sont inversement proportionnelles aux longueurs des rayons, vecteurs de la surface des normales, qui leur sont parallèles.

Coupons la surface des vecteurs d'onde par le plan d'incidence; la section obtenue se compose de deux courbes (fig. 296). Menons du point O, suivant la surface de séparation, la composante tangentielle $k_t = k_u$ du vecteur d'onde k et abaissons de son extrémité une perpendiculaire sur la surface de séparation. Cette perpendiculaire- coupe les deux courbes en deux points A et B. En reliant ces points au point O on obtient deux vecteurs OA et OB ; chacun de ces vecteurs, peut représenter le vecteur d'onde de Tonde réfractée.

***) Si au lieu de $k =$ ω/v on portait sur les droites la quantité *c!v%i.* e. Tindice de réfraction n, on obtiendrait une surface semblable à la surface des vecteurs d'onde. En optique des milieux cristallins on l'appelle *indicatrice* ou *surface des indices de réfraction.* Le rayon vecteur de cette surface indique la valeur de Tindice de réfraction pour une onde plane dont la normale coïncide- en direction avec ce rayon vecteur.**

Ainsi se trouvent définies les directions des normales N aux ondes et les valeurs correspondantes des vitesses normales. Connaissant la surface des vecteurs d'onde on peut construire d'abord la surface des normales, puis la surface d'onde et déterminer les directions des

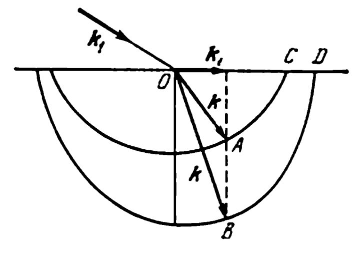


Fig. 296

rayons correspondants et les vitesses radiales. Les vecteurs N et s déterminent la direction du champ magnétique H, puisque ce dernier est orthogonal au plan (N, s). Simultanément se trouvent déterminées les directions des vecteurs D et E, i. e. la polarisation des deux ondes se propageant dans le cristal. Dans le cas général, les directions des rayons et des normales aux ondes sont différentes. Pour des cristaux biaxes (au point de vue optique) les deux rayons sortent en général du plan d'incidence.

Si l'onde passe d'un milieu isotrope dans un milieu cristallin, elle peut avoir n'importe quelle polarisation et pénétrera dans le cristal sous forme de deux ondes polarisées rectilignement. Mais si le premier milieu est également cristallin, deux ondes de polarisations et de vitesses normales différentes pourront se propager suivant la direction de k_1. Ces ondes doivent être considérées comme des *ondes indépendantes*. A l'intérieur du cristal chacune de ces ondes se partage en *deux ondes polarisées rectilignement* et il y aura en tout *quatre ondes* dans le second milieu cristallin.

Il peut arriver que la longueur du vecteur k_{1t} soit plus grande que la longueur de l'un ou des deux segments OC et OD coupés par la surface des vecteurs d'onde sur l'axe X. La construction illustrée par la figure 296 devient alors irréalisable et il ne subsiste alors qu'une seule onde réfractée ou il n'en reste aucune. Cela signifie que l'une des ondes ou les deux ondes subissent une *réflexion totale*.

3. La même méthode peut être utilisée pour l'étude de la direction et de la polarisation de la lumière réfléchie. Il suffit pour cela de construire la surface des vecteurs d'onde dans le premier milieu. Si ce milieu est isotrope, la surface des vecteurs d'onde sera sphérique ; il n'apparaît qu'une seule onde réfléchie et l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion. Mais si le premier milieu est anisotrope, on obtient par réflexion deux ondes polarisées rectilignement se propageant dans des directions différentes.

CHAPITRE VIII

OPTIQUE MOLÉCULAIRE

§ 84. Théorie classique de la dispersion de la lumière

1. Tous les milieux, le vide excepté, sont *dispersifs*, ce qui veut dire que l'indice de réfraction des ondes électromagnétiques dépend de leur fréquence. La meilleure approximation du vide est l'espace interplanétaire et interstellaire. Selon les données astrophysiques, la densité moyenne de substance y est de 1 atome (ion) par cm^3. Dans l'espace interstellaire de notre Galaxie la concentration moyenne de substance est de 10^{-2} atome par cm^3 et dans l'espace intergalactique elle est encore plus petite. Dans le vide artificiel elle est égale ou supérieure (ce qui est le cas général) à 10^4 atomes par cm^3.

L'absence de dispersion de la lumière dans l'espace interstellaire est démontrée par les observations astronomiques portant sur l'éclipse des *étoiles doubles*. Supposons, par exemple, que les rayons rouges se propagent dans l'espace interstellaire avec une vitesse plus grande que les rayons bleus. On devrait observer alors au début de l'éclipse une variation de teinte allant de la teinte normale vers le bleu, et à la fin de l'éclipse une variation allant du rouge vers la teinte normale. Compte tenu des distances énormes auquelles se trouvent les étoiles, cet effet n'aurait pu échapper à l'observation, même si la différence des vitesses de propagation des rayons rouges et bleus était infime. Or on ne décela pas cet effet dans le spectre visible. Se fondant sur ses propres observations de l'étoile double Algol, Arago arriva à la conclusion que la différence entre les vitesses des rayons rouges et bleus ne peut être supérieure à un centmillième de la vitesse de la lumière.

Il est évident que l'absence de dispersion de la lumière visible dans l'espace interstellaire n'est démontrée qu'à la précision des expériences près. Les observations sur les *pulsars*, au moyen de récepteurs radioélectriques modernes, ont permis de mettre en évidence l'existence d'une dispersion des ondes de la gamme radioélectrique dans l'espace interstellaire.

2. La théorie phénoménologique de Maxwell, qui ne fait appel à aucune constante atomique ou moléculaire, ne pouvait expliquer le phénomène de dispersion de la lumière. L'explication de ce phénomène doit se fonder sur les conceptions atomistiques. La dispersion de

9—0791

la lumière est déterminée par les *oscillations forcées* des particules chargées, i.e. des électrons et des ions, sous l'action du champ alternatif de l'onde électromagnétique.

Dans la théorie classique de H. A. Lorentz la structure des systèmes oscillants, atomes et molécules, et leurs oscillations sont décrites sur la base des conceptions classiques du mouvement et des lois de Newton. Pour les besoins de notre cours la théorie classique est suffisante. Au point de vue de la théorie le cas le plus simple est celui de la *dispersion par les gaz*, puisqu'en première approximation on peut ne pas tenir compte des interactions complexes entre les atomes et les molécules du milieu. Pour des gaz de densité moyenne, les principales hypothèses de la théorie sont beaucoup mieux vérifiées que lorsqu'il s'agit de milieux condensés. C'est pour cela que la vérification expérimentale des hypothèses théoriques doit être réalisée avec les gaz, d'autant plus que la théorie est mieux élaborée pour les milieux gazeux. Dans ce qui suit nous considérerons surtout ce cas simple.

Tous les électrons contenus dans un atome peuvent être divisés en *électrons périphériques* ou *optiques* et en *électrons des couches internes.* Pratiquement, *seuls les électrons périphériques* exercent une action sur l'absorption et l'émission de la lumière dans le spectre visible, car les fréquences propres des électrons des couches internes étant très grandes, le champ de l'onde lumineuse ne peut les exciter. C'est pour cela qu'en théorie de la dispersion on ne prend en considération que les électrons optiques.

Pour simplifier, nous supposerons d'abord que l'atome ne contient qu'un *seul électron optique*. La théorie classique de la dispersion assimile l'électron optique à un *oscillateur harmonique amorti* dont les oscillations dans le champ de l'onde lumineuse sont décrites par l'équation

$$m\ddot{r} = -kr - g\dot{r} + eE',$$

où m est la masse de l'électron, e la charge de l'électron, $-kr$ la *force de rappel quasi élastique* qui cherche à ramener l'électron dans sa position d'équilibre, $-g\dot{r}$ une force analogue aux *forces de frottement*, que l'on introduit pour tenir compte de l'*absorption de la lumière*, E' l'intensité du champ électrique *appliqué* à l'électron. En général, le champ E' est différent du champ macroscopique moyen E figurant dans les équations de Maxwell (cf. t. III, § 35). Mais on peut négliger cette différence entre E' et E lorsqu'il s'agit de gaz de faible densité. En divisant l'équation ci-dessus par m on obtient

$$\ddot{r} + 2\gamma\dot{r} + \omega_0^2 r = \frac{e}{m} E', \tag{84.1}$$

où $\omega_0^2 = k/m$, $2\gamma = g/m$. Nous avons négligé la force magnétique $\frac{e}{c}[vH]$ à laquelle est soumis l'électron, car la vitesse v de l'électron

est négligeable devant la vitesse c de la lumière. Cette force magnétique ne se manifeste que dans la *pression lumineuse* qui est petite dans les conditions usuelles et ne présente que peu d'importance dans le cas considéré (voir problème n°2 à la fin du paragraphe).

Toutes les forces qui se manifestent à l'intérieur des atomes et des molécules sont de *nature électrique* et ce sont ces forces qui déterminent la structure interne de ces particules. Néanmoins, en théorie classique, l'existence et la structure des atomes et des molécules ne peuvent être expliquées par l'action de ces forces. On n'arrive à le faire que dans le cadre de la *physique quantique*. Dans les atomes et les molécules il n'existe pas de forces quasi élastiques ou de forces de frottement proportionnelles à la vitesse des particules chargées, et une théorie de la dispersion correcte ne doit tenir compte que des *forces existant réellement* et doit se fonder sur les *lois quantiques*. La mécanique quantique élabora une théorie adéquate de la dispersion, mais elle conduit à un résultat surprenant: *les atomes et les molécules se comportent vis-à-vis de l'absorption et de la dispersion de la lumière comme si le milieu était constitué d'un ensemble d'oscillateurs de différentes fréquences propres ayant des coefficients d'amortissement satisfaisant aux équations de mouvement de Newton.*

On ne peut pas calculer les fréquences propres et les coefficients d'amortissement sur la base du modèle classique. En théorie classique, on doit considérer ces grandeurs comme des *constantes introduites ad hoc.* C'est uniquement par les *méthodes de la théorie quantique* qu'on arrive à calculer les valeurs de ces constantes et à interpréter leur signification physique. On ne doit considérer la théorie classique que comme une théorie fournissant un *modèle du milieu dispersif* qui ne conduit à des résultats corrects que si on lui applique les lois de la mécanique classique.

Ayant fait ces quelques remarques, nous pouvons exposer la théorie classique de la dispersion sans craindre les malentendus.

3. En supposant que le champ $\boldsymbol{E}$ puisse être représenté par une onde plane $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}e^{i(\omega t - \boldsymbol{kr})} = \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})\, e^{i\omega t}$, on voit que son amplitude $\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{A}e^{-i\boldsymbol{kr}}$ varie d'un point à l'autre. Il en résulte qu'en différents points de sa trajectoire l'électron est soumis à l'action d'un champ d'amplitude variable (c'est ce qui détermine le phénomène de la *dispersion* dite *spatiale*). On peut cependant s'abstraire de cette circonstance en admettant que l'amplitude $\boldsymbol{r}_0$ des oscillations de l'électron est petite devant la longueur d'onde λ. La solution générale de l'équation (84.1) importe peu pour la théorie de la dispersion, car ce qui l'intéresse c'est la *solution particulière* décrivant les *oscillations forcées* de l'oscillateur: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 e^{i\omega t}$. On trouve l'amplitude $\boldsymbol{r}_0$ en portant cette expression dans (84.1). Si on néglige la différence entre $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{E}'$, il vient

$$\boldsymbol{r} = \frac{e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma}\,\boldsymbol{E}. \tag{84.2}$$

Un atome placé dans le champ électrique acquiert un moment dipolaire $p = er = \beta E$, où β est la polarisabilité de l'atome définie par la formule

$$\beta = \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma}. \quad (84.3)$$

En notant N le nombre d'atomes contenus dans l'unité de volume, le vecteur polarisation du milieu est $P = Np = N\beta E$ et son induction est

$$D = E + 4\pi P = \varepsilon E, \quad (84.4)$$

avec

$$\varepsilon = 1 + \frac{4\pi N e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma}. \quad (84.5)$$

L'équation matérielle $D = \varepsilon E$ est de la même forme que dans la théorie formelle de Maxwell, à cette différence près que la permittivité diélectrique ε *dépend* maintenant *de la fréquence* ω. Tous les résultats déjà obtenus resteront valables si on y remplace la constante ε par la fonction $\varepsilon(\omega)$. Cette fonction est *complexe*, comme on pouvait s'y attendre, puisque notre modèle tient compte de l'*absorption de la lumière*. Introduisons l'indice de réfraction complexe d'après la formule

$$\sqrt{\varepsilon} = n - i\varkappa, \quad (84.6)$$

où n est l'*indice de réfraction réel* et $\varkappa$ l'*indice d'extinction du milieu*. Les deux fonctions $n(\omega)$ et $\varkappa(\omega)$ dépendent de la fréquence. On aboutit ainsi à une explication de principe, quoique formelle, de la dispersion et de l'absorption de la lumière.

Elevons (84.6) au carré et identifions les parties réelles et imaginaires de la relation obtenue et de la relation (84.5). On trouve ainsi

$$n^2 - \varkappa^2 = 1 + 4\pi \frac{Ne^2/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2} (\omega_0^2 - \omega^2), \quad (84.7)$$

$$n\varkappa = 4\pi \frac{Ne^2/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2} \omega\gamma. \quad (84.8)$$

Ces formules permettent d'exprimer n et $\varkappa$ en fonction de la fréquence ω et des paramètres moléculaires N et e^2/m.

Loin de la fréquence propre ω_0, où $2\omega\gamma \ll |\omega_0^2 - \omega^2|$, on peut négliger la partie imaginaire de (84.5) et obtenir la formule approchée :

$$\varepsilon = n^2 = 1 + \frac{4\pi N e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (84.9)$$

En 1871, Sellmeier établit une formule de n de ce type en se fondant sur la théorie mécanique de l'éther universel *). Il est bien évident

*) Rayleigh fit remarquer que la formule (84.9) avait été établie deux ans plus tôt par Maxwell qui avait exposé dès 1869 les bases de la théorie mécanique de la dispersion dans un problème d'examen. Les formules qu'établit Maxwell contenaient aussi des termes d'extinction.

qu'on ne trouve dans la formule de Sellmeier aucune indication sur l'existence d'un lien quelconque entre l'indice de réfraction n et la permittivité diélectrique ε ou avec d'autres grandeurs caractérisant les propriétés électriques du milieu.

Sur la figure 297 on a représenté en trait continu la courbe $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$. Pour $\omega = \omega_0$ la fonction passe brusquement de $+\infty$ à $-\infty$. La variation de l'indice de réfraction n est indiquée par un trait interrompu et celle de l'indice d'extinction $\varkappa$ par un trait interrompu mixte. La grandeur n s'annule là où $\varepsilon(\omega) < 0$ et l'indice d'extinction $\varkappa$ y est différent de zéro, étant nul à toutes les autres fréquences. La grandeur $\varkappa$ caractérise l'*extinction des ondes et non pas leur absorption*, puisque les courbes de la figure 297 concernent un modèle de *milieu non absorbant* (la permittivité diélectrique ε est partout réelle).

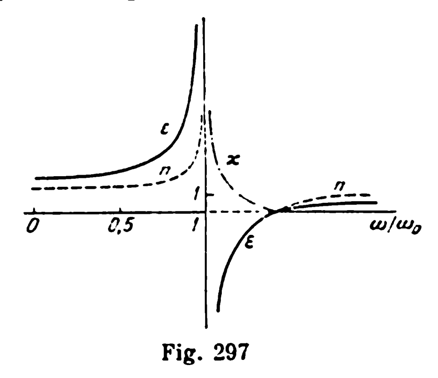


Fig. 297

Ces résultats présentent un caractère formel, puisqu'au voisinage de la fréquence propre ω_0 la relation $2\omega\gamma \ll |\omega_0^2 - \omega^2|$ n'est pas vérifiée et par suite la formule (84.9) n'est pas utilisable. En réalité, lorsqu'on passe par le point $\omega = \omega_0$, les grandeurs ε, n, $\varkappa$ doivent

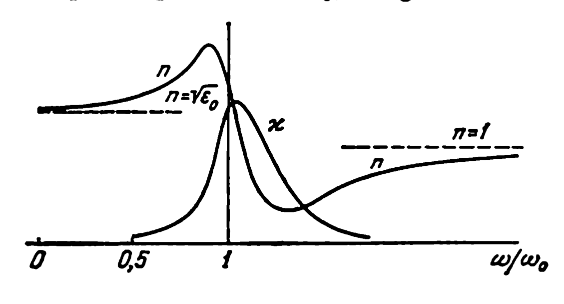


Fig. 298

varier de façon *continue* sans devenir infinies. La branche ascendante de la courbe $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ se trouvant à gauche du point $\omega = \omega_0$ doit céder la place à la branche descendante pour passer ensuite en une autre branche ascendante située à droite de ce point.

Cette remarque permet de représenter l'allure des courbes n et $\varkappa$ à proximité de la bande d'absorption. La figure 298 illustre l'allure des courbes $n = n(\omega)$ et $\varkappa = \varkappa(\omega)$. Là où l'absorption est petite, l'indice de réfraction $n(\omega)$ croît avec la fréquence ; on dit

alors que *la dispersion est normale*. Dans la bande de forte absorption n (ω) diminue avec la fréquence; on dit alors que la dispersion est *anormale*; elle est d'observation difficile du fait d'une forte absorption.

4. Les considérations théoriques développées ci-dessus s'appliquent non seulement aux électrons, *mais aussi aux ions*, vu que les conceptions classiques s'appliquent d'autant mieux que la masse des ions est grande. On observe dans tous les corps non pas une mais

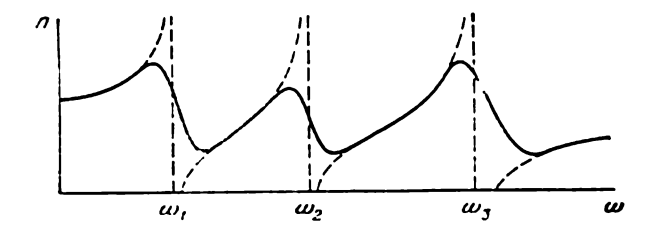


Fig. 299

plusieurs bandes d'absorption. Pour tenir compte de ce fait expérimental on admet en théorie classique que les substances sont construites avec des particules de *types différents*, i.e. des électrons et des ions qui se comportent comme des oscillateurs harmoniques amortis ayant des *fréquences propres différentes*. Dans le cas de substances gazeuses on peut négliger les interactions mutuelles de ces oscillateurs et la formule (84.5) s'écrit alors

$$\varepsilon = 1 + \sum_k \frac{4\pi N_k e_k^2 / m_k}{\omega_k^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma_k}, \qquad (84.10)$$

où N_k, m_k, e_k, ω_k, γ_k sont la concentration, la masse, la charge, la fréquence propre et le coefficient d'amortissement de l'oscillateur du k-ième type, la sommation étant réalisée sur tous les k. A chaque fréquence propre correspond une raie d'absorption distincte, près de laquelle l'indice de réfraction varie de façon anormale. L'allure générale de la variation de l'indice de réfraction avec la fréquence est schématiquement illustrée par la figure 299.

En comparant la formule (84.10) avec les données expérimentales on peut déterminer les coefficients $C_k \equiv N_k e_k^2 / m_k$. Connaissant ces coefficients on évalue les charges spécifiques e_k/m_k et on en tire des conclusions relatives à la nature des oscillateurs. En effet l'ordre de grandeur des charges e_k ne doit pas être très différent de celui de la charge élémentaire $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ unités CGSE, et N_k doit être comparable au nombre d'atomes contenus dans l'unité de volume, i.e. à $N_{Av}\rho/A$, où N_{Av} est le nombre d'Avogadro; ρ la densité de

la substance et A la masse atomique. Ainsi

$$C_k = \frac{N_k e_k^2}{m_k} \approx \rho \frac{N_{Av} e}{A} \frac{e_k}{m_k} = \rho \frac{F}{A} \frac{e_k}{m_k},$$

où $F \equiv N_{Av} e = 2{,}9 \cdot 10^{14}$ un. CGS·g-éq.$^{-1}$ est le nombre de Faraday. A l'aide de cette formule on peut évaluer e_k/m_k. On a trouvé ainsi, conformément aux conceptions théoriques, que tous les oscillateurs se laissent nettement diviser en deux groupes : les charges spécifiques de l'un sont du même ordre de grandeur que la charge des électrons, les charges de l'autre sont comparables à celles des ions. Aux oscillateurs du premier groupe correspondent des bandes d'absorption situées dans l'*ultraviolet* (plus rarement dans le *spectre visible*) et aux oscillateurs du deuxième groupe des bandes situées dans l'*infrarouge*.

5. La formule (84.10) et les formules correspondantes de n et $\varkappa$ sont applicables aux *métaux*. Dans l'infrarouge le rôle prédominant revient aux *électrons libres* pour lesquels on doit poser $\omega_k = 0$. Les ions exercent également une certaine action à proximité de leurs fréquences propres. Dans la région visible et l'ultraviolet, la formule (84.10) est en accord satisfaisant avec les résultats expérimentaux lorsqu'on tient compte, en plus des électrons libres, des *électrons liés contenus dans les ions métalliques* (les oscillations des ions n'exercent pas d'influence notable dans ces parties du spectre).

6. Nous allons prendre en considération les interactions entre les molécules polarisées par le champ électrique de l'onde lumineuse, mais nous utiliserons pour cela une méthode qui est loin d'être impeccable, la méthode du *champ efficace*. Dans les cristaux cubiques composés d'atomes ponctuels et isotropes, le champ $\boldsymbol{E}'$ s'exerçant sur une molécule est lié au champ maxwellien moyen $\boldsymbol{E}$ par la relation (cf. t. III, § 35)

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \frac{4\pi}{3} \boldsymbol{P}. \tag{84.11}$$

Cette relation est approximativement vérifiée pour les gaz et les liquides isotropes, à condition d'entendre par $\boldsymbol{E}'$ le champ efficace moyenné sur les centres des molécules dans un volume qui est physiquement infiniment petit. La formule (84.11) est une formule d'électrostatique, mais on peut l'utiliser dans des champs alternatifs lorsque la longueur d'onde est grande par rapport aux distances intermoléculaires.

Supposons que toutes les molécules sont identiques et que chaque molécule ne comporte qu'un seul électron optique. Négligeons en outre les amortissements et admettons que la fréquence ω se situe à grande distance de la bande d'absorption. Avec ces hypothèses tout ce qu'il faut faire se ramène à remplacer $\boldsymbol{E}'$ figurant dans l'équation (84.1) par son expression (84.11). Les calculs ultérieurs sont très simples, mais nous ne les reproduirons pas ici, puisque nous les

avons déjà faits en électrostatique (cf. t. III, § 35). On y avait obtenu, par une méthode qui est la même que celle que nous utilisons ici, la formule de Clausius-Mosotti:

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}=\frac{4\pi}{3}N\beta. \qquad (84.12)$$

En y portant $\varepsilon = n^2$ et l'expression de β donnée par la formule (84.3), on obtient

$$\frac{n^2-1}{n^2+2}=\frac{4\pi}{3}\frac{Ne^2/m}{\omega_0^2-\omega^2}. \qquad (84.13)$$

Cette formule avait été établie simultanément (en 1880) en théorie électronique par le physicien néerlandais H. A. Lorentz et par le physicien danois L. Lorenz (1829-1891) qui se fondait sur des conceptions prémaxwelliennes sur la lumière. Cette formule, connue sous le nom de *formule de Lorentz-Lorenz*, montre que pour une substance donnée à fréquence constante ω la relation suivante doit être vérifiée:

$$r\equiv\frac{1}{\rho}\frac{n^2-1}{n^2+2}=\text{const}, \qquad (84.14)$$

puisque la concentration N des molécules est proportionnelle à la densité ρ de la substance. La quantité figurant dans le premier membre de cette relation est désignée sous le nom de *réfraction massique*. Selon la formule de Lorentz-Lorenz, *la réfraction massique d'une substance est indépendante de sa densité.*

Dans de nombreux cas la formule (84.14) fournit des résultats satisfaisants. Ainsi pour l'air, la réfraction massique reste constante à 0,1 % près pour une variation de pression de 1 à 200 atm. Il est assez fréquent que la réfraction massique reste à peu près constante même lors du passage d'une substance de l'état de vapeur à l'état liquide. Ainsi la liquéfaction de l'oxygène gazeux (sa densité varie de 800 fois) ou la condensation de la vapeur d'eau (sa densité varie de 1200 fois) ne fait varier la réfraction massique de ces substances que de 2 à 3 %. Ces résultats sont étonnants, puisque dans le cas de ces substances les hypothèses sur lesquelles se fonde la formule (84.11) ne sont sûrement pas vérifiées. Mais on connaît aussi de nombreux cas où on observe des écarts à la formule (84.14).

7. Il est encore plus extraordinaire qu'il existe une règle empirique permettant de calculer de façon approchée la réfraction d'un mélange ou d'un composé chimique. Si la substance est composée de particules identiques (atomes ou molécules), $\delta = Nm$, où m est la masse d'une particule. Compte tenu de la relation $\varepsilon = n^2$, on déduit de (84.12) que

$$\beta=\frac{3}{4\pi}mr. \qquad (84.15)$$

La polarisabilité β d'une particule et donc la quantité mr caractérisent la *particule elle-même*. La règle que nous venons de mentionner

réside en ce que *la polarisabilité des particules est additive, en ce sens que la polarisabilité d'une particule complexe est égale à la somme des polarisabilités des particules qui la composent.* Ainsi

$$mr = \sum m_i r_i, \tag{84.16}$$

où m et m_i sont les masses du composé et des constituants, r et r_i les réfractions massiques des substances correspondantes. Il est extraordinaire que cette règle concerne non seulement les mélanges mécaniques, mais aussi les *composés chimiques.* Posons que les constituants sont des atomes et le composé des molécules. On a alors $m_i = A_i m_H$, $m = M m_H$, où m_H est la masse de l'atome d'hydrogène, M et A_i sont les masses moléculaire et atomique correspondantes. La formule (84.16) s'écrira maintenant

$$Mr = \sum A_i r_i. \tag{84.17}$$

Le produit de la réfraction massique par la masse atomique est la *réfraction atomique* et le produit par la masse moléculaire est la *réfraction molaire.* Ainsi *la réfraction molaire d'un composé chimique est égale à la somme des réfractions atomiques.*

On trouve dans le livre de Born *) de vastes tableaux qui démontrent la validité de la formule de Lorentz-Lorenz et l'additivité de la réfraction atomique. On y trouve aussi de nombreux exemples où ces règles sont en défaut.

8. En plus de la dispersion liée aux oscillations forcées des électrons et des ions, il existe un autre type de dispersion mis en évidence par Debye. Ce type de dispersion se manifeste dans les milieux à *molécules polaires*, surtout dans les milieux liquides. Sont polaires les molécules qui possèdent des moments dipolaires « rigides » résultant d'une distribution asymétrique des charges dans la molécule. Les molécules polaires peuvent posséder aussi des moments dipolaires « induits » excités par le champ électrique extérieur. Généralement les moments induits des molécules polaires sont petits devant les moments dipolaires « rigides ».

En l'absence de champ électrique les moments dipolaires des molécules polaires d'un milieu isotrope sont orientés dans l'espace de façon parfaitement désordonnée suivant toutes les directions. Le milieu ne possède alors aucune polarisation électrique. Lorsqu'on applique un champ électrique, celui-ci tend à orienter les moments dipolaires des molécules parallèlement à sa direction, mais cette orientation est constamment perturbée par l'agitation thermique des molécules. Une polarisation électrique apparaît ainsi dans le milieu (cf. t. III, § 36). Si le champ électrique varie dans le temps avec la fréquence ω, la polarisation « d'orientation » et la permittivité diélectrique qu'elle détermine varieront avec la même fréquence.

*) Max Born. *Optics.*

Les amplitudes des rotations forcées des molécules polaires dépendent de la fréquence ω du champ électrique appliqué. Il en résulte la dispersion de la *composante rotatoire* de la permittivité diélectrique et de l'indice de réfraction.

Nous omettrons de faire l'étude quantitative de ces phénomènes, quelques remarques de caractère qualitatif étant suffisantes.

Lorsque la fréquence du champ électrique est basse, le milieu peut acquérir la même polarisation instantanée que celle qu'il acquerrait dans un champ statique. Dans cette gamme de fréquences les grandeurs ε et n sont pratiquement constantes, i.e. ne dépendent pas de la fréquence ω. Si les moments dipolaires des molécules polaires sont grands, comme c'est le cas de l'eau et des alcools, dans cette gamme de fréquences ε et n sont grands; par exemple pour l'eau $\varepsilon = 81$, $n = \sqrt{\varepsilon} = 9$.

Dans le second cas limite où les fréquences sont très grandes, les molécules dipolaires n'arrivent pas à tourner de façon notable au cours d'un temps comparable à la période des vibrations lumineuses. A ces fréquences il n'y a pratiquement pas de rotations forcées des molécules, ce qui signifie que les termes rotatoires de ε et n n'existent pas. Il doit donc exister une gamme de fréquences intermédiaire où ε et n décroissent anomalement jusqu'aux valeurs que possèdent ces grandeurs dans la région optique du spectre. Pour l'eau et les alcools, cette gamme intermédiaire se situe dans la gamme des ondes radioélectriques centimétriques. Aux fréquences supérieures les molécules se comportent comme si elles n'étaient pas polaires. C'est ce qui explique la très grande différence qui existe entre la valeur de l'indice de réfraction de l'eau n dans la gamme optique et la valeur de $\sqrt{\varepsilon}$ en électrostatique et aux basses fréquences.

Ces mêmes considérations permettent d'expliquer pour quelles raisons on peut poser en optique que la perméabilité magnétique μ de toutes les substances est égale à l'unité. En effet, le mécanisme de l'aimantation est semblable au mécanisme de la polarisation des diélectriques polaires et réside en un processus d'orientation des moments magnétiques des atomes et des molécules suivant la direction du champ magnétique appliqué. Or cette orientation n'a pas le temps de se produire dans les champs de hautes fréquences, dans la région visible du spectre et dans les régions contiguës.

9. Nous conclurons ce paragraphe par un bref examen de la dispersion à toutes les fréquences du spectre des ondes électromagnétiques. Dans la gamme des ondes radioélectriques d'une longueur d'onde supérieure à 1 cm environ, seule importe la fréquence propre $\omega_0 = 0$ des électrons ou des ions libres. Dans cette gamme *seuls les gaz ionisés* peuvent donner lieu à dispersion (cf. § 86). S'il n'y a ni électrons ni ions libres, il n'y aura pas de dispersion des ondes radioélectriques.

Dans les diélectriques polaires la dispersion apparaît à partir d'une longueur d'onde de l'ordre d'un centimètre (ondes radio-électriques). L'indice de réfraction diminue avec la fréquence, ce qui signifie que la dispersion est *anomale* et que l'absorption des ondes est forte.

A mesure que l'on s'approche des fréquences propres des ions, la dispersion tend à redevenir *normale*, tandis qu'à l'intérieur de la bande d'absorption déterminée par les oscillations des ions, la dispersion est *anomale*. Une fois qu'on aura dépassé la région d'absorption infrarouge, les oscillations forcées des ions ne se manifestent plus. A ces fréquences, ainsi qu'aux fréquences correspondant aux régions visible et de l'ultraviolet, la dispersion n'est déterminée que par les oscillations des *électrons optiques liés*. Dans la région de transparence (ou plus exactement dans la région de faible absorption) la dispersion est *normale* et dans la bande de forte absorption elle est *anomale*. La bande d'absorption est généralement située dans l'ultraviolet et parfois dans le spectre visible.

Dès qu'on aura traversé la bande d'absorption, i.e. la zone où la dispersion est *anomale* du fait des oscillations des électrons, la dispersion redevient *normale*. Si la fréquence ω est grande par rapport à toutes les fréquences propres des électrons, on peut négliger dans (84.10) les quantités ω_k^2 devant ω^2. Nous entrons dans la gamme des *rayons* X *mous*. Si on néglige l'absorption et si on remarque que seuls les électrons participent aux oscillations, on peut mettre la formule de dispersion (84.10) dans la région indiquée du spectre sous la forme

$$n^2 = 1 - \frac{Ne^2}{m\omega^2}. \qquad (84.18)$$

Ici l'indice de réfraction est légèrement *inférieur à l'unité*. On a réussi à le mesurer en notant les déviations que subissaient les rayons X ayant traversé des prismes de matériaux différents; cette méthode ne peut naturellement prétendre à la précision.

On obtient des résultats plus dignes de foi en mesurant l'angle limite de réflexion totale des rayons X passant de l'air dans un corps solide ($n < 1$). On constate que pour les rayons X l'indice de réfraction était inférieur à l'unité d'une quantité égale à $(10^{-5}\text{-}10^{-6})\rho$, où ρ est la densité de la substance. Ainsi pour le verre (crown de densité 2,52) et pour $\lambda = 0{,}1279$ nm, l'indice a été trouvé égal à $n = 0{,}999995 = 1 - 5\cdot10^{-6}$.

A mesure que les rayons X deviennent plus durs, les phénomènes de résonance peuvent se manifester pour les électrons des *couches internes des atomes* qui sont plus fortement attachés au noyau que les électrons optiques. On observa en effet une dispersion *anomale* des rayons X à proximité de leur vraie absorption photoélectrique.

PROBLÈMES

1. Calculer la vitesse maximale des oscillations forcées d'un électron libre dans le champ du rayonnement solaire à proximité de la surface terrestre (voir problème du § 5). Calculer également le rapport de la force maximale F_B appliquée à l'électron libre par le champ magnétique à la force maximale F_E due au champ électrique. On remplacera ensuite le rayonnement solaire par un rayonnement monochromatique $E = E_0 \cos \omega t$ de longueur d'onde $\lambda = 550$ nm.

Solution. Négligeons l'action du champ magnétique dans l'équation du mouvement de l'électron libre $m\dot{v} = e\left(E + \frac{1}{c}[vB]\right)$. On aura alors

$$m\dot{v} = eE = eE_0 \cos \omega t, \quad v = \frac{e}{m\omega} E_0 \sin \omega t, \quad v_{\max} = \frac{eE_0}{m\omega} = \frac{eE_0\lambda}{2\pi mc}.$$

Comme $\overline{E^2} = \frac{1}{2} E_0^2 = 5{,}85 \cdot 10^{-4}$, on a $E_0 = \sqrt{2\overline{E^2}} = 0{,}034$ un. CGSE. Avec cette valeur on trouve

$$v_{\max} = 5{,}3 \text{ cm/s}, \quad \frac{F_B}{F_E} = \frac{v_{\max}}{2c} = 0{,}9 \cdot 10^{-10}.$$

2. Déterminer la pression lumineuse moyenne s'exerçant sur un oscillateur harmonique amorti, oscillant dans le champ d'une onde lumineuse monochromatique homogène. Calculer l'énergie moyenne ε que cet oscillateur absorbe par seconde et exprimer la pression lumineuse en fonction de cette énergie moyenne. Démontrer que si la lumière n'était pas absorbée, la pression lumineuse moyenne serait nulle.

Solution. A l'emplacement de l'oscillateur le champ électromagnétique a la forme $E = Ae e^{i\omega t}$, $B = Ab e^{i\omega t}$, où e et b sont des vecteurs unitaires rectangulaires. En négligeant d'abord l'action du champ magnétique, la différentiation de (84.2) donne

$$v = \frac{i\omega e/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\omega\gamma} E.$$

La force que le champ magnétique exerce sur l'électron est $F = \frac{e}{c}[vB]$. Comme les calculs sont faits sous forme complexe, on doit remplacer cette formule par

$$F = \frac{e}{4c} [(v + v^*)(B + B^*)].$$

La force moyenne est

$$\overline{F} = \frac{e}{4c} \{[v^*B] + [vB^*]\},$$

qui après quelques transformations simples devient

$$\overline{F} = \frac{m\gamma}{c} vv^* [eb].$$

Cette dernière formule montre que la force de pression lumineuse moyenne est orientée suivant le produit vectoriel $[eb]$, i.e. suivant la direction de propagation de l'onde.

L'énergie absorbée par unité de temps est

$$\int_0^1 2m\gamma \left(\frac{v + v^*}{2}\right)^2 dt,$$

et sa valeur moyenne est

$$\varepsilon = \int_0^1 m\gamma v v^* \, dt = m\gamma v v^*.$$

Ainsi

$$\overline{F} = \varepsilon / c. \tag{84.19}$$

Cette formule peut être obtenue au moyen d'un raisonnement simple. Le rayonnement absorbé par un atome de substance lui communique, en plus de l'énergie ε, l'impulsion $g = \varepsilon/c$ qui se manifeste dans les forces de pression lumineuse.

Si la lumière se propage à travers un gaz absorbant, elle doit exercer sur celui-ci une certaine pression. Pour la première fois cette idée fut avancée par Kepler à la suite de ses observations sur les queues des comètes. La démonstration expérimentale de l'existence d'une pression lumineuse sur les gaz fut donnée par P. N. Lébédev (en 1910).

§ 85. Approche de la formule de dispersion de la mécanique quantique

1. La formule de dispersion classique (84.10) établie pour les gaz décrit avec une très grande précision l'allure expérimentale de l'indice de réfraction à proximité des différentes raies d'absorption ω_k, à condition de considérer les coefficients N_k, les fréquences propres ω_k et les coefficients d'amortissement γ_k comme des *constantes empiriques que l'on détermine à partir de la courbe de dispersion elle-même et de la position réelle des raies spectrales dans le spectre de rayonnement et d'absorption de la substance*. Pour assurer un accord avec les résultats expérimentaux, il fallut remplacer dans cette formule tous les N_k par $f_k N_k$, où f_k sont des coefficients constants inférieurs à l'unité, que l'on appelle *forces des oscillateurs*.

En mécanique quantique on peut bâtir la théorie de la dispersion suivant le même schéma qu'en physique classique. Le problème se réduit au calcul de la *polarisabilité des atomes et des molécules* dans le champ électrique de l'onde lumineuse, mais on utilise maintenant, à la place des équations de mouvement classiques, des équations de mouvement *quanto-mécaniques*, par exemple l'*équation des ondes de Schrödinger* (1887-1961). Comme les lecteurs de cet ouvrage ne sont pas encore initiés à la mécanique quantique, on ne peut exposer la théorie quantique de la dispersion de façon systématique. On n'en donnera qu'une caractéristique générale et certains résultats que fournit cette théorie.

2. La théorie quantique de la dispersion ne se fonde pas sur le modèle de l'électron lié de façon quasi élastique et n'introduit aucune force qui n'existe effectivement dans la nature. La mécanique quantique explique la structure et la stabilité des systèmes atomiques en ne faisant intervenir que des *forces électriques*. Nous supposerons, pour simplifier, que l'atome ne possède qu'un seul *électron de valence*

qui détermine ses propriétés chimiques et optiques. Les autres électrons sont solidement retenus sur les couches électroniques internes, car leurs énergies de liaison sont beaucoup plus grandes. Les états de ces électrons ne sont pratiquement pas perturbés par un champ électrique faible de l'onde lumineuse. Ces électrons n'ont d'autre fonction que de modifier le champ électrique du noyau atomique dans lequel se déplace l'électron de valence. C'est pour cette raison qu'il est possible de considérer l'atome comme ne possédant qu'un seul électron. Ce modèle d'atome est très proche de l'atome réel.

En l'absence de champs extérieurs, l'atome ne peut se trouver que dans des *états stationnaires* bien déterminés; dans ces états l'énergie de l'atome peut également prendre des valeurs discrètes bien déterminées W_1, W_2, W_3, . . . (*niveaux d'énergie*). On les numérote dans l'ordre des énergies croissantes. Lorsqu'un atome passe d'un niveau d'énergie k sur un niveau inférieur n, il émet de la lumière en libérant un quantum d'énergie

$$\hbar\omega_{kn} \equiv h\nu_{kn} = W_k - W_n. \tag{85.1}$$

Lors de la transition inverse d'un niveau inférieur n sur un niveau supérieur k l'atome est excité et absorbe un quantum d'énergie égal. Ainsi, à la différence de l'oscillateur harmonique classique, l'atome, même s'il ne comporte qu'un seul électron de valence, rayonne non pas une seule fréquence ω_0 mais tout un spectre de fréquences ω_{kn} qui jouent le rôle de fréquences propres de l'atome dans la théorie quantique de la dispersion. Si la transition s'effectue dans le sens allant du niveau inférieur k sur le niveau supérieur n (absorption), il est commode d'introduire des *fréquences négatives* ω_{kn} afin que la formule (84.10) ne change pas. S'il n'y a aucune perturbation extérieure (pas de champs de force extérieurs, températures modérées), à la suite du processus de rayonnement tous les atomes se retrouvent sur un niveau *inférieur* qui est le niveau *fondamental*, i.e. dans l'*état fondamental* ou *normal*. Un atome isolé peut se trouver dans l'état fondamental pendant un temps indéfiniment long, jusqu'à ce qu'il passe sur un autre niveau à la suite d'une action extérieure.

Lorsqu'on applique un champ extérieur, l'atome quitte son état fondamental stationnaire. Selon la mécanique quantique, son nouvel état peut être défini comme une superposition d'états stationnaires ayant chacun une probabilité déterminée. Si le champ électrique est faible et varie avec le temps suivant une loi harmonique avec la fréquence ω, ces probabilités varient elles aussi en fonction du temps avec la même fréquence. L'atome acquiert un moment dipolaire variable qui est induit par le champ électrique de l'onde lumineuse et que l'on peut représenter par $p = \beta E$. Dans le cas général, la polarisabilité β de l'atome est un *tenseur*, mais nous considérerons le cas simple où c'est un scalaire. En négligeant l'absorption (ce qui

est admissible loin des fréquences propres ω_{nk}) la mécanique quantique fournit le résultat suivant:

$$\beta = \frac{e^2}{m} \sum_k \frac{f_{nk}}{\omega_{nk}^2 - \omega^2}, \tag{85.2}$$

où f_{nk} sont des constantes. La formule suppose qu'avant application du champ électrique l'atome se trouvait dans l'état stationnaire n. On procède à la sommation sur toutes les valeurs possibles de k, supérieures et inférieures à n.

Pour dégager la signification physique des constantes f_{nk}, on remarquera tout d'abord qu'il existe une certaine probabilité que, au cours d'un intervalle de temps donné (par exemple pendant l'unité de temps), l'atome passe *spontanément*, en l'absence de tout champ extérieur, de l'état stationnaire supérieur k dans un état stationnaire inférieur n. La constante f_{nk} est proportionnelle à cette probabilité. La transition spontanée de l'atome de l'état inférieur n dans l'état supérieur k est évidemment impossible. Dans ce cas f_{kn} est défini par la relation $f_{kn} = -f_{nk}$. Il s'ensuit que pour $n = k$ les quantités f_{nk} sont nulles, ce qui implique que la sommation dans (85.2) ne se fait que sur $k \neq n$. La quantité f_{nk} est appelée *force de l'oscillateur de fréquence* ω_{nk}.

En utilisant (85.2) on arrive à la formule de dispersion pour les atomes monoélectroniques:

$$n^2 = 1 + 4\pi N \frac{e^2}{m} \sum_{k \neq n} \frac{f_{nk}}{\omega_{nk}^2 - \omega^2}. \tag{85.3}$$

La comparaison des formules (84.10) et (85.3) (sans tenir compte de l'absorption) permet de mettre en évidence l'analogie suivante. Tout se passe comme si tous les atomes se trouvant dans le même état initial n étaient divisés en groupes repérés par l'indice k. Les atomes d'un même groupe se comportent comme des *oscillateurs harmoniques classiques* de fréquence propre ω_{nk}. Si $k > n$, la fréquence ω_{nk} est comptée *positivement*, et *négativement* si $k < n$. Le nombre d'atomes appartenant au k-ième groupe et contenus dans l'unité de volume est donné par $N_k = f_{nk}N$. Comme $\sum N_k = N$, on doit avoir

$$\sum_k f_{nk} = 1. \tag{85.4}$$

Si l'atome possède Z électrons de valence, cette relation s'écrira

$$\sum_k f_{nk} = Z. \tag{85.5}$$

Ces formules expriment la *règle des sommes* qui fut établie indépendamment, d'une part, par Thomas et Reiche et, d'autre part, par Kuhn (1925). Les raisonnements ci-dessus, qui ne servent qu'à

illustrer la méthode, ne constituent nullement une démonstration des formules (85.4) et (85.5). On s'en rend compte en remarquant que pour $k < n$ les forces des oscillateurs f_{nk} et les nombres N_k d'atomes sont négatifs. La validité des formules (85.4) et (85.5) peut être démontrée de façon rigoureuse par les méthodes de la mécanique quantique.

3. Si les atomes de gaz ne se trouvaient pas dans le même état stationnaire avant que le champ électrique soit appliqué et étaient distribués parmi plusieurs états stationnaires, la formule (85.3) devrait être remplacée par la formule

$$n^2 = 1 + 4\pi N \frac{e^2}{m} \sum_n \sum_k \frac{f_{nk}}{\omega_{nk}^2 - \omega^2}. \quad (85.6)$$

Les expressions (85.4) et (85.5) doivent être remaniées de la même façon, i.e. la sommation se fait sur toutes les valeurs de k et de n.

La mécanique quantique laisse prévoir l'existence d'un nouveau phénomène résultant de ce que la formule (85.6) peut comporter des termes à f_{nk} positifs ($k > n$) et à f_{nk} négatifs ($k < n$). Comme $\omega_{nk}^2 = \omega_{kn}^2$, la formule de dispersion ne contiendra que les sommes $(f_{nk} + f_{kn})$ et non pas ces termes pris séparément. Si le niveau d'énergie inférieur est plus peuplé que le niveau supérieur, on a $(f_{nk} + f_{kn}) > 0$ et dans le cas contraire $(f_{nk} + f_{kn}) < 0$. Dans le premier cas la fréquence propre $|\omega_{nk}|$ introduit dans la formule de dispersion (85.6) un terme de même signe que dans la formule classique, et dans le second elle introduit un terme de signe contraire. En se fondant sur cette détermination, on distingue la *dispersion positive* et la *dispersion négative*. La variation de l'indice de réfraction $n(\omega)$ à proximité de la fréquence propre $\omega_0 = |\omega_{nk}|$ est illustrée pour les deux cas par les courbes de la figure 300 (n_+ dispersion positive, n_- dispersion négative). En ce qui concerne le coefficient d'amortissement γ, il est *négatif* si la dispersion est négative, ce qui signifie que la lumière s'amplifie lors de sa propagation au lieu de s'étendre. Ce résultat est déterminé par les transitions atomiques des niveaux supérieurs sur des niveaux inférieurs, s'accompagnant d'une émission de quanta de lumière (rayonnement induit, cf. § 119).

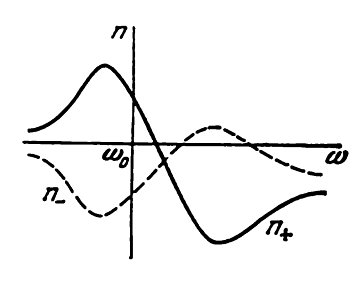


Fig. 300

Dans les conditions usuelles, tant que le champ extérieur n'est pas appliqué, les atomes occupent le niveau d'énergie le plus bas, i.e. le niveau fondamental. Dans ces conditions l'onde lumineuse ne peut faire passer les atomes que sur des niveaux de plus grande énergie, de sorte que tous les f_{nk} sont positifs. Il en sera de même

dans le cas de l'excitation thermique d'un système d'atomes en équilibre thermodynamique, puisque selon la formule de Boltzmann le nombre d'atomes occupant le niveau initial doit décroître à mesure que croît le numéro d'ordre des niveaux d'énergie. Mais si on utilise un procédé d'excitation non thermique, par exemple en faisant passer un courant électrique intense à travers la substance, on peut produire des états métastables, *hors d'équilibre thermodynamique*, avec des *populations inversées sur les niveaux énergétiques*, comme cela se produit réellement dans les lasers. On entend par population inversée des niveaux d'énergie un état tel que le nombre d'atomes occupant le niveau supérieur est plus grand que le nombre d'atomes se trouvant sur le niveau inférieur. Dans ces conditions on peut obtenir et on obtient effectivement un milieu à dispersion négative. L'influence exercée par les termes négatifs de la formule de dispersion fut observée pour la première fois par Ladenburg (1930) dans un gaz à travers lequel on faisait passer une forte décharge électrique, quoique dans ses expériences la dispersion restât positive.

§ 86. Méthodes d'étude expérimentale de la dispersion anomale

1. La dispersion anomale fut observée pour la première fois en 1861 par Le Roux (1832-1907). Le Roux constata que dans un prisme rempli de vapeurs d'iode les rayons bleus étaient moins réfractés que les rayons rouges (les radiations intermédiaires sont fortement absorbées par les vapeurs d'iode et échappent à l'observation). Il s'ensuit que lorsqu'on passe des rayons rouges aux rayons bleus, l'indice de réfraction des vapeurs d'iode doit diminuer, ce qui signifie que la dispersion des vapeurs d'iode est *anomale* dans cette partie du spectre.

La découverte de Le Roux ne fut pas remarquée jusqu'à ce qu'en 1870 Christiansen (1848-1917) ne décela et n'étudia en détail la dispersion anomale dans une solution alcoolique de fuchsine. Dans ce cas l'indice de réfraction présente la plus faible valeur ($n = 1{,}285$) pour les rayons violets et la plus grande valeur ($n = 1{,}561$) pour les rayons jaunes (les rayons verts sont absorbés).

C'est Kundt (1839-1894) qui entreprit une étude expérimentale systématique de la dispersion anomale. Il obtint un résultat important : *la dispersion anomale s'accompagne toujours d'absorption.* Après les recherches de Kundt et le développement de la théorie de la dispersion, il devint évident que la dispersion anomale n'est pas un phénomène extraordinaire, mais qu'elle doit se manifester pour toutes les substances, dans les régions spectrales où se produit une forte absorption.

Pour l'étude de la dispersion anomale, Kundt utilisait la *méthode des prismes croisés* qu'utilisait déjà Newton dans ses études de la

10—0791

dispersion de la lumière. L'idée de la méthode est la suivante. On prend deux prismes, l'un en substance de *dispersion normale* (généralement en verre), l'autre fabriqué avec la substance étudiée. Comme dans toute étude spectroscopique, la source de lumière est une fente éclairée, située dans le plan focal de la lentille assurant la collimation. Le premier prisme à arête réfringente *verticale* décompose la lumière incidente en une bande colorée horizontale (spectre). Le deuxième prisme dont l'arête réfringente est *horizontale* est disposé à

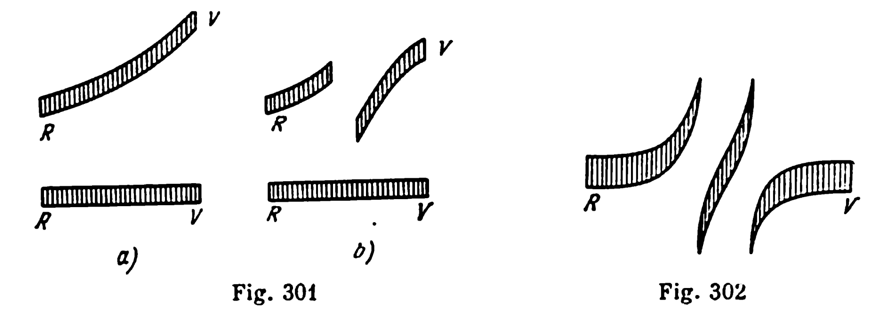


Fig. 301 Fig. 302

la suite du premier prisme et déplace tout point de la bande colorée en haut ou en bas suivant que la base du prisme est tournée vers le haut ou vers le bas. Comme le déplacement dépend de la longueur d'onde, la bande colorée s'incurve et s'incline. Si la dispersion du second prisme est normale, la bande colorée se relève ou s'abaisse uniformément (fig. 301, *a*). Mais si la dispersion est anomale, par suite de l'absorption des rayons qui sont réfractés anormalement, la bande colorée se scinde en deux parties dont les bords adjacents à la bande d'absorption s'incurvent en sens opposés (fig. 301, *b*). Il est bien évident que pour obtenir une telle figure on doit disposer d'un système de lentilles donnant sur l'écran des images colorées de la fente éclairée.

Kundt réalisa une élégante expérience de démonstration que l'on utilise encore de nos jours, où le rôle de seconde lentille est assumé par la flamme conique d'un brûleur à gaz où on introduit du sodium métallique. En faisant passer la lumière à travers la flamme on observe dans le spectre, en plus d'une bande sombre correspondant à la raie jaune d'absorption des vapeurs de sodium, des incurvations en sens opposés des bords des parties du spectre séparées par la bande sombre (fig. 301, *b*). La raie *D* d'aborsption des vapeurs de sodium située dans la partie jaune du spectre se compose de deux raies fines très rapprochées de longueurs d'onde $\lambda_{D_1} = 589{,}0$ et $\lambda_{D_2} = 589{,}6$ nm. Dans l'expérience de démonstration de Kundt la densité des vapeurs de sodium était tellement grande que les deux raies se confondaient en donnant une bande étroite et on n'arrivait pas à distinguer les dé-

tails du phénomène. En diminuant la densité des vapeurs de sodium et en perfectionnant les conditions expérimentales, on distingue deux régions de dispersion anomale correspondant aux raies d'absorption de longueurs d'onde λ_{D_1} et λ_{D_2} (fig. 302).

2. Nous avons indiqué au § 84, pt. 2 que pour vérifier la théorie il est recommandé d'utiliser des gaz de faible densité donnant des raies d'absorption fines et nettes. Mais si la densité est petite, les indices de réfraction le sont aussi, ce qui pose la question de leur mesure précise. Le mieux est d'utiliser la méthode interférentielle élaborée par Puccianti (1901) et perfectionnée plus tard (1912) par D. S. Rojdestvenski qui effectua des recherches sur la dispersion anomale en vapeurs de sodium.

Dans cette méthode on croise un interféromètre (celui de Jamin par exemple) avec un spectrographe (réseau de diffraction ou prisme à grande dispersion). L'interféromètre est disposé de telle manière qu'il produise, en lumière blanche, des franges d'interférence horizontales sur la fente verticale du spectrographe. La figure d'interférence en couleurs qui se forme sur la fente est développée par le spectrographe suivant l'horizontale. Le spectre est coupé suivant la direction longitudinale par des franges caractérisées par le même ordre d'interférence. La teinte d'une frange passe du rouge au violet suivant sa longueur, la distance entre franges voisines diminuant avec la diminution de la longueur d'onde. Les minimums d'interférence sont indiqués par des raies sombres. Le spectre est traversé dans la direction longitudinale par des raies sombres dont la largeur diminue en allant du rouge au violet.

Avant de procéder aux mesures, on règle l'appareil jusqu'à ce que la frange d'ordre zéro soit rectiligne et horizontale. Confondons-la avec l'axe X orienté du rouge au violet et dirigeons l'axe Y parallèlement à la fente du spectrographe. L'interfrange est proportionnelle à λ et peut être représentée par $\Delta y = \alpha\lambda(x)$, où α est la constante de l'appareil qui ne dépend pratiquement pas du numéro de la frange (de l'ordre d'interférence) k. Par suite l'ordonnée de la k-ième frange est $y_k = k\,\Delta y = \alpha k\lambda(x)$. C'est l'équation de la courbe qui caractérise la forme de la frange considérée.

Introduisons dans l'un des bras de l'interféromètre une couche d'épaisseur l de la substance étudiée d'indice $n(\lambda)$. On ajoute ainsi une différence de marche égale à $(n-1)\,l$, ce qui provoque le déplacement des franges d'interférence vers le haut ou vers le bas d'une interfrange égale à $(n-1)\,l/\lambda$ ou d'une distance égale à $(n-1)\,l/\lambda\,(\Delta y)$. L'équation qui décrit la forme de la k-ième frange est

$$y_k = \alpha\,[k\lambda(x) \pm (n-1)\,l] \tag{86.1}$$

(la détermination du signe dépend du bras de l'interféromètre où on a introduit la couche de la substance étudiée). Pour $k = 0$, on a

$y_0 = \alpha\,(n - 1)l$, ce qui montre que la frange d'ordre zéro décrit à une certaine échelle la courbe de variation de l'indice n en fonction de l'abscisse x, donc en fonction de la longueur d'onde λ et détermine ainsi la dispersion de la substance étudiée. Les franges d'ordres différents de zéro présentent une inclinaison supplémentaire dépendant de k (voir fig. 303 extraite des publications de Rojdestvenski).

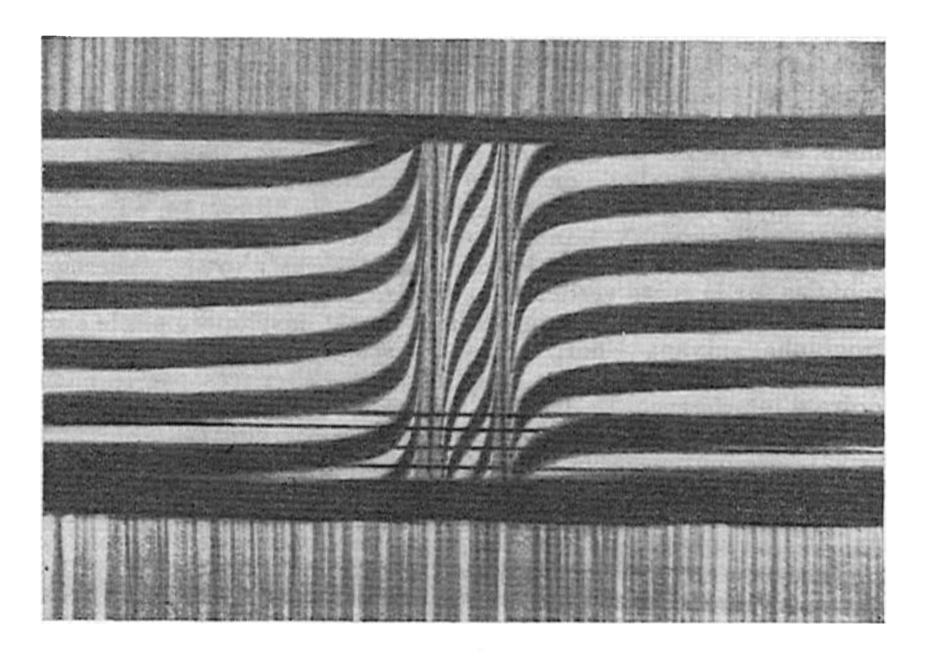


Fig. 303

3. Après avoir modifié la méthode, Rojdestvenski réussit à accroître notablement la précision des mesures à proximité des bandes d'absorption. La méthode modifiée fut appelée *méthode des « crochets »*. Si on introduit dans un des bras de l'intreféromètre la substance étudiée (gaz ou vapeur) et dans l'autre bras une lame de verre d'épaisseur l_v et d'indice n_v, cette lame introduit une différence de marche $(n_v - 1)\,l_v$ entre les faisceaux interférents; il en résulte un déplacement vertical de la figure d'interférence d'une distance $(n_v - 1)\,l_v\alpha$. L'ordonnée de la k-ième frange est alors

$$y_k = \alpha\,[k\lambda\,(x) \pm (n - 1)\,l \mp (n_v - 1)\,l_v]. \qquad (86.2)$$

La frange d'ordre zéro disparaît du champ de vision, laissant la place à une autre frange dont l'ordre d'interférence k est donné par

(86.2), où on pose $y_k = 0$; on trouve ainsi

$$k = \pm \frac{n_v - 1}{\lambda} l_v \mp \frac{n-1}{\lambda} l. \qquad (86.3)$$

Comme les indices de réfraction des gaz sont peu différents de l'unité, le dernier terme est petit et on peut le négliger dans le calcul de k. Pour une lame de verre d'épaisseur $l_v = 1$ mm et d'indice $n_v = 1,5$ et pour une longueur d'onde $\lambda = 600$ nm, on obtient $k \sim 10^4$. En lumière blanche, on ne peut réaliser un ordre d'interférence aussi élevé, mais grâce à l'utilisation d'un spectroscope qui se comporte en monochromateur et décompose la lumière blanche en composantes quasi monochromatiques, les interférences deviennent possibles. Le long de chaque frange d'interférence la longueur d'onde λ varie en fonction de la coordonnée x.

En dérivant y_k par rapport à x pour k constant, on trouve l'inclinaison de la frange d'ordre k:

$$\frac{dy_k}{dx} = \alpha \frac{d\lambda}{dx} \left(k \pm l \frac{dn}{d\lambda} \mp l_v \frac{dn_v}{d\lambda} \right). \qquad (86.4)$$

Comme la dispersion du verre est petite, le dernier terme du second membre est petit et peut être négligé. Si la frange d'ordre zéro est horizontale en l'absence de la lame de verre et de la substance étudiée, l'introduction de la lame provoque l'inclinaison des franges. L'inclinaison d'une frange est donnée par la dérivée $\frac{dy_k}{dx} = k\alpha \frac{d\lambda}{dx}$, elle est donc d'autant plus grande que l'ordre d'interférence k est grand. L'inclinaison due à la lame de verre a le même sens dans toute la région spectrale; mais si on la place dans l'autre bras de l'interféromètre, k change de signe et l'inclinaison des franges change de sens. Plaçons la lame dans le bras de l'interféromètre où $k > 0$, i.e.

$$k \approx \frac{n_v - 1}{\lambda} l_v. \qquad (86.5)$$

Avec la détermination adoptée du sens positif de l'axe X ($d\lambda/dx < 0$), on obtient $dy_k/dx < 0$, i.e. la pente des franges est dirigée de l'extrémité positive de l'axe Y vers l'extrémité positive de l'axe X (extrémité violette).

Introduisons maintenant le gaz étudié dans l'autre bras de l'interféromètre. Loin de la raie d'absorption l'indice de réfraction du gaz est voisin de l'unité et sa présence ne modifie pratiquement pas l'inclinaison des franges. Mais à proximité de la raie d'absorption la dérivée $dn/d\lambda$ est grande et provoque une forte incurvation des franges d'interférence. En l'absence de la lame de verre l'inclinaison des franges sera déterminée par la dérivée

$$\frac{dy_k}{dx} = -\alpha l \frac{d\lambda}{dx} \cdot \frac{dn}{d\lambda}.$$

Par conséquent, dans la région spectrale où la dispersion est normale ($dn/d\lambda < 0$), on a $dy_k/dx > 0$, i. e. les franges s'abaissent en allant à gauche.

Ainsi dans la région de dispersion normale la lame de verre et le gaz étudié inclinent les franges dans des sens opposés. Lorsque la lame et le gaz agissent simultanément, par un choix convenable de la lame on peut arriver à une compensation de leurs effets en un certain point de la frange. En ce point la tangente à la frange est horizontale, ce qui se traduit par l'apparition d'un « *crochet* » sur la frange. A proximité d'une raie d'absorption on obtient deux crochets, tous deux situés dans la région de dispersion normale. A gauche (du côté des ondes longues) le sommet du crochet est orienté vers le bas et à droite (du côté des ondes courtes) il est dirigé vers le haut (fig. 304). Au sommet du crochet on doit avoir $dy_k/dx = 0$ ou $dy_k/d\lambda = 0$, i. e.



Fig. 304

$$k + l\frac{dn}{d\lambda} - l_v\frac{dn_v}{d\lambda} = 0,$$

ou

$$l\frac{dn}{d\lambda} = -k + l_v\frac{dn_v}{d\lambda}. \tag{86.6}$$

Etant petit, le dernier terme du second membre peut être négligé et le premier peut être calculé par la formule (86.5). La formule (86.6) permet donc de calculer les valeurs de la dispersion $dn/d\lambda$ du gaz pour les valeurs de λ correspondant aux sommets des crochets, i.e. aux points de rebroussement des franges d'interférence.

Dès le commencement de ses recherches, Rojdestvenski constata que la formule de Sellmeier traduit correctement la variation de l'indice de réfraction en fonction de la longueur d'onde lorsqu'on se trouve loin de la raie d'absorption. La formule de Sellmeier doit s'écrire comme suit:

$$n^2 = 1 + 4\pi\frac{Nfe^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2} = 1 + \frac{Nf\lambda_0^2\lambda^2e^2/m}{\pi c^2(\lambda^2 - \lambda_0^2)}, \tag{86.7}$$

où f est la force d'oscillateur. Notons $\Delta\lambda$ la distance entre le sommet d'un crochet et la raie d'absorption λ_0 (la distance entre les sommets des deux crochets est alors $2\Delta\lambda$) et calculons la dérivée $dn/d\lambda$ par la formule (86.7) en remarquant que $|\Delta\lambda| \ll \lambda_0$ et que $n - 1 \ll 1$. En appliquant la formule (86.6) on trouve alors (en rejetant le dernier terme)

$$f = \frac{4\pi c^2 k}{Nl\lambda_0^3 e^2/m} = \frac{4\pi c^2 (n_v - 1)\, l_v}{Nl\lambda_0^4 le^2/m}(\Delta\lambda)^2. \tag{86.8}$$

On détermine ainsi la force d'oscillateur par mesure de la distance entre les sommets des crochets.

§ 87. Dispersion du plasma

1. On appelle plasma un gaz ionisé dont les électrons et les ions peuvent être considérés comme des particules libres de fréquences propres égales à zéro (cf. t. III, § 121). La permittivité diélectrique du plasma est déterminée pour l'essentiel par les *électrons libres.* On peut négliger la contribution des ions pour la raison que leurs masses sont infiniment grandes devant la masse de l'électron. En posant $\omega_0 = 0$ dans la formule (84.5) et en négligeant les amortissements, on obtient pour le plasma

$$\varepsilon = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2, \tag{87.1}$$

où

$$\omega_p^2 = 4\pi N e^2/m, \tag{87.2}$$

et N désigne la concentration d'électrons libres. La grandeur ω_p est la *fréquence de plasma* ou *de Langmuir.* Cette fréquence joue pour le plasma le rôle de *fréquence propre*, mais caractérise non pas les particules prises isolément, mais l'*ensemble de toutes les particules chargées* constituant le plasma.

Pour expliquer les causes d'apparition d'une « fréquence propre » chez un ensemble de particules dont aucune prise isolément ne possède de fréquence propre, nous considérerons l'exemple suivant. Supposons qu'un plasma neutre occupe l'espace compris entre deux plans infinis orthogonaux à l'axe X. Dans ce plasma neutre le champ électrique moyen est nul. Déplaçons tous les éléctrons du plasma d'une petite distance x parallèlement à l'axe X (fig. 305) sans déplacer les ions. Dans ces conditions on voit apparaître aux frontières du plasma des charges électriques avec une densité surfacique $\sigma = Nex$ et un champ électrique $E = 4\pi\sigma = 4\pi Nex$ s'établit dans le plasma. Chaque électron est soumis à la force quasi élastique $F = 4\pi Ne^2x$. Si on abandonne le plasma à lui-même, les électrons se mettent à exécuter des oscillations harmoniques libres, de fréquence propre égale à $\sqrt{4\pi Ne^2/m}$. C'est précisément ce que l'on appelle fréquence de plasma.

Fig. 305

2. A la fréquence de plasma $\omega = \omega_p$ la permittivité diélectrique ε devient nulle. Pour $\omega > \omega_p$ ε est positif (de même que l'indice de réfraction $n = \sqrt{\varepsilon}$) mais inférieur à l'unité. Pour $\omega < \omega_p$, ε est négatif et l'indice de réfraction est purement imaginaire, i. e. $n =$

$= -i\varkappa$. C'est pour cette raison que les ondes électromagnétiques longues (fréquence $\omega < \omega_p$) ne peuvent se propager dans le plasma. Les ondes longues ne peuvent y pénétrer qu'à une faible profondeur et y subissent une réflexion totale. Supposons en effet que l'onde incidente est polarisée dans un plan perpendiculaire au plan d'incidence (si la polarisation est différente, les raisonnements qui suivent restent les mêmes). D'après la formule de Fresnel on a

$$\frac{R}{\mathcal{E}} = \frac{\cos\varphi - \sqrt{\varepsilon}\cos\psi}{\cos\varphi + \sqrt{\varepsilon}\cos\psi} = \frac{\cos\varphi + i\varkappa\cos\psi}{\cos\varphi - i\varkappa\cos\psi},$$

avec $\sin\varphi/\sin\psi = \sqrt{\varepsilon} = -i\varkappa$. Par conséquent, $\cos\psi = \sqrt{1-\sin^2\psi} = \sqrt{1+\sin^2\varphi/\varkappa^2}$. Cos ψ est donc une quantité réelle et par suite $|R/\mathcal{E}| = 1$, ce qui démontre notre proposition.

Ces considérations jouent un rôle extrêmement important pour les *liaisons radio à grande distance* sur la Terre. L'atmosphère terrestre comporte une région ionisée appelée *ionosphère* qui commence à une altitude de $\sim$ 60 km et s'étend probablement jusqu'à une altitude de $\sim$ 20 000 km. Les principales sources d'ionisation de l'ionosphère sont le rayonnement solaire ultraviolet et des rayons X mous (longueur d'onde 0,8 à 30 nm) émis par la couronne solaire. Une autre source d'ionisation est l'émission corpusculaire du Soleil. La concentration N des électrons varie avec l'altitude de façon irrégulière. Il existe plusieurs maximums relatifs d'ionisation situés à différentes altitudes. Toute partie de l'ionosphère contenant un de ces maximums est désignée sous le nom de *couche ionosphérique*. Les couches qui se succèdent en montant sont dénotées par les lettres majuscules D, E_1, E_2, F_1, F_2. Les maximums de la concentration électronique dans ces couches sont compris entre 10^4 et 10^6 électrons par cm^3. La concentration électronique dépend de la latitude géographique du lieu et subit des variations diurnes et annuelles. Elle est plus grande en été qu'en hiver et plus grande le jour que la nuit. On observe également des variations *sporadiques* de la concentration électronique faisant suite aux éruptions solaires, etc.

Voyons comment les ondes radio émises par une station terrestre A arrivent jusqu'au récepteur B placé sur la surface terrestre à plusieurs milliers de kilomètres de A. On doit exclure le trajet en ligne droite joignant A et B à travers la terre, car étant conducteur, le sol absorbe fortement les ondes radio. Comme l'indice de réfraction de l'air non ionisé est peu différent de l'unité, la réfraction des ondes radio ne joue pratiquement aucun rôle. Si l'ionosphère n'existait pas, les ondes émises par A ne pourraient atteindre B que par diffraction. Or le récepteur B est situé dans la région de l'ombre géométrique à une distance égale à plusieurs milliers ou dizaines de milliers de longueurs d'onde de la frontière de l'ombre. Dans ces conditions l'in-

tensité de l'onde diffractée à l'emplacement du récepteur B serait tellement petite qu'aucun récepteur ne saurait la déceler. L'existence de l'ionosphère change tout à ce problème, puisque les ondes radio peuvent *se réfléchir sur l'ionosphère* et parvenir jusqu'au récepteur. C'est uniquement grâce à ces réflexions que la transmission des signaux radio peut avoir une portée de plusieurs milliers de kilomètres sur la surface terrestre.

3. Etablissons une relation entre la vitesse de phase v et la vitesse de groupe u des ondes électromagnétiques dans le plasma pour $\omega > \omega_p$. On déduit de la formule (87.1) une expression du nombre d'onde k

$$c^2k^2 = \omega^2\varepsilon = \omega^2 - \omega_p^2.$$

Par dérivation de cette relation on obtient $c^2k\,dk = \omega\,d\omega$, i. e. $(\omega/k)\,(d\omega/dk) = c^2$ ou

$$vu = c^2. \tag{87.3}$$

La vitesse de phase dans le plasma

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{1-\omega_p^2/\omega^2}} \tag{87.4}$$

est toujours plus grande que la vitesse de la lumière dans le vide. La relation (87.3) donne pour la vitesse de groupe

$$u = c^2/v = c\sqrt{1-\omega_p^2/\omega^2}. \tag{87.5}$$

Elle est toujours plus petite que c, comme il se doit.

Notons une curieuse application de la formule (87.5) en astrophysique. Aussitôt après la découverte des *pulsars* en 1967, par Hewish, on s'aperçut que *les signaux de grandes longueurs d'onde émis par les pulsars parviennent jusqu'à la Terre plus lentement que les signaux de courtes longueurs d'onde.* (Pour s'en rendre compte, on assure la réception d'un seul et même signal à l'aide de deux récepteurs accordés à des fréquences différentes.) On explique ce phénomène par l'influence qu'exerce le *plasma interstellaire* sur les signaux qui le traversent. Un signal quasi monochromatique se propage dans le plasma interstellaire avec la vitesse de groupe (87.5). Le temps que met le signal pour aller du pulsar à la Terre est donné par l'intégrale $t = \int dx/u$ étendue à tout le trajet. La concentration N d'électrons libres et par suite la fréquence de plasma ω_p ont des valeurs différentes en différents points du trajet. Mais comme partout $\omega_p \ll \omega$, on peut ne garder que le premier terme du développement de l'expression sous le signe d'intégration en série de puissances de ω_p^2/ω^2:

$$t = \frac{1}{c}\int dx\,(1-\omega_p^2/\omega^2)^{-1/2} = \frac{1}{c}\int dx\left(1+\frac{1}{2}\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right).$$

Par rapport au vide, le temps de propagation du signal augmente de

$$\Delta t = \frac{1}{2c\omega^2} \int \omega_p^2 \, dx = \frac{\lambda^2 e^2}{2\pi cmc^2} \int N \, dx = \frac{\lambda^2 r}{2\pi c} \int N \, dx,$$

où $r = e^2/(mc^2) \approx 2{,}8 \cdot 10^{-13}$ cm qui est la *valeur classique du rayon de l'électron.*

L'intégrale $\int N \, dx$ représente le nombre total d'électrons contenus dans un canal cylindrique de section droite égale à 1 cm² et de longueur égale au trajet parcouru par le signal pour aller du pulsar à la Terre. C'est une des caractéristiques intégrales du plasma interstellaire sur le trajet du signal. Quoique la concentration de ce plasma soit très petite, l'énormité du trajet fait que cette intégrale possède une valeur suffisante pour déceler le retard des signaux de grande longueur d'onde par rapport aux signaux de courte longueur d'onde (dans la gamme des ondes centimétriques). C'est par ce procédé qu'on réussit à évaluer pour la première fois les distances Terre-pulsars. En supposant que sur le trajet 10 % environ des atomes d'hydrogène étaient ionisés, les distances jusqu'aux pulsars connus sont comprises entre 200 et 7000 années-lumière.

§ 88. Densité moyenne d'énergie électromagnétique dans les milieux dispersifs

1. L'expression de la densité d'énergie électromagnétique $w = (\varepsilon E^2 + \mu H^2)/(8\pi)$ avait été établie en supposant que ε et μ étaient *constants*, i.e. ne dépendaient pas de la fréquence ω (cf. t. III, § 84). *Cette expression ne peut être utilisée pour les milieux dispersifs.* Au lieu d'étudier cette question

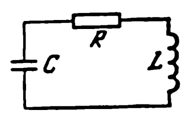


Fig. 306

dans toute sa généralité, nous établirons une expression de la densité moyenne d'énergie électromagnétique dans un milieu dispersif non absorbant en considérant un cas particulier suggéré par M. L. Lévine.

Une substance de permittivité diélectrique $\varepsilon(\omega)$ et de perméabilité magnétique $\mu(\omega)$ remplit tout l'espace compris entre les armatures d'un condensateur plan de capacité $C = \varepsilon(\omega) C_0$ et un solénoïde fin d'inductance $L = \mu(\omega) L_0$ formant un circuit oscillant (fig. 306). C_0 et L_0 désignent les valeurs de la capacité et de l'inductance pour le cas où la substance serait remplacée par le vide. Si la résistance électrique est nulle, le circuit oscillant sera le siège d'oscillations harmoniques libres de pulsation $\omega = 1/\sqrt{L(\omega) C(\omega)}$. Si on introduit, à un certain instant, une petite résistance R dans le circuit, les oscillations commenceront à s'amortir et l'énergie électromagnétique, qui avait été antérieurement accumulée dans le circuit, sera dissipée par effet Joule dans la résistance R. La quantité totale de chaleur dégagée dans R jusqu'à l'instant où les oscillations

auront disparu doit être égale à l'énergie électromagnétique qui avait été accumulée jusqu'à l'instant où on a introduit la résistance R. Le problème se trouve ainsi ramené au calcul de la chaleur dégagée par effet Joule.

Posons que pour $t < 0$ le circuit était le siège d'oscillations libres:

$$I = I_0 e^{i\omega t}, \quad V = V_0 e^{i\omega t},$$

où I est l'intensité de courant dans le circuit et V la tension appliquée aux armatures du condensateur, qui sont liées entre elles par la relation $L\dot{I} + V = 0$ ou $i\omega LI + V = 0$. Si on introduit une résistance R dans le circuit à l'instant $t = 0$, à partir de cet instant les oscillations seront décrites par l'équation

$$L(\tilde{\omega})\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{I}{C(\tilde{\omega})} = 0,$$

d'où

$$I = I_0 e^{i\tilde{\omega}t}, \quad t > 0,$$

où $\tilde{\omega}$ est la fréquence complexe définie par l'équation

$$\tilde{\omega}L(\tilde{\omega}) - \frac{1}{\tilde{\omega}C(\tilde{\omega})} = iR.$$

Si R est infiniment petit, la différence entre $\tilde{\omega}$ et ω sera également infiniment petite. ω doit vérifier l'équation

$$\omega L(\omega) - \frac{1}{\omega C(\omega)} = 0.$$

En soustrayant cette équation de la précédente et en remplaçant toutes les différences par des différentielles, on obtient

$$\left[\frac{d}{d\omega}(\omega L) + \frac{1}{\omega^2 C^2}\frac{d}{d\omega}(\omega C)\right](\tilde{\omega} - \omega) = iR,$$

d'où $\tilde{\omega} = \omega + i\delta$, avec

$$\frac{R}{\delta} = \frac{d(\omega L)}{d\omega} + \frac{1}{\omega^2 C^2}\frac{d(\omega C)}{d\omega} = \frac{d(\omega L)}{d\omega} + \frac{L}{C}\frac{d(\omega C)}{d\omega}.$$

Pour trouver la chaleur dégagée par effet Joule, on doit intégrer l'expression RI^2 par rapport au temps. Comme l'élévation au carré est une opération non linéaire, on doit passer à la forme réelle, ce qui revient à réaliser la substitution

$$I \to \mathrm{Re}\,(I) = (I + I^*)/2.$$

L'énergie initialement accumulée dans le circuit oscillant est

$$W = \int_0^\infty R\left(\frac{I+I^*}{2}\right)^2 dt = \frac{R\,|I_0|^2}{4}\left\{\frac{\delta}{\omega^2+\delta^2} + \frac{1}{\delta}\right\}$$

ou à la limite pour $\delta \to 0$

$$W = \frac{|I_0|^2}{4}\frac{R}{\delta}.$$

En y portant l'expression de R/δ et en remarquant que $\omega L\,|I_0| = |V_0|$, on obtient

$$W = \frac{L_0\,|I_0|^2}{4}\frac{d(\omega\mu)}{d\omega} + \frac{C_0\,|V_0|^2}{4}\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}.$$

Si le condensateur et le solénoïde ne contenaient que du vide, les valeurs moyennes par rapport au temps de l'énergie électrique et de l'énergie magnétique seraient égales à

$$\frac{L_0 \mid I_0 \mid^2}{4}=\frac{1}{8\pi}\overline{H^2}\tau_m, \quad \frac{C_0 \mid V_0 \mid^2}{4}=\frac{1}{8\pi}\overline{E^2}\tau_e,$$

où τ_m et τ_e sont les volumes du solénoïde et du condensateur, et E et H les intensités du champ électrique et du champ magnétique lorsque l'amplitude de la tension appliquée au condensateur est égale à V_0 et l'amplitude du courant dans le solénoïde est égale à I_0. Or lorsque V_0 et I_0 sont donnés, les champs E et H sont indépendants du milieu contenu dans le condensateur et dans le solénoïde; il s'ensuit que ces relations sont vérifiées lorsque le condensateur et le solénoïde sont remplis de substances. On en déduit les valeurs moyennes par rapport au temps des densités de l'énergie électrique et de l'énergie magnétique:

$$\begin{aligned} \overline{w}_e&=\frac{\overline{W_e}}{\tau_e}=\frac{1}{8\pi}\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\overline{E^2},\\ \overline{w}_m&=\frac{\overline{W_m}}{\tau_m}=\frac{1}{8\pi}\frac{d(\omega\mu)}{d\omega}\overline{H^2}. \end{aligned} \qquad (88.1)$$

Cette démonstration présente un défaut de principe. La différentiation des fonctions ωL et ωC est réalisée suivant un *axe imaginaire* (puisque la différence des fréquences $\tilde{\omega}-\omega=iR$ est une quantité purement imaginaire) et dans l'expression (88.1) la différentiation est réalisée par rapport à la *variable réelle* ω. Or on ne peut le faire que si les fonctions ωL et ωC sont des fonctions *analytiques*. Pour que la démonstration donnée ci-dessus fût rigoureuse, on devrait démontrer que ces fonctions sont bien analytiques. On peut le faire dans le cadre de la théorie générale de la dispersion par étude des fonctions $\varepsilon(\omega)$ et $\mu(\omega)$, ce qui sort du cadre de notre livre.

2. Pour mettre en évidence la signification de la formule (88.1) on considérera un gaz d'oscillateurs harmoniques classiques soumis à un champ électrique monochromatique de fréquence ω. Si cette fréquence est très différente de la fréquence propre ω_0 de l'oscillateur, on peut négliger l'affaiblissement et représenter son déplacement par rapport à la position d'équilibre par la formule

$$r=\frac{eE}{m(\omega_0^2-\omega^2)}.$$

Dans ces conditions l'énergie se compose de l'*énergie du champ électromagnétique proprement dit* (i. e. du champ dans le vide) et de l'*énergie des particules* soumises à l'action du champ. Cette dernière énergie se répartit en *énergie cinétique* et en *énergie potentielle* des oscillateurs. Dans les champs statiques il n'y a pas d'énergie cinétique et par suite $w=\varepsilon E^2/(8\pi)$. Dans les champs alternatifs on doit tenir compte de l'énergie cinétique.

La densité d'énergie du champ électromagnétique est

$$w_1=\frac{1}{8\pi}\left(\frac{E+E^*}{2}\right)^2=\frac{E^2}{32\pi}+\frac{EE^*}{32\pi}+\text{conj. compl.}$$

La densité de l'énergie potentielle est

$$w_2=\frac{Nm\omega_0^2}{2}\left(\frac{r+r^*}{2}\right)^2=\frac{Nm\omega_0^2}{8}(r^2+rr^*)+\text{conj. compl.},$$

et la densité de l'énergie cinétique est

$$w_3=\frac{Nm}{2}\left(\frac{\dot{r}+\dot{r}^*}{2}\right)^2=-\frac{Nm\omega^2}{8}(r^2-rr^*)+\text{conj. compl.}$$

En remplaçant r par son expression et en remarquant que la formule de Sellmeier implique que

$$\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}=1+\frac{(\varepsilon-1)(\omega_0^2+\omega^2)}{\omega_0^2-\omega^2},$$

on trouve que la densité de l'énergie électrique est

$$w_e=\frac{\varepsilon E^2}{32\pi}+\frac{1}{32\pi}\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}(EE^*)+\text{conj. compl.}$$

En moyennant sur le temps on obtient la première formule (88.1). Pour la densité de l'énergie magnétique la formule est la même que pour un milieu non dispersif.

PROBLÈMES

1. Rayleigh proposa de déterminer la *vitesse moyenne de déplacement de l'énergie* u dans une onde progressive plane en prenant le rapport de la densité moyenne du flux d'énergie à la densité moyenne de l'énergie. Démontrer à l'aide de l'expression du vecteur de Poynting que pour une onde électromagnétique monochromatique la vitesse ainsi calculée coïncide avec la vitesse de groupe.

Solution. On trouve sans difficulté les expressions des densités moyennes du flux d'énergie et de l'énergie:

$$\bar{w}=\frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{dk}{d\omega}(EE^*),\qquad \bar{S}=\frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}(EE^*),$$

et on en déduit le résultat cherché.

2. Démontrer que si $\varepsilon(\omega)$ et $\mu(\omega)$ sont tous deux positifs les vitesses de phase et de groupe d'une onde électromagnétique sont dirigées dans le même sens.

Solution. La densité moyenne de l'énergie électromagnétique

$$\bar{w}=\frac{1}{8\pi}\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}(EE^*)+\frac{1}{8\pi}\frac{d(\omega\mu)}{8\pi}(HH^*)$$

est une quantité essentiellement positive. Dans une onde plane $\varepsilon(EE^*)=\mu(HH^*)$ et par suite

$$\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}+\frac{\mu}{\varepsilon}\frac{d(\omega\mu)}{d\omega}>0.$$

Cette inégalité est vérifiée pour n'importe quel milieu si ε et μ sont de même signe; en effet, elle a été établie en supposant qu'il peut se propager dans le milieu une onde monochromatique homogène vérifiant la relation $k^2=\varepsilon\mu\omega^2/c^2>0$. On admettra que la même hypothèse reste valable pour la vitesse de groupe. En mettant l'inégalité précédente sous la forme

$$\mu\frac{\omega}{k}\frac{d\omega}{dk}=\mu vu>0,$$

on arrive au résultat cherché.

§ 89. Absorption de la lumière et élargissement des raies spectrales

1. Dans la théorie classique de la dispersion l'absorption (l'extinction) du rayonnement est prise en compte d'une façon formelle en introduisant dans l'équation (84.1) la force de freinage $-g\dot{r}=$

$= - 2m\gamma v$. Sous l'action de cette force l'amplitude des vibrations diminue avec le temps selon la loi exponentielle exp ($-\gamma t$) et l'énergie des vibrations selon la loi

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 e^{-2\gamma t} = \mathscr{E}_0 e^{-t/\tau}. \tag{89.1}$$

La nature physique de la force $- gv$ reste indéterminée.

Planck développa une théorie de la dispersion et de l'absorption de la lumière en supposant que l'oscillateur excité (électron) en mouvement accéléré rayonne constamment en perdant de l'énergie. L'énergie perdue en rayonnement est (cf. t. III, § 141)

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \frac{2e^2}{3c^3}\dot{v}^2. \tag{89.2}$$

Appliquons cette formule à l'oscillateur. Si la quantité d'énergie qu'il perd par période est relativement petite, les oscillations seront peu différentes de celles d'un oscillateur harmonique et on pourra poser que par période les valeurs moyennes de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle de l'oscillateur sont égales; par conséquent la valeur moyenne de son énergie totale est égale au double de l'énergie cinétique. Comme l'énergie totale $\mathscr{E}$ d'un oscillateur faiblement amorti reste presque constante au cours d'une période, $\overline{\mathscr{E}} \approx \mathscr{E}$. Si les oscillations sont faiblement amorties $v \approx v_0 \sin(\omega_0 t + \delta)$, $\dot{v} = \omega_0 v_0 \cos(\omega_0 t + \delta)$. En élevant cette dernière expression au carré et en moyennant sur une période, on obtient

$$\langle \dot{v}^2 \rangle = \omega_0^2 \langle v^2 \rangle = \omega_0^2 \mathscr{E}/m.$$

En moyennant la formule (89.2) sur le temps on trouve

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \frac{2e^2\omega_0^2}{3mc^3}\mathscr{E},$$

et on en déduit une formule de la forme (89.1). Tout se passe comme si la charge en oscillation était soumise à la force de freinage $- 2m\gamma v$, avec

$$\gamma = \frac{1}{3}\frac{e^2\omega_0^2}{mc^3} \tag{89.3}$$

L'amortissement résultant de l'émission d'un rayonnement est dit *amortissement naturel*. Le temps d'amortissement naturel τ_{ray} au cours duquel l'énergie diminue de e fois est

$$\tau_{ray} = \frac{1}{2\gamma} = \frac{3mc^3}{2e^2\omega_0^2} = \frac{3mc}{8\pi^2 e^2}\lambda^2 = \frac{3}{8\pi^2}\left(\frac{\lambda}{r}\right)\left(\frac{\lambda}{c}\right), \tag{89.4}$$

où $r = e^2/(mc^2) = 2{,}8 \cdot 10^{-13}$ cm est le *rayon classique de l'électron*. Pour $\lambda = 600$ nm cette formule fournit $\tau_{ray} = 1{,}63 \cdot 10^{-8}$ s.

2. L'affaiblissement a pour conséquence que les vibrations cessent d'être monochromatiques, ce qui entraîne un *élargissement des raies spectrales*. La largeur d'une raie spectrale élargie par suite du

rayonnement est appelée *largeur naturelle de la raie spectrale.* On calcule cette largeur en développant en intégrale de Fourier le champ de rayonnement $E = E_0 \exp(-\gamma t) \sin \omega_0 t$. Les carrés des coefficients de ce développement caractérisent les *densités spectrales relatives du rayonnement* $I(\omega)$, i. e. la répartition de l'énergie dans une raie spectrale en fonction de la fréquence. Le résultat s'exprime par la formule (29.10) que nous écrivons ici sous la forme

$$I(\omega) = \frac{1}{(\omega-\omega_0)^2 + 1/(2\tau_{ray})^2}, \tag{89.5}$$

τ qui figure dans (29.10) a été remplacé par $2\tau_{ray}$; τ caractérisait l'*affaiblissement de l'amplitude*, tandis que τ_{ray} désigne le *temps d'affaiblissement de l'énergie*). La figure 307 représente la forme d'une raie spectrale correspondant à la valeur du paramètre $\omega_0\tau_{ray} = 5$, valeur qui est certainement trop petite. (Dans l'exemple numérique donné plus haut $\omega_0\tau_{ray} = 2\pi c\tau_{ray}/\lambda \approx 5\cdot 10^5$.) Le temps d'affaiblissement des raies spectrales émises par les gaz est beaucoup plus grand et les raies spectrales sont beaucoup plus étroites qu'indiqué sur la figure 307.

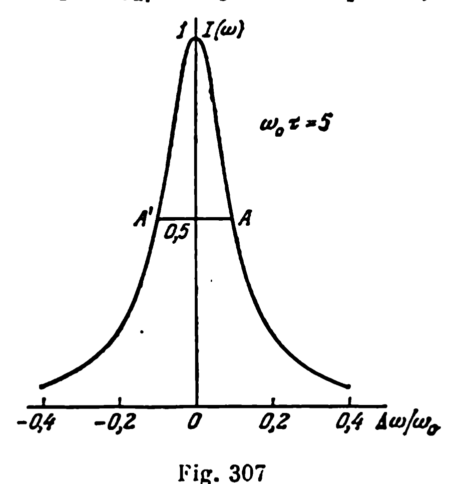


Fig. 307

On caractérise la largeur d'une raie spectrale par la distance entre les points A et A' situés de part et d'autre du centre de la raie pour lesquels l'intensité lumineuse est deux fois plus petite qu'au centre de la raie. Cette distance est appelée *demi-largeur de la raie spectrale.* On déduit de la formule (89.5) que la demi-largeur naturelle d'une raie spectrale est

$$\Delta\omega = 1/\tau_{ray} = 2\gamma. \tag{89.6}$$

En physique quantique où on associe l'émission d'une radiation au passage de l'atome d'un niveau de plus grande énergie sur un niveau d'énergie plus petite (i. e. au retour de l'état excité à l'état normal), la quantité τ_{ray} représente la *durée de vie de l'état excité.* De même qu'en physique classique la formule (89.6) résulte de la relation générale (29.8) selon laquelle $\Delta\omega\cdot\tau_{ray} \sim 1$.

L'affaiblissement naturel des radiations émises par les atomes isolés ainsi que l'élargissement correspondant des raies spectrales ont été expérimentalement étudiés par W. Wien en 1919-1927. Les rayons canaux constitués par des atomes lumineux étaient injectés

à travers un petit orifice (0,1 × 3 mm²) dans un espace où régnait un vide poussé ($< 0{,}001$ mm Hg). Dans cet espace les atomes se mouvaient sans chocs, mais leur luminosité diminuait à mesure que l'on s'éloignait de l'orifice d'entrée. En mesurant l'affaiblissement de la luminosité on pouvait évaluer le temps d'affaiblissement naturel; mais pour cela il fallait connaître la vitesse moyenne des atomes des rayons canaux. On déterminait cette vitesse par mesure du déplacement de Doppler des raies spectrales suivant la direction des rayons canaux; cette vitesse était de l'ordre de $5 \cdot 10^7$ cm/s (pour les atomes d'hydrogène). Wien trouva ainsi que le temps τ était de 10^{-8} s environ. Cette valeur variait quelque peu avec la substance utilisée et avec la raie observée. Les résultats obtenus n'étaient en accord avec les prévisions de la théorie que par l'ordre de grandeur, la relation simple (89.4) entre le temps d'affaiblissement et la longueur d'onde ($\tau \sim \lambda^2$) ne fut pas confirmée. On ne pouvait d'ailleurs pas s'attendre à un accord quantitatif entre l'expérience et une théorie classique simple fondée sur le modèle de l'oscillateur harmonique.

3. Tout ce qui précède concernait le rayonnement de l'*atome isolé*. Dans le cas d'un *milieu* composé d'atomes, on doit tenir compte non seulement de l'énergie perdue par un atome par émission de rayonnement, mais encore de ce que l'atome capte l'énergie rayonnée par les autres atomes. L. I. Mandelstam remarqua que si le milieu était *optiquement homogène*, ces deux processus se compenseraient mutuellement et en l'absence d'autres causes d'affaiblissement les oscillations des atomes seraient non amorties. Dans ces conditions une onde progressive plane se propagerait dans le milieu sans subir d'affaiblissement. La situation devient tout autre si le milieu n'est pas homogène. Les inhomogénéités peuvent résulter soit de l'*inclusion de particules étrangères* (poussières ou gouttelettes de brouillard en suspension dans l'air), soit de *fluctuations thermiques* dans le milieu. Dans ces conditions l'énergie que les atomes perdent en rayonnement entraîne un affaiblissement des ondes qui se propagent dans le milieu. Mais il s'agit non pas d'une vraie absorption de la lumière avec transformation de l'énergie électromagnétique en d'autres formes d'énergie (en chaleur), mais d'une *diffusion de la lumière* qui ne s'accompagne pas d'une transformation d'énergie. L'absorption vraie de la lumière, donnant lieu à la transformation de l'énergie de l'onde en d'autres formes d'énergie (chaleur), est déterminée par des causes différentes. D'ailleurs l'affaiblissement de l'onde dû au rayonnement est très petit en comparaison de l'affaiblissement que l'on observe réellement.

4. Une des causes d'absorption de la lumière consiste en ce que les atomes au sein desquels s'effectuent les vibrations subissent des *chocs les uns avec les autres* au cours de leurs mouvements d'agitation thermique. Chaque choc modifie fortement et de façon irrégulière les amplitudes et les phases des oscillations harmoniques et l'énergie des oscillations régulières est convertie en chaleur, il se produit donc

une *absorption de la lumière*. Partant de ces conceptions, H. A. Lorentz développa une théorie de l'élargissement des raies spectrales résultant de chocs entre les atomes (ou les molécules) du gaz. Cet élargissement des raies est dit *élargissement par choc*. Lorentz démontra que dans les gaz les chocs entre les molécules animées de mouvement d'agitation thermique conduisent statistiquement à une loi exponentielle d'affaiblissement des ondes et à des raies spectrales de même aspect que dans le cas d'un affaiblissement naturel.

Nous ne reproduirons pas ici les calculs auxquels s'était livré Lorentz, car on devrait faire des hypothèses spéciales sur le caractère des irrégularités des amplitudes et des phases des vibrations dues aux chocs et le résultat final ne serait néanmoins exact qu'à un facteur numérique près. Or on peut arriver à un résultat de cette précision sans aucun calcul à l'aide de considérations générales fondées sur la formule générale (29.8).

Désignons par τ_{ch} le temps de libre parcours moyen d'un atome entre deux chocs successifs. On peut admettre qu'entre les chocs les oscillations qui se produisent dans l'atome restent harmoniques et s'arrêtent à l'instant du choc. Aussitôt après un choc les oscillations sont relancées, mais avec de nouvelles valeurs des amplitudes et des phases qui ne sont aucunement liées aux valeurs avant le choc. Les oscillations qui sont discontinues dans le temps occupent, après développement spectral, un intervale de fréquences $\Delta\omega$ vérifiant la relation $\Delta\omega \cdot \tau_{ch} \approx 1$. On en déduit que l'élargissement par choc des raies spectrales est donné par la formule

$$\Delta\omega \sim 1/\tau_{ch}. \tag{89.7}$$

Le nombre de chocs que subit un atome par unité de temps est déterminé par la formule de la théorie cinétique des gaz $z = N\sigma v$, où N est le nombre d'atomes contenus dans l'unité de volume, σ la section cinétique transversale de l'atome, $v \approx \sqrt{kT/m}$ la vitesse moyenne du mouvement thermique de l'atome (cf. t. II, § 86). Ainsi

$$\tau_{ch} \approx \frac{1}{N\sigma v}. \tag{89.8}$$

L'affaiblissement et l'élargissement par choc des raies spectrales sont particulièrement importants dans les *gaz denses à température élevée*. Pour réduire l'influence des chocs il faut diminuer la densité du gaz. C'est pour cette raison que dans les expériences de Wien sur l'affaiblissement naturel on envoyait les rayons canaux dans le vide. Dans les conditions usuelles les chocs affaiblissent l'onde beaucoup plus fortement que ne le fait le rayonnement des atomes. La formule (89.8) fournit cependant des temps d'affaiblissement trop grands et donc des valeurs trop faibles de l'élargissement des raies, comparées

aux données expérimentales. Il doit donc exister d'autres causes d'absorption de la lumière et d'élargissement des raies.

Parmi ces causes on peut envisager l'action qu'exercent sur l'atome rayonnant différents *champs de force*, en premier lieu le champ électrique créé par les atomes environnants. Dans les champs électriques statiques les raies spectrales éclatent (effet Stark). Dans les champs alternatifs les modifications que subissent les raies spectrales sont plus compliquées. C'est là une des principales causes d'élargissement des raies spectrales.

5. Une autre cause d'élargissement des raies spectrales est la variation de la fréquence de la lumière émise par *effet Doppler*. Soit ω_0 la fréquence de l'onde rayonnée par une molécule (ou un atome) fixe. Si la molécule est animée d'un mouvement uniforme, la fréquence de l'onde qu'elle émet suivant la direction de l'axe X varie dans le système de laboratoire ; dans l'approximation non relativiste, cette fréquence est donnée par la formule

$$\omega = \omega_0 (1 + v_x/c), \qquad (89.9)$$

où v_x est la vitesse de la molécule le long de l'axe X.

Conformément à la loi de répartition des vitesses de Maxwell, la probabilité que la composante x de la vitesse de la molécule soit comprise dans l'intervalle $(v_x, v_x + dv_x)$ est égale à

$$dw = A_1 \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right) dv_x,$$

où m est la masse de la molécule et A_1 une constante de normalisation (cf. t. II, § 72). En remplaçant la variable v_x par ω à l'aide de la formule (89.9) on obtient

$$dw = A_1 \frac{c}{\omega_0} \exp\left[-\frac{mc^2}{2kT}\left(\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0}\right)^2\right] d\omega.$$

Comme les radiations émises par différentes molécules du gaz sont *incohérentes*, la quantité dw détermine la probabilité de rayonnement dans l'intervalle spectral $(\omega, \omega + d\omega)$. L'intensité lumineuse $I(\omega)\, d\omega$ revenant à cet intervalle est proportionelle à dw. On obtient

$$I(\omega) = I_0 \exp\left[-\frac{mc^2}{2kT}\left(\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0}\right)^2\right], \qquad (89.10)$$

où I_0 est une nouvelle constante. Il est évident que $I_0 = I(\omega_0)$, i. e. I_0 est l'intensité spectrale qui correspond au centre de la raie. De part et d'autre du centre de la raie l'intensité spectrale décroît exponentiellement selon la loi (89.10). On calcule facilement que la demi-largeur de la raie spectrale est

$$\Delta\omega = 2\sqrt{\frac{2kT}{mc^2}\ln 2}\,\omega_0 = 2\sqrt{\ln 2}\,\frac{v_m}{c}\,\omega_0 = 1{,}67\frac{v_m}{c}\,\omega_0, \qquad (89.11)$$

où $v_m = \sqrt{2\,kT/m}$ est la vitesse la plus probable de la molécule.

L'effet Doppler est la principale cause d'élargissement des raies spectrales des gaz à basses pressions et à températures élevées.

6. L'exposé donné ici de la théorie de l'absorption et de la dispersion de la lumière est fondé sur des *équations linéaires* et c'est pour cela que les indices théoriques de réfraction n et d'extinction $\varkappa$ sont *constants*, i.e. *ne dépendent pas de l'intensité de la lumière.* L'amplitude d'une onde monochromatique diminue au cours de sa propagation selon la loi $A = A_0 \exp(-2\pi\varkappa x/\lambda)$ et l'intensité suivant la loi

$$I = I_0 e^{-\alpha x}, \tag{89.12}$$

où $\alpha = 4\pi\varkappa/\lambda$ est le *coefficient d'extinction* (*d'absorption*) qui, dans le cas général, dépend de la longueur d'onde. La formule (89.12) exprime la *loi* dite *de Bouguer* (1698-1758) que celui-ci postula en 1729. Selon cette loi, le coefficient d'extinction (d'absorption) α ne dépend pas de l'intensité de la lumière si celle-ci est monochromatique. S. I. Vavilov, à la suite de l'étude de l'absorption de la lumière par certaines solutions, montra que le coefficient d'extinction α est constant à plus de 5 % près, lorsque l'intensité lumineuse varie de 20 à $2{,}5\cdot10^{-19}$ W/cm², le premier chiffre représentant l'intensité lumineuse des rayons solaires directs concentrés au foyer d'une lentille, tandis que le second chiffre correspond au seuil des perceptions lumineuses de l'œil.

Interprétons ces résultats au point de vue des *conceptions quantiques* sur l'absorption de la lumière. Lorsqu'une onde lumineuse est absorbée par une molécule, celle-ci passe du niveau fondamental W_0 sur le niveau excité W_n, ce qui accroît sa réserve d'énergie. Une molécule excitée présente une aptitude à l'absorption différente de celle qu'elle possède lorsqu'elle se trouve sur un niveau fondamental. Comme dans les expériences de Vavilov le coefficient d'absorption était constant, quelle que soit l'inténsité, cela veut dire que dans ces expériences le nombre de molécules excitées était négligeable devant le nombre de molécules non excitées, autrement dit la durée de vie moyenne de la molécule excitée était relativement petite. En effet, pour les substances qu'utilisait Vavilov dans ses expériences, ce temps n'excédait pas 10^{-8} s. On pourrait s'attendre à ce que, si la durée de vie et l'intensité lumineuse étaient plus grandes, le nombre de molécules se trouvant à l'état fondamental (qui sont pratiquement seules capables d'absorber la lumière) serait plus petit et la loi de Bouguer ne serait plus vérifiée. Vavilov choisit des substances qui à l'état excité avaient de grandes durées de vie, et observa une diminution du coefficient d'absorption lors de l'augmentation de l'intensité lumineuse. Ce fut le premier cas où, *en optique*, *le principe de superposition fut en défaut.*

Depuis la découverte des lasers, on dispose d'ondes lumineuses où l'intensité du champ électrique est comparable aux champs intra-

moléculaires ou intra-atomiques, et le nombre des phénomènes optiques « non linéaires » ne cesse d'augmenter. Une nouvelle branche de la physique — l'*optique non linéaire*, se développe rapidement; nous présentons un aperçu de ces phénomènes dans le dernier chapitre (chapitre XI) de ce volume.

§ 90. Biréfringences électrique et magnétique

1. La nature électromagnétique de la lumière et des substances implique que les propriétés optiques des substances doivent se modifier lorsqu'on les soumet à l'action de champs électriques et magnétiques. On observe effectivement des changements dans les propriétés optiques des substances. Ce fut d'abord Faraday qui découvrit, en 1846, la *polarisation rotatoire magnétique*, puis ce fut, en 1875, la découverte par Kerr (1824-1907) d'un « phénomène électro-optique » qui plus tard fut appelé phénomène de Kerr ou biréfringence électrique. En 1877, Kerr constata qu'un miroir en fer aimanté réfléchissait différemment la lumière polarisée que lorsque le fer n'était pas aimanté. Par la suite on découvrit plusieurs autres *phénomènes électro-optiques* et *magnéto-optiques*.

L'effet électro-optique de Kerr consiste en ce que de nombreux corps isotropes deviennent optiquement anisotropes lorsqu'on les soumet à l'action d'un champ électrique continu. Ces corps se comportent alors à l'instar de cristaux uniaxes biréfringents dont l'axe optique serait parallèle au champ électrique appliqué.

Kerr observa ce phénomène d'abord avec du verre placé dans un champ électrique. Dans ce cas, comme dans le cas de tous les autres corps solides, l'anisotropie optique peut être un effet secondaire résultant des déformations mécaniques produites par le champ électrique. Les études ultérieures de Kerr et d'autres chercheurs montrèrent cependant que ce phénomène se manifestait également dans les liquides et même dans les gaz où il ne peut y avoir d'anisotropie mécanique. On peut aussi séparer l'effet de Kerr « pur » de l'effet provoqué par les déformations mécaniques : si on applique ou si on supprime brusquement un champ électrique, les déformations mécaniques n'apparaissent ou ne disparaissent qu'au bout d'un certain temps, tandis que l'effet de Kerr proprement dit se manifeste dans les liquides et les gaz *pratiquement sans retard* (cf. pt. 5).

Comme dans tous les autres cas de biréfringence, on peut déceler le phénomène de Kerr en disposant entre des nicols croisés N_1 et N_2 un condensateur plan rempli de la substance étudiée (fig. 308, comparer fig. 278). En l'absence de champ électrique extérieur la lumière ne passe pas à travers le système, mais dès qu'on applique un champ électrique, la *biréfringence* apparaît et la lumière qui sort du condensateur est *polarisée elliptiquement* et passe en partie à travers le nicol N_2; le champ de vision s'éclaircit. L'introduction du

compensateur K permet de mesurer la différence de phase entre les deux rayons résultant de la biréfringence et de déterminer ainsi la différence $n_e - n_0$ entre l'indice extraordinaire n_e et l'indice ordinaire n_0 de la substance soumise à un champ électrique extérieur. Comme cette différence est petite, on ne peut la mesurer que par des méthodes interférentielles.

En modifiant le dispositif expérimental on peut déterminer, pour les substances liquides, les différences $n_e - n$ et $n_0 - n$. Selon une suggestion de L. I. Mandelstam, on peut utiliser, par exemple, l'in-

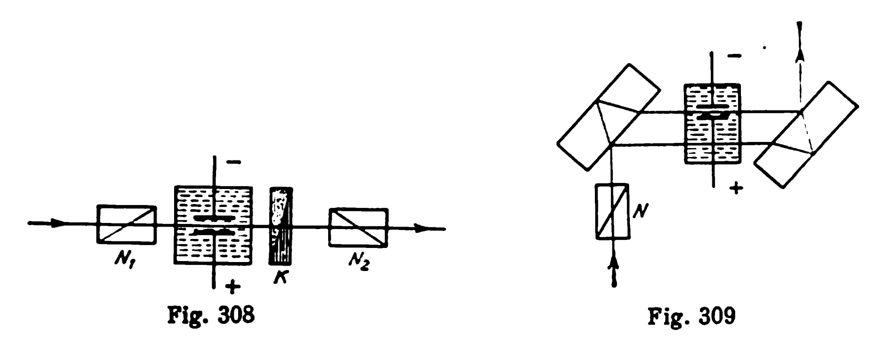


Fig. 308 Fig. 309

terféromètre de Jamin. Le liquide étudié est contenu dans une cuvette dans laquelle on immerge complètement le condensateur (fig. 309). L'un des rayons interférents passe à travers le condensateur et l'autre passe en dehors de celui-ci. Le nicol polariseur N est disposé de façon que la lumière soit polarisée dans le plan de la figure ou dans un plan rectangulaire. Lorsqu'on applique un champ électrique, l'indice de réfraction n du rayon extérieur ne change pas, tandis que le rayon qui traverse le condensateur se transforme en un rayon extraordinaire ou ordinaire suivant la position du nicol. En mesurant le déplacement des franges d'interférence, on arrive à déterminer $n_e - n$ et $n_0 - n$.

2. Dans ce qui suit on supposera que le champ électrique appliqué est *uniforme* et que le rayon lumineux se propage dans une direction perpendiculaire au champ. Notons $\boldsymbol{E}_0$ le champ extérieur et $\boldsymbol{E}$ le champ de l'onde. Il est évident que la différence $n_e - n_0$ est une fonction des composantes du champ E_{0x}, E_{0y}, E_{0z}. Si le milieu est *isotrope* (en l'absence de tout champ extérieur) cette fonction ne peut dépendre de la direction du vecteur $\boldsymbol{E}_0$, notamment elle ne doit pas changer si on inverse les signes de ses arguments, i.e. elle doit être une fonction *paire* de chacun de ces arguments. Il s'ensuit que son développement en série de puissances ne doit contenir que des termes de *puissances paires*. Dans les champs électriques faibles — et tous les champs que l'on utilise dans les expériences sont faibles, il suffit de garder les premiers termes du développement (i.e. les ter-

mes *quadratiques*). Par suite de l'isotropie du milieu les termes ne figurent que sous forme des carrés E_{0x}^2, E_{0y}^2, E_{0z}^2 précédés d'un même coefficient, ce qui permet de les réunir et d'écrire

$$n_e - n_o = qE_0^2, \tag{90.1}$$

le coefficient q ne dépendant que de la substance et de son état physique ainsi que de la longueur d'onde λ. L'expérience confirme la formule (90.1). La différence de phase entre l'onde ordinaire et l'onde extraordinaire, après que celles-ci aient traversé le condensateur, est

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)\, l = 2\pi B l E^2, \tag{90.2}$$

où l est l'épaisseur de la couche de substance traversée par la lumière et $B \equiv q/\lambda$ la *constante de Kerr*. La constante de Kerr croît lorsque la longueur d'onde diminue (dispersion) et diminue fortement lorsque la température augmente.

Tableau 9

Substance	Température, °C	Constante de Kerr B, en un. CGSE	Substance	Température, °C	Constante de Kerr B, en un. CGSE
Liquides			*Gaz*		
Nitrobenzène	20	$2{,}2\cdot10^{-5}$	Alcool éthylique	18	$9{,}2\cdot10^{-10}$
Nitrotoluène	20	$1{,}2\cdot10^{-5}$	Acétone	83	$5{,}4\cdot10^{-10}$
Chlorobenzène	20	$1\cdot10^{-6}$	Sulfure de carbone	57	$3{,}6\cdot10^{-10}$
Eau	20	$4{,}7\cdot10^{-7}$	Ether éthylique	63	$-0{,}66\cdot10^{-10}$
Sulfure de carbone	20	$3{,}2\cdot10^{-7}$	Alcénol	20	$-1{,}7\cdot10^{-10}$
Benzène	20	$6\cdot10^{-8}$			
Chloroforme	20	$-3{,}5\cdot10^{-8}$			

On a rassemblé dans le tableau 9 les valeurs de la constante de Kerr pour quelques substances liquides et gazeuses ($\lambda = 589$ nm, pression gazeuse égale à 760 mm Hg). Pour la majorité des substances $n_e > n_o$, ce qui implique que la constante de Kerr est positive. Cela correspond à l'anisotropie d'un *cristal positif*. Le cas où $B < 0$ est beaucoup plus rare (éther éthylique, diverses huiles et divers alcools). C'est le nitrobenzène qui présente la plus grande constante de Kerr.

Pour donner une idée de l'ordre de grandeur de l'effet Kerr, considérons l'exemple suivant. Posons que la distance entre les armatures du « condensateur de Kerr » est égale à 1 mm et la tension appliquée à 1500 V; ainsi $E_0 = 15\,000$ V/cm $= 50$ un. CGSE. Si le condensateur contient du nitrobenzène liquide et si $l = 5$ cm, la différence de phase φ sera égale à $\pi/2$. Ce condensateur peut faire fonction

de lame quart d'onde. Il est facile de déceler des différences de phase beaucoup plus petites, aussi l'effet de Kerr avec le nitrobenzène trouve-t-il de nombreuses applications techniques.

3. L'effet Kerr est un phénomène plus simple que l'anisotropie artificielle par déformation et sa théorie est plus développée. Dans le cas de l'anisotropie par déformation les molécules du corps sont soumises à des champs moléculaires très compliqués; ces champs sont mal connus et leur action est beaucoup plus compliquée que l'action relativement simple d'un champ électrique continu et uniforme. D'autre part, l'effet Kerr a pu être observé dans le cas de gaz pour lesquels la théorie est bien développée. L'étude de l'effet Kerr dans les gaz, de la réfraction et de la dépolarisation de la lumière diffusée permet de déterminer le tenseur de polarisabilité des molécules.

L'effet Kerr s'explique par l'anisotropie des molécules. Pour les gaz la théorie quantitative a été conçue en 1910 par Langevin (1872-1946) qui caractérisait l'anisotropie des molécules *uniquement par le tenseur de polarisabilité*. En l'absence de champ électrique extérieur, l'orientation spatiale des molécules anisotropes est parfaitement désordonnée et le milieu est macroscopiquement isotrope. Lorsqu'on applique un champ électrique, les molécules s'orientent de préférence suivant la direction du champ de façon que leurs axes de polarisabilité maximale lui soient parallèles; le milieu devient anisotrope. Dans le cas général d'un tenseur de polarisabilité arbitraire, les calculs sont fort laborieux. Mais on arrive à expliquer la théorie et les résultats, ne serait-ce que qualitativement, en supposant que les molécules sont *totalement anisotropes*, car les calculs en sont grandement simplifiés. C'est ce calcul simplifié que nous exposons ci-dessous. Une molécule est dite *totalement anisotrope* si les charges électriques qu'elle renferme ne peuvent se déplacer que suivant une direction déterminée appelée *axe de la molécule*. On peut envisager comme modèle d'une telle molécule une petite tige le long de laquelle se déplacent les charges *).

Dans les calculs il faut veiller à ne pas confondre le champ extérieur $\boldsymbol{E}_0$ et le champ de l'onde électromagnétique $\boldsymbol{E}$ que l'on suppose monochromatique. Le champ continu $\boldsymbol{E}_0$ a pour fonction de créer dans le milieu une répartition spatiale déterminée des directions des molécules. Quant au champ alternatif $\boldsymbol{E}$, il crée dans le milieu une polarisation électrique alternative $\boldsymbol{P}$ qui caractérise les indices de réfraction de l'onde électromagnétique.

Le moment dipolaire alternatif $\boldsymbol{p}$ d'une molécule totalement anisotrope n'est produit que par la composante du champ $\boldsymbol{E}$ parallèle

*) Il n'existe pas de molécules totalement anisotropes. On peut caractériser la polarisabilité d'une molécule réelle par les *valeurs principales* β_x, β_y, β_z du tenseur de polarisabilité. Si l'une de ces valeurs principales est beaucoup plus grande que les deux autres, la molécule peut être considérée comme une approximation satisfaisante de la molécule parfaitement anisotrope.

à l'axe de la molécule. Ce moment est $p = \beta E_s s = \beta (Es) s$, où s est le vecteur unitaire dirigé suivant l'axe de la molécule et β sa polarisabilité suivant cette même direction. On sait que p peut être représenté par $p = \beta E s_E s$. Orientons l'axe X suivant la direction du champ extérieur E_0 et l'axe Z suivant la direction de propagation de l'onde. Supposons d'abord que le vecteur électrique E de l'onde soit dirigé suivant l'axe X. On a alors $s_E = s_x$ et par suite

$$p_x = \beta E s_x^2, \quad p_y = \beta E s_x s_y, \quad p_z = \beta E s_x s_z.$$

Toutes les directions perpendiculaires à l'axe X sont équiprobables pour la répartition des molécules. En moyennant sur toutes ces directions on trouve $\overline{s_x s_y} = \overline{s_x s_z} = 0$. Les valeurs moyennes des projections du moment dipolaire sont

$$\overline{p}_x = \beta E \overline{s_x^2}, \quad \overline{p}_y = \overline{p}_z = 0,$$

et le vecteur de polarisation est

$$P_x = N\beta E \overline{s_x^2}, \ P_y = P_z = 0.$$

Le vecteur de polarisation du milieu est donc dirigé suivant E et a pour valeur

$$P = N\beta E \overline{s_x^2}.$$

La polarisabilité correspondante du milieu est

$$\alpha_x = N\beta \overline{s_x^2}.$$

L'indice de réfraction est *extraordinaire*. Les valeurs de cet indice et de la polarisabilité diélectrique sont

$$\varepsilon_x = n_e^2 = 1 + 4\pi N\beta \overline{s_x^2}.$$

Comme l'indice de réfraction du gaz est proche de l'unité,

$$n_e \approx 1 + 2\pi N\beta \overline{s_x^2} = 1 + 2\pi N\beta \overline{\cos^2 \vartheta}, \tag{90.3}$$

où ϑ est l'angle que fait l'axe de la molécule avec la direction du champ extérieur E_0 (i.e. avec l'axe X). Lorsque la répartition des molécules est isotrope (il n'y a pas de champ extérieur), on a $\overline{s_x^2} = \overline{s_y^2} = \overline{s_z^2}$. Mais comme $s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = 1$, $\overline{s_x^2} = 1/3$. Le milieu est donc optiquement isotrope avec

$$n = 1 + \frac{2\pi}{3} N\beta. \tag{90.4}$$

Si le champ E est orienté suivant l'axe Y, on a $s_E = s_y$. Dans ce cas l'indice de réfraction sera *ordinaire*. Un calcul analogue au précédent donne

$$n_o = 1 + 2\pi N\beta \overline{s_y^2}.$$

Pour calculer $\overline{s_y^2}$ représentons les projections du vecteur unitaire s dans un système de coordonnées polaires dont l'axe polaire est di-

rigé suivant le champ E:

$$s_x = \cos\vartheta, \quad s_y = \sin\vartheta\cos\varphi, \quad s_z = \sin\vartheta\sin\varphi,$$

où φ est l'azimut correspondant qui peut prendre avec la même probabilité n'importe quelle valeur comprise entre 0 et 2π. Cela signifie que

$$\overline{s_y^2} = \overline{\sin^2\vartheta\cos^2\varphi} = \overline{\sin^2\vartheta}\;\overline{\cos^2\varphi} = \frac{1}{2}\overline{\sin^2\vartheta},$$

et par suite

$$n_o = 1 + \pi N\beta\,\overline{\sin^2\vartheta}. \tag{90.5}$$

Avant de poursuivre les calculs, notons un résultat que l'on peut déduire de la théorie. En soustrayant (90.4) des expressions (90.3) et (90.5) on obtient

$$n_e - n = 2\left(\overline{\cos^2\vartheta} - \frac{1}{3}\right)\pi N\beta,$$

$$n_o - n = \left(\overline{\sin^2\vartheta} - \frac{2}{3}\right)\pi N\beta = \left(\frac{1}{3} - \overline{\cos^2\vartheta}\right)\pi N\beta,$$

d'où

$$\frac{n_e - n}{n_o - n} = -2. \tag{90.6}$$

Des mesures exactes montrent que cette relation est vérifiée pour la plupart des substances.

Passons au calcul de la constante de Kerr B. On tire de (90.3) et (90.5)

$$n_e - n_o = 2\pi N\beta\left(\overline{\cos^2\vartheta} - \frac{1}{2}\overline{\sin^2\vartheta}\right) = 3\pi N\beta\left(\overline{\cos^2\vartheta} - \frac{1}{3}\right),$$

et compte tenu de (90.4)

$$n_e - n_o = 9\,\frac{n-1}{2}\left(\overline{\cos^2\vartheta} - \frac{1}{3}\right). \tag{90.7}$$

Utilisons maintenant la formule de Boltzmann

$$dw = \text{const}\cdot e^{-U/kt}\,d\Omega, \tag{90.8}$$

qui détermine la probabilité dw que l'axe de la molécule se trouve à l'intérieur de l'angle solide $d\Omega$. L'énergie potentielle de la molécule placée dans le champ électrique E_0 est $U = p^2/(2\beta) - pE_0\cos\vartheta$. Le premier terme représente l'énergie dépensée pour créer un dipôle de moment dipolaire $p = \beta E_0\cos\vartheta$ et le second représente l'énergie potentielle de ce dipôle dans le champ électrique E_0. La somme de ces deux termes est $U = -\frac{1}{2}\beta E_0^2\cos^2\vartheta$. Comme cette énergie ne dépend que de l'angle ϑ, il est commode d'adopter pour angle solide $d\Omega$ la valeur $2\pi\sin\vartheta\,d\vartheta$ et de récrire la formule de Boltzmann sous la forme

$$dw = Ce^{-U/kt}\sin\vartheta\,d\vartheta, \tag{90.9}$$

où C est la constante de normalisation. Si la condition $|U/kT| \ll 1$ est vérifiée, on peut décomposer en série la fonction exponentielle en ne gardant que le terme linéaire:

$$e^{-U/kT} = 1 - \frac{U}{kT} = 1 + \frac{1}{2kT} \beta E_0^2 \cos^2 \vartheta.$$

On détermine la constante C par la condition de normalisation:

$$C \int_0^\pi \left(1 + \frac{1}{2kT} \beta E_0^2 \cos^2 \vartheta\right) \sin \vartheta \, d\vartheta = 2C \left(1 + \frac{1}{3} \frac{\beta E_0^2}{2kT}\right) = 1.$$

Il s'ensuit que

$$dw = \frac{1}{2} \frac{1 + \beta E_0^2 \cos^2 \vartheta / (2kT)}{1 + \beta E_0^2 / (6kT)} \sin \vartheta \, d\vartheta =$$

$$= \left[\frac{1}{2} + \frac{\beta E_0^2}{4kT} \left(\cos^2 \vartheta - \frac{1}{3}\right)\right] \sin \vartheta \, d\vartheta,$$

$$\overline{\cos^2 \vartheta} - \frac{1}{3} = \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} (\cos^2 \vartheta - 1) \, dw = \frac{2}{45} \frac{\beta E_0^2}{kT},$$

En portant dans (90.7) on obtient

$$n_e - n_o = \frac{n-1}{5} \frac{\beta E_0^2}{kT}, \tag{90.10}$$

et la constante de Kerr est

$$B = \frac{n-1}{5\lambda kT} \beta. \tag{90.11}$$

4. Ainsi la différence $n_e - n_o$ est proportionnelle au *carré du champ extérieur* E_0, comme on pouvait s'y attendre par raison de symétrie. Or la théorie de Langevin conduit toujours à une valeur positive de la constante de Kerr aussi bien pour les molécules totalement anisotropes que pour les molécules à tenseur de polarisabilité quelconque. Born (1882-1970) élimina, en 1916, cette difficulté de la théorie de Langevin en l'appliquant aux *molécules polaires* possédant de grands moments dipolaires permanents p_0 dont les directions ne sont pas nécessairement confondues avec les directions de la plus grande polarisabilité. Si p_0 est grand devant le moment dipolaire induit par le champ extérieur E_0, l'orientation des molécules par rapport à ce champ sera déterminée surtout par les moments dipolaires permanents p_0. Ceux-ci cherchent à s'orienter le long du champ extérieur E_0 qui fixe dans le milieu la direction de l'axe optique. La direction de la plus grande polarisabilité des molécules peut faire avec l'axe optique un angle appréciable. Lorsque ces deux directions coïncident, la constante de Kerr B est positive, et lorsqu'elles sont rectanrulaires, $B < 0$. Dans les cas intermédiaires B peut être positif ou négatif.

Il est évident que l'existence d'un moment permanent complique notablement les calculs même si les molécules sont totalement anisotropes. Nous ne considérerons ici que le cas simple où la direction du vecteur p_0 est confondue avec la direction de la plus grande polarisabilité des molécules. Ce cas se distingue de celui que nous avons considéré plus haut par ce que l'énergie potentielle de la molécule placée dans le champ E_0 est maintenant $U = -(p_0E_0) = -p_0E_0 \cos\vartheta$ et dans le développement du facteur exponentiel correspondant apparaît un terme linéaire en E_0:

$$e^{-U/kT} = 1 + \frac{p_0E_0\cos\vartheta}{kT} + \frac{p_0^2E_0^2\cos^2\vartheta}{2k^2T^2}.$$

Ce terme linéaire en E_0 ne modifie pas le calcul de $\overline{\cos^2\vartheta}$ car les intégrales de $\cos\vartheta\sin\vartheta$ et de $\cos^3\vartheta\sin\vartheta$ sont nulles. Pour arriver au résultat final il suffit de remplacer dans (90.11) la polarisabilité β par p_0^2/kT:

$$B = \frac{n-1}{5\lambda}\left(\frac{p_0}{kT}\right)^2. \qquad (90.12)$$

Cette formule montre que dans le cas de molécules polaires, la différence $n_e - n_0$ est proportionnelle au carré du champ E_0.

5. Comme les processus de polarisation et d'orientation des molécules dans le champ électrique s'effectuent en un temps très court, on peut escompter que le temps d'apparition et de disparition de l'effet Kerr lors de l'application ou de la suppression du champ extérieur doit être du même ordre de grandeur. En effet les expériences d'Abraham et Lemoine, commencées en 1899 et maintes fois reprises par la suite par d'autres chercheurs, ont montré que ce temps est inférieur à 10^{-8} s et dans certains cas inférieur à 10^{-9} s. La précision de ces expériences était encore insuffisante pour indiquer des valeurs plus concrètes. On n'arriva à préciser ces valeurs qu'en mettant en œuvre les techniques laser qui permettent de produire des impulsions de rayonnement laser de très courte durée (de l'ordre de 10^{-12} s) et de grande puissance (avec une intensité moyenne du champ électrique de plusieurs dizaines de kV/cm).

Ces champs lumineux, quoique non statiques, sont susceptibles de faire apparaître la biréfringence dans les cellules de Kerr. Le schéma de principe de ces expériences est représenté sur la figure 310. En allant de droite à gauche le rayon *1* de lumière bleue traverse la cellule de Kerr K, puis est réfléchie par une lame semi-transparente S et tombe sur un photomultiplicateur MPE. Lorsque les nicols N_1 et N_2 sont croisés, la lumière ne parvient pas jusqu'au photomultiplicateur, mais si on fait passer de gauche à droite une impulsion fournie par un laser L puissant à travers la cellule de Kerr, elle y provoquera la biréfringence du rayon *1* et la lumière pourra tomber

dans le photomultiplicateur. Si on applique à la même cellule un champ électrique statique d'une intensité telle que la différence de phase entre les rayons extraordinaire et ordinaire soit la même, on pourra comparer les constantes de Kerr en régimes dynamique et statique. On constate ainsi que pour des liquides non dipolaires les constantes de Kerr sont les mêmes pour les deux régimes. Avec des liqui-

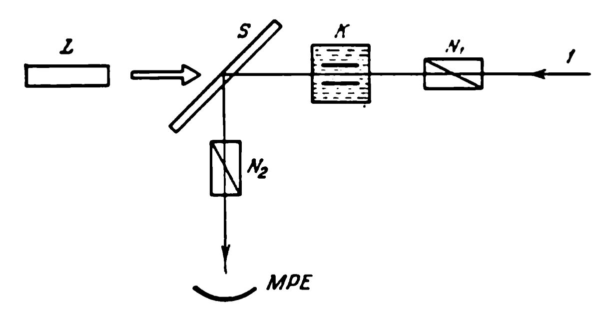


Fig. 310

des dipolaires la constante de Kerr diminue lorsqu'on passe du champ statique au champ alternatif du rayonnement laser. Cette diminution est de 100 fois pour le nitrobenzène.

Le dispositif expérimental qui vient d'être décrit permet d'évaluer la durée de l'effet Kerr, mais on obtient des résultats plus pré-

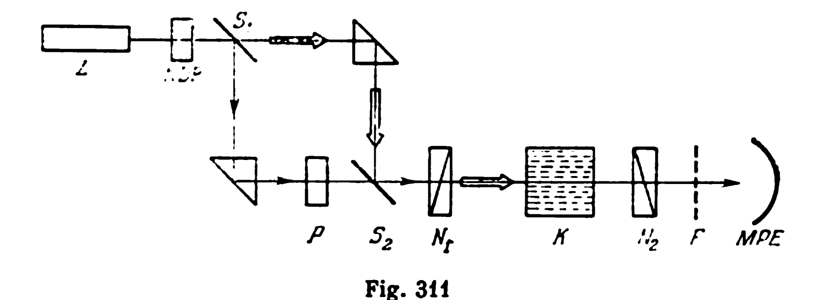


Fig. 311

cis au moyen du schéma de montage représenté sur la figure 311. Une impulsion de rayonnement infrarouge d'une durée de l'ordre de 10^{-12} s, de longueur d'onde $\lambda = 1060$ nm et de grande puissance, fournie par un laser, traverse un cristal KDP (dihydrophosphate de potassium). Par suite de l'effet non linéaire de doublement de la fréquence (cf. § 124), une très petite partie de la lumière est transformée en lumière verte de longueur d'onde $\lambda = 530$ nm. Le miroir S_1 laisse passer les

rayons infrarouges mais réfléchit les rayons verts. Le miroir S_2, par contre, transmet les rayons verts et réfléchit les rayons infrarouges. Les deux rayons traversent la cellule de Kerr K remplie du liquide étudié; la cellule est disposée entre deux nicols croisés N_1 et N_2. A la suite du nicol N_2 se trouve un filtre F qui arrête les rayons infrarouges mais laisse passer les rayons verts qui tombent sur le photomultiplicateur MPE. Il est évident que si après le miroir S_2 l'impulsion verte devance l'impulsion infrarouge de grande puissance sans recouvrement mutuel, les rayons verts ne pourront pas parvenir jusqu'au photomultiplicateur. En interposant une lame P sur le trajet des rayons verts, on arrive à provoquer leur retard par rapport aux rayons infrarouges; connaissant l'épaisseur de la lame P on parvient à mesurer le temps de retard τ. En disposant d'un jeu de lames de différentes épaisseurs, on peut faire varier le temps τ. Selon les données expérimentales, dans le cas le plus simple, l'intensité de la lumière transmise enregistrée par le photomultiplicateur varie suivant la loi exponentielle $I = I_0 \exp(-\tau/\tau_0)$. La constante τ_0 représente le temps de relaxation de l'anisotropie induite par l'impulsion infrarouge dans le liquide. C'est elle qui représente la mesure de la durée de l'effet Kerr. Les données expérimentales fournissent pour le sulfure de carbone $\tau_0 = 2 \cdot 10^{-12}$ s et pour le nitrobenzène $\tau_0 = 5 \cdot 10^{-11}$ s.

6. Examinons maintenant le mécanisme d'apparition de la biréfringence dans les champs alternatifs. Dans le cas de molécules polaires, pendant la moitié d'une période, leurs moments dipolaires permanents tendent à s'orienter le long du champ électrique extérieur. Pendant la demi-période suivante, il se produit l'inversion du champ extérieur et les molécules inversent leurs orientations. Ces deux effets d'orientation dus aux champs extérieurs se retranchent l'un de l'autre. Dans les champs basse fréquence (gamme radioélectrique) l'orientation correspondant à la valeur instantanée du champ électrique se réalise à tout instant. Dans ce cas l'évolution du phénomène est la même que dans les champs statiques.

Mais dans les champs de fréquences élevées (longueurs d'onde inférieures à 1 cm environ) les moments dipolaires permanents ne s'orientent pratiquement plus. Dans de tels champs les moments dipolaires permanents p_0 ne contribuent plus à l'anisotropie et donc à la biréfringence du milieu. L'orientation des molécules n'est déterminée que par les *moments dipolaires induits*. Au cours d'une demi-période, lorsque le champ électrique est orienté dans un sens donné, les moments dipolaires induits font apparaître des moments de forces qui tendent à rapprocher l'axe de la plus grande polarisabilité des molécules de la direction du champ électrique. Pendant la demi-période suivante tous les moments inversent leurs sens, mais chercheront encore à rapprocher l'axe du maximum de polarisabilité des molécules de la direction du champ qui est la même qu'avant. C'est que l'axe de la plus grande polarisabilité n'est pas un vecteur et *ses deux*

sens sont parfaitement équivalents. Aussi est-il indifférent laquelle de ses extrémités se rapproche de la direction du vecteur E_0. Ainsi, quoique les vecteurs E_0 soient orientés en sens inverses au cours des deux demi-périodes, les effets d'orientation des axes de la plus grande polarisabilité s'additionnent. Au cours de chaque demi-période, les taux d'orientation des molécules sont négligeables, mais comme ils s'additionnent, l'orientation qui est créée au cours du temps de relaxation de l'anisotropie τ_0 est suffisante pour donner lieu à une biréfringence.

Le mécanisme d'apparition de la biréfringence dans le champ alternatif de fréquences élevées est donc le même que celui qui est envisagé dans la théorie de Langevin.

7. Comme la vitesse d'établissement et de disparition de l'effet Kerr est extrêmement grande, cet effet trouve de nombreuses applications scientifiques et techniques pour réaliser des *obturateurs* et des *modulateurs de lumière rapides.* Le modulateur de lumière fondé sur l'effet Kerr est constitué par une cellule de Kerr dont le condensateur est alimenté par un champ électrique haute fréquence. Ce modulateur assure un nombre énorme d'obturations par seconde (jusqu'à 10^9) irréalisable par d'autres procédés. Une cellule de Kerr à laquelle on applique une brève impulsion de champ électrique se comporte comme un *obturateur photographique* ultra-rapide dont la durée de fonctionnement est égale à la durée de l'impulsion. Si on utilise l'impulsion lumineuse fournie par un laser, on peut réduire le temps d'exposition jusqu'à 10^{-12} s. Les obturateurs et les modulateurs de lumière à effet Kerr sont utilisés en technique laser pour le contrôle du régime de travail des lasers.

8. Un effet analogue à l'effet Kerr — l'effet Cotton-Mouton, fut découvert en 1910. Lorsque les molécules du milieu sont anisotropes et possèdent des moments magnétiques permanents, l'application d'un champ magnétique les oriente suivant la direction de ce champ. Dans les champs magnétiques forts le milieu devient anisotrope et manifeste une biréfringence magnétique. C'est l'effet Cotton-Mouton. Le milieu se comporte comme un cristal uniaxe d'axe optique parallèle au champ magnétique B.

On mesure la biréfringence par le même procédé que celui utilisé pour l'effet Kerr. Ces deux effets obéissent à des lois parfaitement analogues. La différence entre les indices extraordinaire et ordinaire est $n_e - n_o = DB^2$, et la différence de phase correspondante est

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)\, l = 2\pi C l B^2, \qquad (90.13)$$

où D et $C = D/\lambda$ sont des constantes dont les valeurs dépendent de la nature du milieu et de son état physique. Pour le nitrobenzène la valeur mesurée de la constante de Cotton-Mouton est $C = 2{,}23 \times$

$\times 10^{-12}$ un. CGSM. Dans un champ magnétique $B = 20\,000$ G, sur un parcours de longueur $l = 10$ cm, apparaît une différence de phase $\varphi = 0{,}056$ rad $= 3{,}2$ degrés seulement.

§ 91. L'effet électro-optique linéaire de Pockels

1. L'équation des oscillations libres d'un oscillateur harmonique est $\ddot{r} + 2\gamma\dot{r} + \omega_0^2 r = 0$. Il oscille autour de la position d'équilibre $r = 0$. Plaçons cet oscillateur dans un champ électrique continu E_0. En l'absence d'autres forces extérieures on aura

$$\ddot{r} + 2\gamma\dot{r} + \omega_0^2 r = -\frac{e}{m} E_0.$$

La position d'équilibre se déplace d'une distance $r_0 = -eE_0/(m\omega_0^2)$ de l'origine des coordonnées. En notant q l'élongation de la particule par rapport à la nouvelle position d'équilibre, on a $r = r_0 + q$, et l'équation précédente s'écrit

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0.$$

Ce résultat montre que les oscillations de l'oscillateur placé dans un champ électrique continu restent harmoniques avec la *même fréquence* ω_0, mais s'effectuent autour d'une nouvelle position d'équilibre. Cela signifie que l'application d'un champ électrique continu ne modifie pas la fréquence propre d'un oscillateur harmonique et a pour seul effet de déplacer la position d'équilibre autour de laquelle il exécute des oscillations libres.

Si l'amplitude des oscillations est grande, le modèle de l'oscillateur harmonique peut devenir inadéquat. Dans le cas le plus simple on doit ajouter à la force quasi élastique $m\omega_0^2 r$ un terme proportionnel au carré du déplacement de la particule par rapport à sa position d'équilibre (origine des coordonnées). Les oscillations libres de cet *oscillateur anharmonique* sont décrites par l'équation $\ddot{r} + 2\gamma\dot{r} + \omega_0^2 r + \beta r^2 = 0$, où β est une constante. En présence d'un champ électrique continu extérieur E_0 l'équation d'oscillations est

$$\ddot{r} + 2\gamma\dot{r} + \omega_0^2 r + \beta r^2 = -\frac{e}{m} E_0.$$

La position d'équilibre $r = r_0$ est maintenant définie par l'équation

$$\omega_0^2 r_0 + \beta r_0^2 = -eE_0/m.$$

Parmi les deux racines de cette équation quadratique on choisira celle qui est peu différente de la valeur $r_0 = -eE_0/(m\omega_0^2)$ correspondant à un oscillateur harmonique (on suppose que l'anharmonicité est faible). En notant à nouveau q l'élongation de la particule oscillante par rapport à la nouvelle position d'équilibre, on trouve $r = r_0 + q$. Si les oscillations sont petites, on peut négliger les carrés

de q et on obtient

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + (\omega_0^2 + 2\beta r_0)\, q = 0.$$

Ce résultat montre qu'en présence d'un champ électrique continu extérieur les petites oscillations d'un oscillateur anharmonique seront harmoniques dans l'approximation considérée. Cependant, *dans le cas d'un oscillateur anharmonique, l'application du champ E_0 modifie non seulement la position d'équilibre, mais aussi la fréquence propre de l'oscillateur.* La variation du carré de la fréquence propre de l'oscillateur est approximativement égale à $\Delta\omega_0^2 = 2\beta r_0$ ou dans cette approximation

$$\Delta\omega_0^2 = -\frac{2e\beta}{m\omega_0^2} E_0. \tag{91.1}$$

2. Le déplacement des fréquences propres modifie la courbe de dispersion, donc l'indice de réfraction n du milieu. Dans le cas simple d'une seule fréquence propre ω_0 la valeur de n, à grande distance de la raie d'absorption, ne dépend que de la différence $\omega^2 - \omega_0^2$ (voir formule 84.9). La variation de l'indice de réfraction n dans un champ électrique statique E_0 est alors définie par l'expression

$$\Delta n = \frac{\partial n}{\partial\omega_0^2}\Delta\omega_0^2 = -\frac{\partial n}{\partial\omega_0^2}\frac{2e\beta}{m\omega_0^2}E_0.$$

En remarquant que $\partial f/\partial\omega_0^2 = -\partial f/\partial\omega^2$ on obtient

$$\Delta n = \frac{\partial n}{\partial\omega^2}\frac{2e\beta}{m\omega_0^2}E_0 = \frac{\partial n}{\partial\omega}\frac{e\beta}{m\omega\omega_0^2}E_0. \tag{91.2}$$

Pour une direction donnée du champ extérieur E_0 la valeur de Δn dépend de la direction de propagation de la lumière, ce qui se répercute sur la biréfringence du milieu. *La variation de la biréfringence d'une substance, résultant du déplacement de la fréquence propre sous l'action d'un champ électrique extérieur, constitue l'effet électro-optique de Pockels.* Dans cet effet les variations des indices de réfraction sont proportionnelles à la *première puissance* du champ extérieur E_0, tandis que dans l'effet Kerr ces variations sont proportionnelles au carré du champ.

L'effet Pockels ne se manifeste que dans les cristaux dénués de centre de symétrie. L'effet étant *linéaire* par rapport au champ extérieur E_0, l'inversion de ce champ doit s'accompagner d'un changement de signe de la variation Δn de l'indice de réfraction. Or cela ne peut se produire dans les cristaux possédant un centre de symétrie, puisque les deux sens d'un champ extérieur sont physiquement équivalents.

Compte tenu de son mécanisme, l'effet Pockels est tout au moins aussi *rapide* que l'effet Kerr. Par suite il trouve les mêmes applications que l'effet Kerr: *obturateurs et modulateurs ultrarapides.* Le dispositif correspondant est la *cellule de Pockels.* C'est un cristal dis-

posé entre deux nicols croisés. Le dispositif fonctionne de la même façon qu'une cellule de Kerr. Tant qu'on n'applique pas le champ électrique, les nicols ne laissent passer aucune lumière, mais dès qu'on applique le champ, les nicols transmettent de la lumière. Il importe qu'avant application du champ le cristal ne présente pas de biréfringence. Pour cela on taille un cristal uniaxe perpendiculairement à son axe optique et on dirige la lumière parallèlement à cet axe. Le champ extérieur E_0 peut être perpendiculaire à la direction de propagation de la lumière (*modulateur transversal*) ou parallèle à cette direction (*modulateur longitudinal*).

§ 92. Effet Zeeman

1. En 1896, Zeeman (1865-1943) constata que les raies spectrales étaient décomposées en plusieurs composantes lorsque la source lumineuse était placée dans un champ magnétique. Zeeman étudiait la raie bleu-vert du cadmium, qui est très étroite, et utilisait des champs magnétiques de 10 000 à 15 000 G. H. A. Lorentz, qui élaborait à cet-

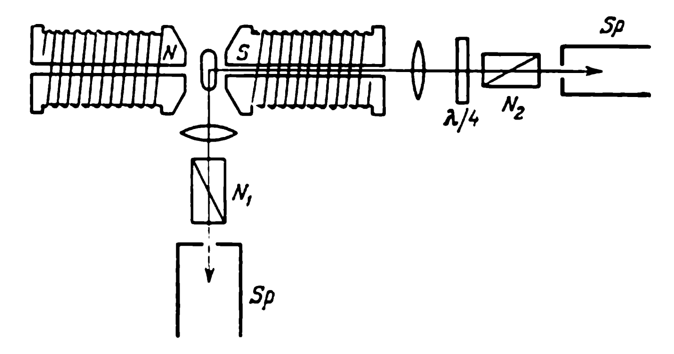


Fig. 312

te époque la théorie électronique, donna aussitôt une explication de l'*effet Zeeman*, ce qui contribua à orienter les recherches ultérieures.

Le schéma du dispositif expérimental utilisé pour l'étude de l'effet Zeeman est représenté sur la figure 312. La source de lumière présentant un spectre des raies (tube à décharge dans le gaz ou arc dans le vide) est placée entre les pôles d'un électro-aimant où règne un champ magnétique suffisamment uniforme. La lumière envoyée par la source tombe sur la fente d'un spectroscope ou d'un spectrographe *Sp* ayant un pouvoir de résolution égal ou supérieur à 100 000 (réseau de diffraction ou appareil spectral interférentiel). Les nicols N_1, N_2 et la lame quart d'onde servent à déterminer la polarisation de la lumière émise. L'enregistrement photographique des spectres observés exige parfois plusieurs heures d'exposition. Pendant toute la durée de l'exposition l'intensité du champ magnétique et la température de la source doivent être maintenues constantes, afin que le spectre ne

change pas au cours du temps et qu'on puisse utiliser un appareil spectral de grand pouvoir de résolution.

Lors de ses premières expériences, Zeeman fit plusieurs constatations importantes. *Si l'observation a lieu dans une direction perpendiculaire à celle du champ magnétique, la raie spectrale est décomposée en trois composantes polarisées rectilignement.* La composante centrale occupe la position de la raie non soumise au champ, tandis que les composantes latérales sont également déplacées de part et d'autre de la raie centrale (dans l'échelle des fréquences). Ces déplacements sont proportionnels à l'intensité du champ magnétique appliqué $\boldsymbol{B}$. Le vecteur électrique de la composante centrale est *parallèle au champ magnétique* (ces composantes sont appelées *composantes* π), et les vecteurs électriques des composantes latérales (ou *composantes* σ) sont *perpendiculaires au champ* $\boldsymbol{B}$. L'intensité de la composante π est égale à la moitié et celle des composantes σ est égale au quart de l'intensité de la raie initiale.

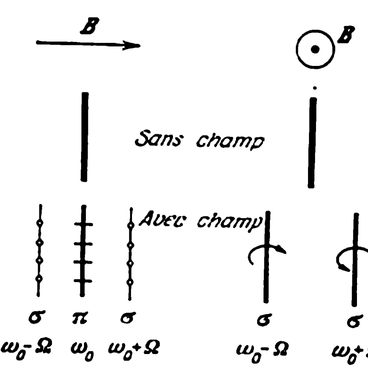


Fig. 313

Si l'observation se fait *dans le sens du champ magnétique*, le déplacement des composantes latérales est *le même* que dans le cas précédent (à intensité de champ magnétique égale), mais *il n'y a pas de composante centrale*. L'intensité de chaque composante est égale à la moitié de l'intensité de la raie initiale. Les deux composantes sont *polarisées circulairement* en sens inverses (ces composantes sont appelées aussi composantes σ). Si la lumière se propage suivant la direction du champ magnétique, la composante σ de fréquence plus petite est polarisée *à droite* et l'autre, de fréquence plus grande, est polarisée *à gauche*. Si on inverse le sens du champ magnétique, les sens des polarisations circulaires des deux composantes σ s'inversent.

Les figures que l'on observe perpendiculairement et parallèlement au champ magnétique sont schématiquement représentées sur la figure 313. On suppose que dans l'effet longitudinal la lumière se propage le long du champ magnétique en allant vers le lecteur. Les intensités relatives des raies sont repérées par l'épaisseur des traits qui les représentent, la polarisation de la composante π est représentée par des traits horizontaux parallèles au champ magnétique et les polarisations des composantes σ sont représentées par de petits cercles.

2. Cette figure de décomposition d'une raie spectrale se laisse interpréter par la *théorie classique de Lorentz.* Tout comme la théorie

classique de la dispersion, la théorie de Lorentz repose sur un modèle du système étudié. Le modèle le plus simple assimile les centres émetteurs de lumière à des *oscillateurs harmoniques*, ceux-ci étant des *électrons soumis à des forces quasi élastiques*. En l'absence de champ magnétique, l'équation du mouvement de ces électrons est de la forme $\ddot{r} + \omega_0^2 r = 0$, ω_0 étant la fréquence propre de l'électron. En présence d'un champ magnétique permanent, l'électron est soumis encore à l'action de la force de Lorentz $-\frac{e}{c}[\dot{r}B]$ (la charge de l'électron est dénotée par $-e$). L'équation du mouvement de l'électron s'écrit alors

$$\ddot{r} + \omega_0^2 r = -\frac{e}{mc}[\dot{r}B],$$

m étant la masse de l'électron. En introduisant la fréquence de Larmor

$$\Omega = \frac{e}{2mc} B, \tag{92.1}$$

mettons l'équation ci-dessus sous la forme

$$\ddot{r} + 2[\dot{r}\Omega] + \omega_0^2 r = 0 \tag{92.2}$$

(cf. t. III, § 86). La théorie classique se ramène à la résolution de cette équation. Pour trouver la solution de l'équation (92.2), il faut l'écrire en fonction des coordonnées rectangulaires. Si on oriente l'axe Z suivant la direction du champ magnétique B, l'équation (92.2) est transformée en un système de trois équations scalaires:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\Omega\dot{y} + \omega_0^2 x &= 0, \\ \ddot{y} - 2\Omega\dot{x} + \omega_0^2 y &= 0, \\ \ddot{z} + \omega_0^2 z &= 0. \end{aligned} \tag{92.3}$$

La dernière équation montre que le champ magnétique ne modifie pas le mouvement de l'électron suivant la direction du champ. Ce résultat est évident puisque le champ n'exerce alors aucune force sur l'électron. Pour faciliter l'intégration des deux premières équations (92.3) il convient de les mettre sous une *forme complexe*. Combinons x et y en une coordonnée complexe $\zeta = x + iy$, caractérisant la position de l'électron dans le plan (X, Y) exactement comme le fait un vecteur bidimensionnel ζ de composantes x et y. En remarquant que $-i\dot{\zeta} = \dot{y} - i\dot{x}$, multiplions par i la deuxième équation (92.3) et ajoutons le résultat à la première équation

$$\ddot{\zeta} - i2\Omega\dot{\zeta} + \omega_0^2\zeta = 0.$$

Cherchons une solution de cette équation sous la forme $\zeta = e^{i\omega t}$.

On détermine la constante ω par l'équation quadratique

$$-\omega^2 + 2\Omega\omega + \omega_0^2 = 0,$$

d'où

$$\omega = \Omega \pm \sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2}\,.$$

Même dans les champs magnétiques très forts on peut négliger le carré de la fréquence de Larmor devant ω_0^2. Par exemple, si $B = 10^4$ G, la formule (92.1) donne $\Omega \approx 10^{11}\ \mathrm{s}^{-1}$, tandis que pour la lumière visible ($\lambda = 500$ nm) $\omega \sim 4 \cdot 10^{15}\ \mathrm{s}^{-1}$, et par suite $(\Omega/\omega)^2 \sim 10^{-9}$. Le champ le plus fort que l'on utilise pour la mesure de l'effet Zeeman

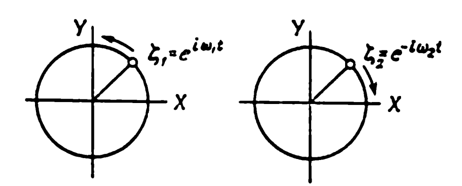


Fig. 314

a été produit en 1938 par P. L. Kapitsa (né en 1894) et avait une intensité de $3{,}2 \cdot 10^5$ G. Dans ce cas $\Omega/\omega_0 \sim 1{,}4 \cdot 10^{-3}$, $(\Omega/\omega_0)^2 \sim 2 \cdot 10^{-6}$. On a ainsi, à une précision suffisante, $\omega = \pm\, \omega_0 + \Omega$. Afin de ne pas avoir affaire à des fréquences négatives, posons $\omega_1 = \omega_0 + \Omega$, $\omega_2 = \omega_0 - \Omega$. Les deux solutions obtenues s'écrivent alors

$$\zeta_1 = e^{i\omega_1 t}, \quad \zeta_2 = e^{-i\omega_2 t}.$$

La première solution représente un *mouvement circulaire antihoraire* de l'électron de fréquence angulaire ω_1 et la seconde un *mouvement circulaire horaire* de fréquence ω_2 (fig. 314). La solution générale correspond à la superposition de ces deux mouvements circulaires et se présente sous la forme $\zeta = C_1\zeta_1 + C_2\zeta_2$, C_1 et C_2 étant des constantes arbitraires.

3. Afin de rendre plus tangibles les résultats obtenus, décomposons le mouvement initial de l'électron (i.e. son mouvement en l'absence de champ magnétique) en deux mouvements: une oscillation harmonique le long de l'axe Z et un mouvement dans le plan XY. Décomposons ce dernier en deux mouvements circulaires, de même fréquence angulaire ω_0 mais de sens opposés. En présence d'un champ magnétique permanent l'oscillation le long de l'axe Z ne sera pas affectée, tandis que les fréquences des mouvements circulaires changeront d'une même quantité Ω : la fréquence du mouvement antihoraire augmentera et celle du mouvement horaire diminuera.

Le changement de la fréquence angulaire s'explique facilement. La force centripète qui s'exerce sur un électron en rotation en l'ab-

sence de champ magnétique est égale à $m\omega_0^2 r$. En présence d'un champ magnétique, à cette force vient s'ajouter la force $\pm \frac{e}{c} vB = \pm \frac{e}{c} \omega r B$, de sorte que la nouvelle force centripète devient égale à

$$\left(m\omega_0^2 \pm \frac{eB}{c} \omega\right) r = m\,(\omega_0^2 \pm 2\Omega\omega)\, r.$$

La détermination du signe dépend du sens de rotation. En égalant cette expression à $m\omega^2 r$, on obtient l'équation $\omega^2 = \omega_0^2 \pm 2\Omega\omega$ dont les racines positives sont $\omega \approx \omega_0 \pm \Omega$, résultat conforme à celui obtenu plus haut.

Lorsqu'on applique le champ magnétique, l'énergie cinétique d'un électron en rotation varie. On peut se demander pourquoi elle varie, puisque la force qu'exerce le champ magnétique est perpendiculaire à la vitesse v de l'électron et ne produit donc aucun travail. La raison en est que cette dernière assertion ne concerne que les *champs magnétiques permanents* qui seuls sont envisagés par l'équation (92.2). Or, lors du branchement du champ magnétique il *croît dans le temps* du zéro à la valeur maximale, puis reste constant jusqu'à l'instant où on le supprime. Lorsque le champ croît, selon la loi d'induction de Faraday, il apparaît un *champ électrique rotationnel* qui fournit un travail à l'électron et modifie son énergie cinétique. Lorsque le champ magnétique devient permanent, le champ électrique disparaît et l'énergie cinétique de rotation de l'électron ne varie plus jusqu'à l'instant où on supprimera le champ magnétique. Les mouvements dont il a été question ci-dessus se rapportent aux rotations qui se sont ainsi établies. Nous avons examiné au t. III, § 88 le mécanisme de variation de l'énergie cinétique de rotation de l'électron.

4. Passons à l'explication de la décomposition des raies spectrales dans un champ magnétique. Un électron oscillant émet des ondes électromagnétiques. Le rayonnement est maximal suivant une direction perpendiculaire à l'accélération de l'électron, mais celui-ci ne rayonne pas dans la direction de son accélération. Selon la théorie classique, la fréquence de la lumière émise est égale à la fréquence des vibrations de l'électron. Mais comme cette dernière varie lorsqu'on branche le champ magnétique, la fréquence de la lumière émise doit varier. Lorsque l'observation a lieu dans le sens du champ magnétique, la vibration ne produit aucun rayonnement dans cette direction. *Seules les rotations circulaires de l'électron* peuvent produire un rayonnement. C'est pour cela que l'on observe deux composantes σ *polarisées circulairement* de fréquences $\omega_0 + \Omega$ et $\omega_0 - \Omega$. Si la lumière se propage dans le sens du vecteur $\boldsymbol{B}$, la première raie sera polarisée circulairement *à gauche* et la seconde *à droite*. Lorsqu'on inverse le sens du champ magnétique appliqué, les sens de la polarisation circulaire des raies s'inversent. Lorsqu'on observe dans une

direction perpendiculaire à celle du champ magnétique $\boldsymbol{B}$, les vibrations de l'électron parallèles à $\boldsymbol{B}$ créent le rayonnement maximal; à ces vibrations correspond la *composante* π *non déplacée* dont le vecteur électrique est *parallèle* à $\boldsymbol{B}$. Les deux mouvements circulaires s'effectuent dans un plan orthogonal à $\boldsymbol{B}$. Décomposons chacun de ces mouvements circulaires en un mouvement harmonique le long de la direction d'observation et en un mouvement harmonique rectangulaire. Seules les vibrations perpendiculaires à la ligne d'observation s'accompagnent d'un rayonnement et produisent deux *composantes* σ de fréquences $\omega+\Omega$ et $\omega-\Omega$ dont les vecteurs électriques sont *perpendiculaires* à $\boldsymbol{B}$.

Telle est l'interprétation de la décomposition des raies spectrales, observée dans les premières expériences de Zeeman. En remarquant qu'en l'absence de champ magnétique toutes les directions de mouvement de l'électron sont équiprobables, il est facile d'expliquer les intensités relatives des raies spectrales observées dans ces expériences.

En reprenant l'exemple numérique donné ci-dessus ($B = 10^4$ G) on trouve $\Omega/\omega_0 \approx 2\cdot10^{-5}$. Pour séparer les composantes il faut utiliser un appareil spectral ayant un pouvoir de résolution ω_0/Ω supérieur à $5\cdot10^4$, ce qui implique l'emploi d'un réseau de diffraction ou d'un spectroscope interférentiel. Dans les expériences de P. L. Kapitsa ($B = 3{,}2\cdot10^5$ G) un spectroscope à prisme pouvait faire l'affaire.

Une étude des caractéristiques de la polarisation circulaire des raies produites dans l'effet Zeeman longitudinal permet de déterminer le *signe des charges* responsables de l'effet. On trouve qu'il s'agit de charges *négatives*. La mesure de la distance entre les composantes permet de déterminer la charge spécifique e/m. On trouve la même valeur que celle fournie par mesure des déviations des rayons cathodiques provoquées par l'application de champs électriques et magnétiques ($e/m = 1{,}759\cdot10^7$ un. C.G.S.M.). On en conclut que les particules chargées qui déterminent le comportement optique des atomes sont des *électrons*.

5. Les expériences ultérieures ont montré que l'effet qu'observa Zeeman et qui fut interprété par la théorie de Lorentz était très rare (triplet formé par une composante π et deux composantes σ et doublet formé de deux composantes σ polarisées circulairement). Ce type de décomposition des raies est appelé *effet Zeeman simple* ou *normal*. L'effet Zeeman simple ne s'observe qu'avec des raies spectrales singulets, i.e. des raies isolées pratiquement monochromatiques. Or la majorité des raies spectrales sont des raies de *multiplets* (*doublets, triplets, quadruplets*, etc.), i.e. sont constituées de plusieurs raies spectrales très rapprochées.

L'exemple le plus simple de raie multiplet (doublet) est la double raie D du sodium, formée de deux raies simples rapprochées de lon-

gueurs d'onde $\lambda_{D_1} = 589{,}5930$ nm et $\lambda_{D_2} = 588{,}96963$ nm, l'intensité de la raie D_2 étant deux fois plus grande que celle de la raie D_1.

Sous l'action d'un champ magnétique, les raies des multiplets se décomposent en donnant une figure spectrale notablement plus compliquée que celle de l'effet Zeeman simple. C'est ainsi que la raie D_1 du sodium éclate en donnant *quatre raies*: deux raies centrales qui sont les composantes π et deux raies latérales qui sont les composantes σ. La raie D_2 éclate en *six composantes*: deux composantes π centrales et quatre composantes σ latérales. Ainsi le doublet éclate en donnant 10 raies. On connaît des figures d'éclatement des raies multiplets beaucoup plus compliquées. Ces décompositions des raies de multiplets constituent l'*effet Zeeman anormal* ou *effet Zeeman des raies de multiplets*, cette dernière dénomination étant préférable puisque c'est le cas le plus fréquent.

L'effet Zeeman des raies multiplets ne put être interprété par la *théorie quantique* qu'après la découverte du *spin* (moment propre de quantité de mouvement) et du *moment magnétique propre de l'électron*. Dans le cas des raies singulets la théorie quantique conduit aux mêmes résultats que ceux de la théorie simple de Lorentz. Nous reprendrons l'étude de ces questions dans le tome V de notre cours.

§ 93. Effet Stark

Il a été démontré au § 91 qu'un champ électrique uniforme ne modifie pas la fréquence propre ω_0 d'un oscillateur harmonique. Cependant, si on tient compte de l'anharmonicité, la fréquence propre doit varier. En ne gardant que les termes linéaires par rapport au champ extérieur E_0, cette variation s'exprime par la formule (91.1) qui donne $\Delta\omega_0 = -\beta e E_0/(m\omega_0^3)$. Dans cette approximation le champ électrique extérieur E_0 ne provoque pas de décomposition des raies spectrales qui sont simplement *déplacées de côté* d'une distance proportionnelle à l'intensité de champ E_0. Si on tient compte des termes des puissances supérieures, on peut s'attendre à une décomposition des raies spectrales avec un écart entre les composantes proportionnel au *carré de l'intensité* E_0:

$$\delta\omega_0 \sim [e/(m\omega_0^3)]E_0^2.$$

L'éventualité d'une telle décomposition des raies spectrales fut prévue par Voigt (1850-1919) qui ne réussit pas à l'observer par suite des difficultés expérimentales. La principale difficulté était que, pour observer l'effet, il faut disposer d'un champ électrique E_0 de l'ordre de 100 000 V/cm. Or on ne peut créer un champ de cette intensité dans les tubes à décharge usuels qui émettent des raies spectrales étroites (par exemple les raies de la série de Balmer pour l'hydrogène) par suite de la *forte ionisation du gaz contenu dans les tubes*.

En 1913, Stark (1874-1957) surmonta cette difficulté en créant le champ électrique requis dans l'espace (d'étendue $\sim$1 mm) compris entre la cathode K et une plaque F parallèle à K (fig. 315), où on maintenait un vide poussé par pompage continu; ainsi, dans cet espace, les particules n'étaient pas ionisées par chocs mutuels. L'excitation des atomes de gaz avec émission de lumière étant réalisée dans l'autre partie du tube exactement comme dans les tubes à décharge ordinaires. Les atomes lumineux (rayons canaux) passaient à travers les trous percés dans la cathode (canaux) et parvenaient dans

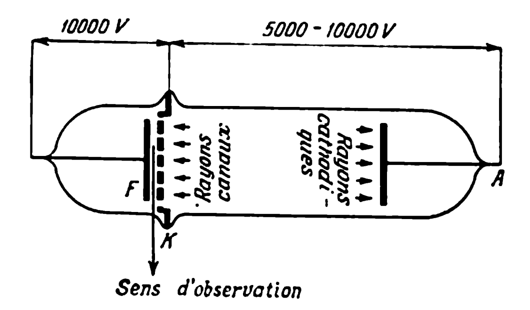


Fig. 315

l'espace entre F et K où ils étaient soumis à l'action du champ électrique extérieur.

Avec ce dispositif Stark put observer la décomposition des raies spectrales par le champ électrique; le phénomène fut appelé effet Stark. L'effet observé fut très *différent* des prévisions de Voigt. Stark étudia la décomposition des raies de la série de Balmer de l'hydrogène. Dans le spectre visible cette série comporte quatre raies: H_α (λ = 656,285 nm), H_β (λ = 486,132 nm), H_γ (λ = 434,046 nm), H_δ (λ = 410,173 nm). La décomposition des raies de l'*hydrogène* ainsi que de tous les *ions monoélectroniques* est telle que les déplacements des diverses composantes sont proportionnels *à l'intensité du champ et non à son carré.* Autrement dit la décomposition des raies est beaucoup plus forte que si elle était proportionnelle au carré du champ. C'est pour cela qu'on désigne cette décomposition sous le nom d'*effet Stark linéaire.*

Les figures de décomposition obtenues sont assez compliquées et différentes pour les différentes raies spectrales. Chaque raie de l'hydrogène éclate en plusieurs composantes: 15 pour la raie H_α, 20 pour H_β, 27 pour H_γ et 32 pour H_δ. Dans un champ électrique E_0 = = 104 000 V/cm, Stark trouva que les déplacements des composantes extrêmes des raies H_α, H_β, H_γ et H_δ étaient respectivement égaux à 2,3 ; 3,88 ; 5,88 et 7,5 nm. Ces déplacements sont relativement grands

si on les compare aux déplacements des composantes latérales du triplet de Zeeman (avec $B = 104\,000$ G, ces derniers seraient égaux respectivement à 0,42; 0,23; 0,18 et 0,16 nm).

Les composantes obtenues dans l'observation transversale au champ $\boldsymbol{E}_0$ sont *polarisées rectilignement*; on distingue les composantes π (vecteur électrique parallèle au champ extérieur $\boldsymbol{E}_0$) et les composantes σ (vecteur électrique perpendiculaire au champ extérieur $\boldsymbol{E}_0$). L'observation longitudinale ne fournit que les composantes c qui sont *dépourvues de polarisation*. Les composantes π les plus intenses se trouvent à l'extérieur et les composantes σ les plus intenses se trouvent à l'intérieur. Pour l'hydrogène les déplacements et les polarisations sont symétriques par rapport à la raie initiale; pour d'autres atomes on trouve souvent une répartition non symétrique. La distance (dans l'échelle des fréquences) entre une composante et la raie initiale est égale à un multiple entier du plus petit intervalle entre les composantes; cet intervalle minimal est le même pour toutes les raies de la série de Balmer de l'hydrogène. Dans les champs forts (supérieurs à 100 000 V/cm) on observe des écarts à la relation linéaire entre les déplacements des composantes et l'intensité du champ extérieur E_0. Pour les atomes et les ions contenant *plus d'un électron*, l'effet Stark n'est pas linéaire mais *quadratique*, i.e. les déplacements sont proportionnels au *carré du champ électrique* E_0.

La théorie classique ne fournit aucune explication de l'effet Stark, de même que de tous les effets liés à l'émission et à l'absorption des raies spectrales. La théorie de l'effet Stark est essentiellement quantique et ne peut donc être présentée dans ce volume.

§ 94. Polarisation rotatoire

1. Lorsqu'une lumière polarisée rectilignement traverse une couche plan-parallèle de substance, on constate dans certains cas que son plan de polarisation a tourné par rapport à la position initiale. Cet effet est appelé *polarisation rotatoire* ou encore *effet d'activité optique*. Si la substance n'est pas soumise à l'action d'un champ magnétique extérieur, on a affaire à une polarisation rotatoire *naturelle*. Dans le cas contraire on a affaire à une *polarisation rotatoire magnétique* ou *effet de Faraday*.

La polarisation rotatoire naturelle produite par une lame de quartz taillée perpendiculairement à l'axe optique a été découverte en 1811 par Arago. En 1815, Biot étudia le phénomène en détail et découvrit que les solutions de sucre produisaient une polarisation rotatoire. Par la suite on trouva de nombreux corps doués d'activité optique. A la fin du XIXe siècle, on dénombrait près de 700 substances optiquement actives; actuellement on en connaît beaucoup plus, mais la majorité des substances ne produisent qu'un effet faible.

On observe l'effet en disposant deux nicols croisés sur un banc optique. Les nicols croisés ne transmettent aucune lumière. Mais si on place entre les deux nicols une lame de quartz taillée perpendiculairement à l'axe optique ou une couche d'une autre substance optiquement active, le système transmet de la lumière. On peut provoquer son extinction en tournant l'un des nicols. On en conclut qu'après avoir traversé une substance active, la lumière reste polarisée rectilignement, mais que son plan de polarisation a tourné. Pour que l'expérience réussisse avec une lumière blanche, celle-ci doit être rendue monochromatique à l'aide d'un filtre, car *l'angle de rotation du plan de polarisation dépend de la longueur d'onde*. Les cristaux de quartz sont uniaxes. Dans l'expérience décrite la lumière se propage le long de l'axe optique et le quartz s'y comporte comme un corps isotrope ne manifestant pas de phénomène de biréfringence ordinaire (linéaire).

Suivant la substance considérée, celle-ci fait tourner le plan de polarisation à droite (sens horaire) ou à gauche (sens antihoraire), ces deux sens de rotation étant rapportés à un observateur vers lequel se propage la lumière. On distingue ainsi les substances *dextrogyres* et les substances *lévogyres*. La rotation dans le sens horaire est comptée *positivement* et la rotation antihoraire est comptée *négativement*.

2. L'existence du phénomène de polarisation rotatoire témoigne de ce que les milieux optiquement actifs présentent une certaine *dissymétrie*; cette dissymétrie se manifeste en ce que les sens de rotation horaire et antihoraire ne sont pas physiquement équivalents. Il s'ensuit que ces milieux ne possèdent pas de plan de symétrie passant par la direction de la normale au front de l'onde. Il résulte des considérations de symétrie que le plan de polarisation de la lumière ne pourrait pas tourner s'il était confondu avec un des plans de symétrie. D'autre part, les milieux liquides optiquement actifs sont *parfaitement isotropes* et toutes les directions y sont équivalentes; la preuve en est que ces liquides font tourner le plan de polarisation toujours *dans le même sens, quel que soit le sens de propagation de la lumière*. On pourrait dire qu'un milieu liquide naturellement actif est un milieu *isotrope dissymétrique*. L'isotropie n'existe pas dans les cristaux, mais dans les cristaux uniaxes deux directions opposées de l'axe optique sont équivalentes, ne serait-ce qu'au point de vue optique.

La dissymétrie dont il a été question rappelle la dissymétrie d'une hélice. Observons une des faces de l'hélice et supposons qu'un point se déplace le long de celle-ci en tournant dans le sens horaire. Si le point s'éloigne de l'observateur, on dit que l'hélice est droite, et gauche dans le cas où le point se rapproche de l'observateur. Si on observe la face opposée de l'hélice, le même point tournera dans le sens antihoraire, mais dans ce cas le point se rapproche de l'observateur. Pour que le point s'éloigne de l'observateur, il faut inverser

le sens de rotation. Ainsi l'hélice reste droite ou gauche, qu'on l'observe par l'une ou l'autre face. De même *la propriété d'un milieu actif d'être dextro- ou lévogyre ne dépend pas du sens de propagation de la lumière.*

Ainsi, *si le milieu actif tourne le plan de polarisation à droite par exemple, ce sens de rotation du plan de polarisation restera le même si on inverse le sens de propagation de la lumière. Cependant le sens de rotation à droite et à gauche se rapportera à des observateurs différents et la lumière doit aller vers chacun d'eux. Objectivement, indépendamment du choix de l'observateur, les rotations du plan de polarisation s'effectuent en sens inverses lorsque les rayons lumineux cheminent à l'encontre l'un de l'autre.* Si on oblige la lumière à faire un trajet aller et retour à travers une substance optiquement active en la réfléchissant dans un miroir, le plan de polarisation retrouve sa position initiale.

3. Le quartz se présente sous deux formes cristallines: *dextrogyre* ou *lévogyre* (ou *droite* et *gauche*). C'est le phénomène d'*énantiomorphisme* qui se manifeste dans les cristaux ne possédant ni centres ni plans de symétrie. Les deux variétés énantiomorphes se distinguent par leurs formes et par leurs structures internes. En ce qui concerne la symétrie, ces deux variétés se distinguent l'une de l'autre comme la main gauche se distingue de la main droite ou comme une hélice droite d'une hélice gauche. Les deux variétés cristallines *ne sont pas congruentes*, i.e. ne sont pas superposables, mais l'image spéculaire de l'une des variétés peut être superposée à l'autre variété. Il est probable que tous les cristaux optiquement actifs existent sous deux variétés énantiomorphes, quoiqu'on ne connaisse pas toujours les deux formes cristallines. Certains liquides, l'acide tartrique par exemple, peuvent exister aussi sous forme de deux variétés tournant le plan de polarisation en sens inverses.

4. Biot trouva expérimentalement que l'angle de rotation χ du plan de polarisation est proportionnel à l'épaisseur l de la substance optiquement active: $\chi = \alpha l$, où le coefficient α est appelé *rotation par unité de longueur*. Il dépend de la longueur d'onde, de la nature de la substance et de la température. Pour le quartz à 20 °C et pour la lumière jaune du sodium ($\lambda = 589{,}3$ nm) $\alpha = \pm 21{,}728$, et pour le chlorate de sodium ($NaClO_3$) $\alpha = 3{,}170$ degrés d'angle par millimètre. Pour certains cristaux liquides α atteint 40 000 degrés par millimètre. Pour les cristaux de quartz et les autres substances existant sous formes dextrogyre et lévogyre, les valeurs de α sont *égales en valeur absolue, mais de signes opposés*. La rotation α augmente lorsque la longueur d'onde diminue. Biot trouva que la valeur de α est inversement proportionnelle au carré de la longueur d'onde λ^2. Ce n'est qu'une approximation assez grossière et on obtient un meilleur accord avec les résultats expérimentaux en appliquant la formule de Drude qui est vérifiée dans la région de transparence où l'absorp-

tion est faible :

$$\alpha = \sum_i \frac{B_i}{\lambda^2 - \lambda_i^2},$$

où B_i sont des constantes et λ_i les longueurs d'onde correspondant aux fréquences propres de la substance étudiée.

On caractérise l'activité optique des liquides par le *pouvoir rotatoire spécifique* $[\alpha]$. Dans le cas de liquides chimiquement purs c'est le rapport de la rotation observée α à la densité ρ du liquide, i.e. $[\alpha] = \alpha/\rho$. Lorsqu'il s'agit d'une solution d'une *substance optiquement active dans un solvant qui ne l'est pas*, on entend par ρ la *densité de la substance active*, i.e. sa masse dans l'unité de volume de la solution. Le *pouvoir rotatoire molaire* est le produit $[M] = M\,[\alpha]$ du pouvoir rotatoire spécifique $[\alpha]$ par la masse moléculaire de la substance active. La dépendance de la rotation du plan de polarisation avec la concentration de la substance active est mise à profit dans la *saccharométrie* pour déterminer la teneur du sucre dans les solutions. La rotation du plan de polarisation dans les cristaux uniaxes a également lieu dans les cas où la direction de propagation de la lumière fait un *angle avec l'axe optique*. Dans ces conditions la biréfringence se superpose au phénomène de rotation. Dans les cristaux biaxes le phénomène est encore plus compliqué, puisque la rotation du plan de polarisation peut être différente le long des différents axes optiques. Il existe aussi des cristaux cubiques naturellement actifs ne présentant pas de biréfringence ordinaire ($NaClO_3$, $NaBrO_3$) pour lesquels la rotation α ne dépend pas de l'orientation du cristal.

5. Selon Fresnel, la rotation du plan de polarisation, quelle que soit sa nature physique, est une manifestation du phénomène de *biréfringence circulaire*. Toutefois, les deux ondes que le milieu optiquement actif peut transmettre avec des vitesses déterminées mais différentes sont polarisées non pas rectilignement comme dans la biréfringence ordinaire, mais *circulairement*, *l'une à droite*, *l'autre à gauche*.

Pour démontrer que cette hypothèse est suffisante, considérons une onde plane dont le plan de polarisation peut tourner, se propageant dans le sens positif de l'axe Z. Comme l'onde est transversale, son vecteur électrique E ne possède que deux composantes E_x et E_y. En notant A l'amplitude des vibrations, $E_x = A\cos\chi\cos(\omega t - kz)$, $E_y = A\sin\chi\cos(\omega t - kz)$, où χ est l'angle que fait la direction du vecteur électrique E avec l'axe X. Comme cet angle peut dépendre de la coordonnée z on posera $\chi = -\alpha z$, où α est le coefficient qui caractérise la rotation du plan de polarisation. Si α est positif, l'angle χ diminue au cours de la propagation de l'onde, i.e. la rotation s'effectue *dans le sens horaire* (à droite). Si α est négatif, le plan de polarisation tourne *dans le sens antihoraire* (à gauche). En portant $\chi = -\alpha z$ dans les expressions de E_x et E_y et en appliquant les for-

mules connues de trigonométrie, on obtient

$$E_x = \frac{A}{2}\cos(\omega t - kr + \alpha z) + \frac{A}{2}\cos(\omega t - kz - \alpha z),$$

$$E_y = \frac{A}{2}\cos\left(\omega t - kz + \alpha z + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{A}{2}\cos\left(\omega t - kz - \alpha z - \frac{\pi}{2}\right).$$

Décomposons l'onde ainsi définie en deux ondes: $E = E^{\mathrm{d}} + E^{\mathrm{g}}$, les composantes des vecteurs E^{d} et E^{g} étant définies par les expressions

$$E_x^{\mathrm{d}} = \frac{A}{2}\cos(\omega t - k^{\mathrm{d}}z), \quad E_y^{\mathrm{d}} = \frac{A}{2}\cos\left(\omega t - k^{\mathrm{d}}z + \frac{\pi}{2}\right), \tag{94.1}$$

$$E_x^{\mathrm{g}} = \frac{A}{2}\cos(\omega t - k^{\mathrm{g}}z), \quad E_y^{\mathrm{g}} = \frac{A}{2}\cos\left(\omega t - k^{\mathrm{g}}z - \frac{\pi}{2}\right), \tag{94.2}$$

avec les notations

$$k^{\mathrm{d}} = k - \alpha, \quad k^{\mathrm{g}} = k + \alpha. \tag{94.3}$$

Dans l'onde (94.1) la composante E_y présente une avance de phase de $\pi/2$ sur la composante E_x et dans l'onde (94.2) E_y retarde de $\pi/2$ sur E_x. Ces deux ondes sont polarisées circulairement: le vecteur électrique de l'onde (94.1) tourne dans le sens allant de l'extrémité positive de l'axe Y vers l'extrémité positive de l'axe X, tandis que le vecteur électrique de l'onde (94.2) tourne en sens inverse (fig. 314). Cela signifie que l'onde (94.1) est polarisée à droite et l'onde (94.2) à gauche. Ainsi, *dans la théorie cinétique de Fresnel, une onde dont le plan de polarisation peut tourner est considérée comme la superposition de deux ondes polarisées circulairement, l'une à droite et l'autre à gauche*. Les vitesses de ces ondes sont

$$v^{\mathrm{d}} = \frac{\omega}{k - \alpha}, \quad v^{\mathrm{g}} = \frac{\omega}{k + \alpha}, \tag{94.4}$$

et les indices de réfraction sont

$$n^{\mathrm{d}} = \frac{c}{v^{\mathrm{d}}} = \frac{c}{\omega}(k - \alpha), \quad n^{\mathrm{g}} = \frac{c}{v^{\mathrm{g}}} = \frac{c}{\omega}(k + \alpha). \tag{94.5}$$

On en tire

$$n^{\mathrm{g}} - n^{\mathrm{d}} = \frac{2c}{\omega}\alpha, \quad \alpha = \frac{\omega}{2c}(n^{\mathrm{g}} - n^{\mathrm{d}}). \tag{94.6}$$

Pour $n^{\mathrm{g}} - n^{\mathrm{d}} > 0$, on a $\alpha > 0$, i.e. le plan de polarisation tourne *à droite*, et pour $n^{\mathrm{g}} - n^{\mathrm{d}} < 0$, le plan de polarisation tourne *à gauche*. Autrement dit, *le plan de polarisation tourne dans le même sens que le vecteur électrique de l'onde polarisée circulairement ayant le plus petit indice de réfraction ou la plus grande vitesse de phase.*

6. Ces considérations n'impliquent nullement que chacune des ondes circulaires (94.1) et (94.2) puisse exister isolément dans le milieu. Nous sommes fondés sur le fait expérimental qu'une onde à plan de polarisation tournant peut exister réellement dans un mi-

lieu optiquement actif. Il est évident que cette onde doit être une *solution des équations fondamentales de Maxwell*, complétées par les équations caractérisant les propriétés du milieu actif. La superposition des ondes circulaires (94.1) et (94.2) doit également vérifier ce système d'équations, puisque nous avons démontré ci-dessus que cette superposition représente une onde à plan de polarisation tournant. Or toute solution d'un système d'équations peut être représentée (par un nombre de procédés infini) sous forme d'une somme de termes qui *ne sont pas nécessairement des solutions de ce même système d'équations*. Par suite, le fait qu'une onde à plan de polarisation tournant peut se propager dans un milieu actif n'implique nullement qu'il peut y exister des ondes circulaires isolées. Néanmoins *Fresnel postula que les ondes circulaires caractérisées par les vitesses* (94.4) *peuvent réellement se propager dans un milieu optiquement actif*. On pourrait les désigner sous le nom d'*ondes normales*, i.e. d'ondes qui se propagent dans le milieu sans altération de leur forme et de leur polarisation. C'était une *hypothèse* que Fresnel ne put justifier, car il aurait fallu qu'il disposa pour cela du système complet des équations de la théorie ondulatoire de la lumière, relatif au milieu optiquement actif. Mais Fresnel justifia son hypothèse *expérimentalement*.

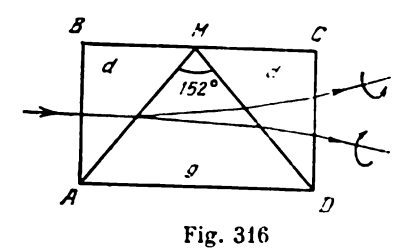


Fig. 316

Fresnel utilisa un train de trois prismes en quartz alternativement droits (prismes ABM et DCM) et gauche (prisme AMD d'angle réfringent $M = 152°$, fig. 316). Les axes optiques de tous les prismes étaient parallèles à la base AD. Le rayon incident parallèle à l'axe optique n'était pas réfracté par la face AB mais était décomposé par le prisme ABM en deux rayons polarisés circulairement. Conformément aux formules (94.5), le rayon polarisé à droite présentait un indice plus petit que le rayon polarisé à gauche ($n^d < n^g$). Comme dans le prisme gauche AMD $n^d > n^g$, les deux rayons sont inégalement réfractés par la face AM: le rayon droit était dévié vers la base AD et le rayon gauche était dévié en sens inverse. L'angle de divergence entre les rayons augmentait encore par réfraction sur les faces DM et CD. L'angle des deux rayons émergents était de 4′ environ (voir problème à la fin de ce paragraphe). En les examinant à l'aide d'un parallélépipède de Fresnel ou d'une lame quart d'onde, on peut se rendre compte que le rayon dévié vers le bas était polarisé à droite et l'autre à gauche.

Fresnel supposa qu'il serait possible de vérifier son hypothèse pour les liquides en associant un grand nombre de prismes alternativement remplis de liquides dextrogyres et lévogyres. Plus tard cette expérience fut réalisée et les résultats obtenus ont montré que dans

les liquides actifs peuvent coexister deux ondes de polarisation circulaires gauche et droite.

On peut déceler la biréfringence circulaire dans le quartz en n'utilisant qu'un seul prisme taillé de façon que son axe optique soit perpendiculaire au plan bissecteur de l'angle dièdre réfringent. Si un rayon lumineux traverse le prisme au minimum de déviation, il s'y propage parallèlement à l'axe optique et ne subit pas de biréfringence. Si on utilise une lumière naturelle ou une lumière polarisée rectilignement, correspondant à une raie spectrale unique, le rayon incident se décompose à l'émergence, au minimum de déviation, en deux rayons, l'un polarisé circulairement à droite, l'autre à gauche.

Ainsi Fresnel démontra expérimentalement que *lorsqu'un rayon lumineux pénètre dans un milieu optiquement actif, il y subit une biréfringence circulaire: les rayons polarisés circulairement à droite et à gauche se propagent dans le milieu avec des vitesses de phase différentes. Si la lumière incidente est polarisée rectilignement, les ondes circulaires se recombinent à la sortie du milieu en reformant une onde rectiligne dont le plan de polarisation a été tourné d'un certain angle.* C'est ainsi que l'explication du phénomène de polarisation rotatoire a été ramenée à l'explication de la *biréfringence circulaire.*

A proximité des raies ou des bandes d'absorption, les ondes polarisées circulairement en sens inverses se distinguent non seulement par leurs vitesses de propagation, mais aussi par leurs coefficients d'absorption. Dans ce cas elles auront à l'émergence des amplitudes différentes. Si la lumière incidente présente une polarisation rectiligne, la lumière émergente présentera une polarisation *elliptique.* C'est le phénomène de *dichroïsme circulaire*, qui fut décelé pour la première fois dans l'améthyste, en 1847, par Haidinger (1795-1871), puis fit l'objet des recherches (en 1895) de Cotton (1869-1951) qui utilisait des sels d'acide tartrique.

PROBLÈME

En utilisant les données indiquées dans le texte, calculer l'angle de divergence $\delta\varphi$ des rayons polarisés circulairement à droite et à gauche qui émergent du prisme *ABCD* (expérience de Fresnel, fig. 316). L'indice de réfraction ordinaire du quartz étant connu (n_0 = 1,544 pour λ = 589,3 nm), calculer l'écart angulaire $\delta_1\varphi$ entre ces mêmes rayons après réfraction sur le plan *AM* et l'écart $\delta_2\varphi$ après une deuxième réfraction sur le plan *MD*.

Réponse. $\delta\varphi=\frac{4\lambda\alpha}{\pi}\,\mathrm{tg}\,\frac{M}{2}=3{,}92'$; $\delta_1\varphi=\frac{\delta\varphi}{2n_0}=1{,}27'$; $\delta_2\varphi=\frac{\delta\varphi}{n_0}=2{,}54'$.

§ 95. Polarisation rotatoire magnétique

1. En 1846, Faraday découvrit qu'une substance dénuée d'activité optique, soumise à l'action d'un intense champ magnétique permanent, produisait une rotation du plan de polarisation d'un

faisceau lumineux qui la traverse parallèlement à la direction du champ magnétique. On peut observer le phénomène à l'aide d'un électro-aimant dont les pièces polaires présentent des canaux cylindriques destinés au passage des rayons lumineux (fig. 312). On place l'électro-aimant entre des nicols croisés et la substance étudiée dans l'entrefer. Si l'observateur reçoit le rayon lumineux, la rotation à droite est comptée *positivement* et la rotation à gauche est comptée *négativement*. Dans le premier cas la rotation du plan de polarisation a lieu dans le sens de circulation du courant électrique dans les spires de l'électro-aimant, et dans le cas d'une rotation gauche ces sens sont opposés. Faraday n'observa que la rotation droite, car c'est le cas le plus fréquent. Parmi les corps diamagnétiques, la seule exception connue est le chlorure de titane. Parmi les corps paramagnétiques, on trouve de nombreuses substances produisant une rotation à gauche, par exemple les sels de fer, des terres rares, $K_2Cr_2O_7$, $KCrO_4$, etc.

Les expériences de Faraday et les expériences plus précises de Verdet (1824-1866) ont montré que *la rotation du plan de polarisation est proportionnelle à l'épaisseur l de substance traversée et à l'intensité du champ magnétique extérieur, i.e. à l'induction magnétique B dans la substance*:

$$\chi = RlB, \tag{95.1}$$

où le coefficient R est la *constante de Verdet* ou *pouvoir rotatoire magnétique*. Ce coefficient dépend de la nature du corps et de son état physique ainsi que de la longueur d'onde. On a rassemblé dans le tableau 10 les valeurs de la rotation magnétique de plusieurs substances.

Pour les métaux ferromagnétiques l'angle de rotation χ n'est pas proportionnel à B, mais dans les champs magnétiques forts, il croît lentement avec B en s'approchant asymptotiquement d'une valeur limite. Selon Kundt, l'angle χ est proportionnel à l'aimantation du magnétique $I = (\mu - 1)\, B/(4\pi\mu)$, où μ est la perméabilité magnétique. Cet angle est défini par l'expression

$$\chi = KlI, \tag{95.2}$$

où K est la *constante de Kundt*. Pour $B = 15\,000$ G on peut poser que le ferromagnétique est aimanté à saturation.

2. Le phénomène de polarisation rotatoire magnétique ne put être expliqué qu'après la découverte de l'effet Zeeman et son interprétation par la théorie de Lorentz. Supposons, pour simplifier, qu'en l'absence de champ magnétique la substance n'émet qu'une *seule raie spectrale*, i.e. possède une *seule fréquence propre* (*de résonance*) ω_0. L'application d'un champ magnétique $\boldsymbol{B}$ fait apparaître deux nouvelles fréquences de résonance $\omega_0 + \Omega$ et $\omega_0 - \Omega$ (Ω est la fréquence de Larmor) correspondant aux mouvements circulaires de

Tableau 10

Substance	χ			
	$\lambda = 656$ nm	$\lambda = 589$ nm	$\lambda = 486$ nm	
Eau (25 °C) Sulfure de carbone (25 °C) Quartz	0,0102′ 0,0319′ 0,0136′	0,0130′ 0,0415′ 0,0166′	0,0197′ 0,0667′ 0,0250′	Par cm d'épaisseur traversée dans un champ de 1 gauss
Oxygène Hydrogène Bioxyde de carbone	0,484′ 0,430′ 0,691′	0,559′ 0,537′ 0,862′	0,721′ 0,805′ 0,286′	A la pression atmosphérique par cm d'épaisseur traversée dans un champ de 10^5 G
Fer Nickel	217° 92°	195° 75°	145° 64°	Pour une épaisseur de 10^{-3} cm dans un champ de 15 000 G

l'électron (cf. § 92). L'apparition de ces nouvelles fréquences propres se manifeste aussi bien dans l'*émission* (*effet Zeeman direct*) que dans l'*absorption de la lumière* (*effet Zeeman inverse*). La fréquence de résonance initiale ω_0 ne se manifeste que si la lumière se propage dans une direction perpendiculaire au champ magnétique ou dans une direction qui ne lui est pas parallèle. Les ondes normales qui peuvent se propager suivant le champ magnétique sont polarisées circulairement. Lorsque la direction de la lumière coïncide

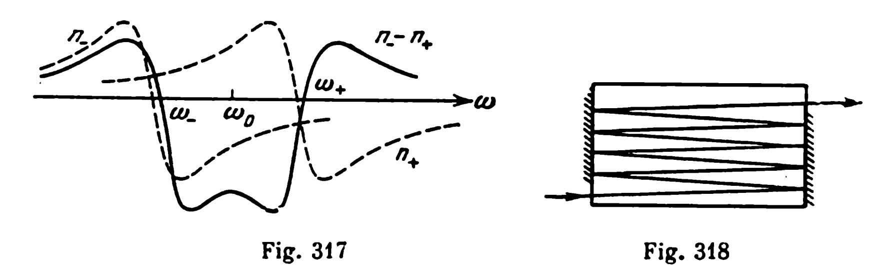


Fig. 317 Fig. 318

avec celle du champ magnétique, à la plus grande fréquence propre $\omega_+ = \omega_0 + \Omega$ correspond une rotation horaire et à la plus petite fréquence $\omega_- = \omega_0 - \Omega$ correspond une rotation antihoraire (en regardant dans le sens du champ magnétique (fig. 313)).

Comme les fréquences propres ω_+ et ω_- sont différentes, les

vitesses de propagation des deux ondes polarisées circulairement sont également différentes. On parvient ainsi à uxe explication de principe de la polarisation rotatoire magnétique puisque, selon Fresnel, l'addition de ces deux ondes circulaires fournit une onde dont le plan de polarisation tourne. L'angle de rotation du plan de polarisation est donné par la formule (94.6):

$$\chi = \frac{\omega l}{2c}(n_- - n_+) = \frac{\pi l}{\lambda}(n_- - n_+), \tag{95.3}$$

où n_+ et n_- désignent respectivement les indices de réfraction des ondes de fréquences propres ω_+ et ω_-. La détermination des signes tient compte de ce que les sens positifs de la rotation naturelle et de la rotation magnétique sont par convention inverses.

Il est commode de discuter la formule (95.3) sous forme graphique. Sur la figure 317 les courbes en pointillé représentent les indices n_+ et n_- en fonction de la fréquence de la lumière ω. Leur différence est représentée par un trait continu. On voit qu'en dehors de l'intervalle (ω_-, ω_+) la différence $n_- - n_+$ et donc la rotation sont *positives* et *négatives* dans cet intervalle.

Dans tous les cas les sens de la rotation de Larmor Ω et donc ceux de la rotation du plan de polarisation dépendent du *sens du champ magnétique* ***B*** *et ne dépendent pas du sens de propagation de la lumière.* Si on inverse le sens de propagation de la lumière, le sens de rotation du plan de polarisation *ne changera pas*, contrairement à ce qui se produit dans le cas d'une polarisation rotatoire naturelle. Faraday mit ce fait à profit pour accroître la rotation magnétique du plan de polarisation. Il augmenta l'épaisseur l de substance traversée en réfléchissant plusieurs fois la lumière sur les faces latérales de l'échantillon étudié (fig. 318) (les faces étaient argentées, en laissant non argentées une entrée et une sortie pour la lumière).

3. En dehors de l'intervalle (ω_-, ω_+) et loin des fréquences de résonance ω_- et ω_+, on peut négliger l'absorption de la lumière et utiliser la formule de Sellmeier (84.9) pour les indices n_- et n_+ en y remplaçant ω_0 respectivement par ω_- et ω_+. Selon cette formule n_- et n_+ sont représentés par une *seule et même fonction* des arguments $(\omega^2 - \omega_-^2)$ et $(\omega^2 - \omega_+^2)$. L'indice de réfraction n de la substance non soumise à l'action d'un champ magnétique est représenté par cette même fonction avec l'argument $(\omega^2 - \omega_0^2)$. Par conséquent

$$n_- - n_+ = n(\omega^2 - \omega_-^2) - n(\omega^2 - \omega_+^2) =$$

$$= (\omega_+^2 - \omega_-^2)\frac{dn}{d\omega^2} = \frac{(\omega_+ + \omega_-)(\omega_+ - \omega_-)}{2\omega}\frac{dn}{d\omega}.$$

La rotation du plan de polarisation n'est notable que si on ne s'éloigne pas trop loin d'une bande d'absorption; par suite on posera

$\omega_+ + \omega_- = 2\omega$. D'autre part, $\omega_+ - \omega_- = 2\Omega = eB/(mc)$. Ainsi

$$n_- - n_+ = \frac{eB}{mc}\frac{dn}{d\omega} = -\frac{eB}{2\pi mc^2}\lambda^2\frac{dn}{d\lambda}.$$

En portant cette expression dans (95.3) on retrouve la formule (95.1) et on obtient l'expression suivante pour la constante de Verdet:

$$R = -\frac{e}{2mc^2}\lambda\frac{dn}{d\lambda}. \qquad (95.4)$$

Rappelons que e désigne ici la *valeur absolue* de la charge de l'électron. La formule (95.4) est connue comme la *formule de Becquerel* (1852-1908).

4. Examinons maintenant la question de la rotation magnétique du plan de polarisation dans la *bande d'absorption de la substance*, où l'indice de réfraction et le coefficient d'absorption varient *rapidement* et de *façon anormale* avec la fréquence. La polarisation magnétique rotatoire y est grande et présente une *allure anormale*. A l'intérieur de la bande d'absorption entre les fréquences ω_- et ω_+ la rotation est *négative* (fig. 317). Ce comportement anormal du plan de polarisation est appelé *effet Macaluso et Corbino*, physiciens italiens qui découvrirent l'effet en 1898 et dont la théorie fut faite plus tard par Voigt.

Macaluso et Corbino montrèrent que les vapeurs de sodium soumises à l'action d'un champ magnétique produisaient une forte rotation du plan de polarisation à proximité immédiate des raies jaunes D_1 et D_2. La rotation était de même signe de part et d'autre de cette raie double. Une flamme de sodium était disposée entre les pôles d'un électro-aimant que l'on faisait traverser parallèlement au champ par un faisceau de lumière blanche polarisée rectilignement. Un nicol analyseur placé sur le trajet des rayons lumineux provoquait leur extinction complète en l'absence de champ. Lorsqu'on envoyait un courant dans les enroulements de l'électro-aimant, le champ de vision s'éclairait d'une vive lumière jaune; cette lumière examinée au spectroscope était composée de deux raies jaunes disposées symétriquement de part et d'autre de la raie D. Ce résultat s'explique simplement par ce que la lumière de ces longueurs d'onde subit dans le champ magnétique une rotation du plan de polarisation égale à 90° et traverse les nicols polariseur et analyseur croisés. En tournant l'analyseur dans un sens puis dans l'autre, on constate que des deux côtés de la bande d'absorption la rotation présente le même signe.

Wood apporta des perfectionnements à l'installation de Macaluso et Corbino et réalisa ses expériences en enfermant les vapeurs de sodium dans un tube en acier, ce qui permettait de faire varier la densité de la vapeur de sodium dans de larges limites. Lorsque la densité était relativement petite, les résultats étaient semblables à

ceux de Macaluso et Corbino, à cette différence près que dans les expériences de Wood la raie *D* double était séparée en ses composantes. On voyait apparaître des raies jaunes des deux côtés des raies D_1 et D_2. Lorsque la densité augmentait, l'intervalle entre les raies jaunes extrêmes augmentait et à l'intérieur de cet intervalle apparaissaient de nouvelles raies produisant des rotations du plan de polarisation égales à 270°, 450°, 630°, etc. La région centrale entre les raies D_1 et D_2 devenait alternativement claire et noire. Dans certains cas Wood dénombra jusqu'à huit alternances correspondant à une rotation de 1440°.

5. Les considérations que nous venons d'exposer sont basées sur la *théorie classique*, i.e. *sur l'effet Zeeman simple*. La théorie complète doit tenir compte de l'*effet Zeeman complexe*, ce qui implique que ce doit être une *théorie quantique*. En outre, pour expliquer l'existence d'une rotation négative du plan de polarisation, il est indispensable de tenir compte du *paramagnétisme des atomes*. Ces questions ne peuvent être traitées dans notre cours.

PROBLÈMES

1. Une couche de substance faisant tourner le plan de polarisation de la lumière est placée dans un champ magnétique longitudinal entre deux nicols N_1 et N_2 (fig. 319) dont les sections principales font entre elles un angle de 45°. De quel angle la couche active doit-elle faire tourner le plan de polarisation pour que le système fonctionne comme une *valve optique*, i.e. pour que la lumière ne puisse le traverser que dans un seul sens (par exemple du corps *A* vers le corps *B*)?

R é p o n s e. La rotation doit être égale à 45° + 180° *m* (*m* étant un nombre entier).

2. Comment se comportera la valve optique du problème 1 si on inverse le sens du champ magnétique en laissant inchangées la disposition relative des nicols et l'intensité du champ magnétique?

R é p o n s e. Le sens de passage de la lumière sera inversé.

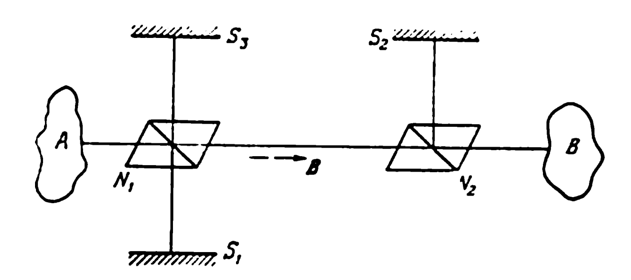


Fig. 319

3. L'installation décrite dans le problème nº 1 pourra-t-elle fonctionner en valve optique si on place entre les nicols une couche de *substance optiquement active et si on supprime le champ magnétique*?

R é p o n s e. Non, elle ne fonctionnera pas comme une valve optique.

4. Expliquer le paradoxe de Wien. Une enceinte adiabatique contient deux corps A et B également échauffés, et entre ces corps se trouve une valve optique (fig. 319). La lumière émise par le corps A tombe sur le nicol N_1 ; la moitié de l'énergie incidente I, i.e. $I/2$, traverse le nicol, tandis que l'autre moitié subit sur le nicol une réflexion totale et est renvoyée par le miroir S_1 vers le corps A (l'utilisation du miroir permet de ne pas tenir compte de l'échauffement du nicol). Ayant traversé le nicol N_1, l'autre moitié de l'énergie $I/2$ traversera en totalité le nicol N_2 et sera absorbée par le corps B. La lumière émise par le corps B est arrêtée par la valve optique. La moitié $I/2$ de l'énergie I émise par B, après réflexion totale sur le nicol N_2, est renvoyée par le miroir S_2 vers le corps B ; l'autre moitié, après avoir traversé le nicol N_2 et le milieu qui fait tourner le plan de polarisation de la lumière de 45°, ne pourra plus traverser le nicol N_1 et y subira une réflexion totale. Au moyen d'un miroir auxiliaire S_3 on peut renvoyer cette énergie sur le nicol N_1, où elle subit une réflexion totale et retourne sur le corps B. Ainsi le corps A reçoit l'énergie $I/2$; le corps B qui reçoit l'énergie $3I/2$ devra donc s'échauffer en mettant en défaut le deuxième principe de la thermodynamique.

S o l u t i o n. La lumière émise par le corps B (fig. 319) et qui y retourne après réflexion sur le nicol N_1, subira une seconde rotation de 45° du plan de polarisation en traversant la substance et ne pourra donc pas traverser le nicol N_2. Cette lumière subira une réflexion totale sur N_2; en disposant un miroir supplémentaire faisant face au miroir S_2 on fera revenir la lumière sur le corps A. Cette solution du paradoxe de Wien a été donnée par Rayleigh.

§ 96. Dispersion temporelle et spatiale. Théorie de l'activité optique naturelle

1. On arrive à interpréter de façon satisfaisante de nombreux phénomènes optiques en admettant que la relation entre les vecteurs $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{E}$ (ainsi qu'entre $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{H}$) est *locale dans le temps et l'espace.* Cela signifie qu'en tout point $\boldsymbol{r}$ de l'espace et à tout instant t le vecteur $\boldsymbol{D}$ se trouve déterminé par la valeur du vecteur $\boldsymbol{E}$ *au même point et au même instant.* (La même chose vaut pour les vecteurs $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{H}$; nous l'admettons partout implicitement, le raisonnement étant construit pour les vecteurs $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{E}$.) Cette hypothèse est cependant *insuffisante* dans certains cas. Une relation qui n'est locale ni dans l'espace ni dans le temps peut être décomposée en une relation de *caractère non localisé dans l'espace* et en une relation de *caractère non localisé dans le temps.* Considérons d'abord la non-localisation dans le temps. Dans ce qui suit on suppose que le milieu est *homogène.*

2. La non-localisation temporelle se manifeste dans l'existence de la *dispersion optique du milieu.* En effet, pour interpréter la dispersion, il faut tenir compte des propriétés *d'inertie* des électrons, des noyaux atomiques et des ions constituant la substance. Or cette inertie conduit nécessairement à une relation entre $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{E}$ qui n'est pas locale dans le temps. Négligeons la non-localisation spatiale et raisonnons comme si le champ électromagnétique était spatialement *homogène* et ne variait que *dans le temps.* Nous négligerons aussi l'action du champ magnétique. Supposons d'abord que le milieu est

soumis à des *actions en forme d'impulsions.* A partir de l'instant $t = 0$ et pendant un temps dt le milieu est soumis à l'action du champ électrique $\boldsymbol{E}$ qui est ensuite supprimé. On peut considérer que l'action ainsi exercée est une *poussée électrique* qui met en branle des vibrations régulières des électrons, des noyaux atomiques et des ions du milieu. Lorsque le champ est supprimé, ces vibrations ne s'arrêtent pas aussitôt, puisque les masses des particules sont *finies.* C'est ce qui détermine le caractère non local dans le temps des liens existant entre les écarts des particules par rapport à leurs positions d'équilibre et le champ électrique, donc entre la polarisation $\boldsymbol{P}$ ou l'induction $\boldsymbol{D}$ du milieu et le champ $\boldsymbol{E}$.

En *électrodynamique linéaire* la polarisation $d\boldsymbol{P}$ du milieu déterminée par la poussée électrique est proportionnelle à $\boldsymbol{E}\,dt$. Si le milieu est *homogène* et *isotrope*, on peut exprimer la valeur du vecteur $d\boldsymbol{P}$ à l'instant t par

$$d\boldsymbol{P}(t) = f(t)\,\boldsymbol{E}(0)\,dt, \tag{96.1}$$

où la fonction $f(t)$ ne dépend que des propriétés du milieu et du temps t qui s'est écoulé entre le début de la poussée électrique et l'instant de l'observation. La fonction $f(t)$ doit s'annuler pour $t = 0$, puisque par suite de leur inertie les électrons, les noyaux atomiques et les ions ne peuvent acquérir instantanément des déplacements finis. Cette fonction doit s'annuler aussi pour $t = \infty$ puisque tous les milieux réels sont *dissipatifs* et que toute vibration libre doit finalement cesser.

Si l'action du champ $\boldsymbol{E}$ dure longtemps, cet intervalle de temps peut être divisé en des intervalles infiniment courts et on ramène l'action du champ électrique à celle de poussées successives. Une poussée électrique antérieure $\boldsymbol{E}(t')\,dt'$ apporte à la polarisation du milieu à l'instant t une contribution égale à $d\boldsymbol{P}(t) = f(t - t')\,\boldsymbol{E}(t')\,dt'$. Le *principe de superposition* étant valable en électrodynamique linéaire, le vecteur de polarisation total à l'instant t est donné par

$$\boldsymbol{P}(t) = \int_{-\infty}^{t} f(t-t')\,\boldsymbol{E}(t')\,dt', \tag{96.2}$$

ou en introduisant une nouvelle variable d'intégration $\vartheta = t - t'$,

$$\boldsymbol{P}(t) = \int_{0}^{\infty} f(\vartheta)\,\boldsymbol{E}(t-\vartheta)\,d\vartheta, \tag{96.3}$$

et par suite

$$\boldsymbol{D}(t) = \boldsymbol{E}(t) + 4\pi \int_{0}^{\infty} f(\vartheta)\,\boldsymbol{E}(t-\vartheta)\,d\vartheta. \tag{96.4}$$

On doit intégrer sur le temps *antérieur* à l'instant t, en vertu du *principe de causalité*. Sous la forme non relativiste ce principe implique que *chaque événement n'est déterminé que par les événements antérieurs et ne peut dépendre des événements postérieurs.*

En posant $E = E_0 \exp(i\omega t)$ et en portant cette expression dans (96.4) on obtient

$$D(t) = \varepsilon(\omega) E(t), \tag{96.5}$$

où

$$\varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi \int_0^\infty f(\vartheta) e^{-i\omega\vartheta} d\vartheta. \tag{96.6}$$

Ainsi, pour un champ monochromatique, on peut exprimer de façon formelle la relation entre D et E sous une forme locale en posant que la permittivité diélectrique est une fonction de la fréquence ω. La dispersion optique, i. e. la dépendance de ε avec ω, est équivalente à une *relation temporelle non locale entre $D(t)$ et $E(t)$*. C'est pour cela qu'on désigne cette dispersion sous le nom de *dispersion temporelle* ou de *dispersion en fréquence*, pour la distinguer de la *dispersion spatiale*, dont il sera question dans ce qui suit.

3. Considérons la *non-localisation spatiale*. Si le champ électrique *n'est pas uniforme*, on ne pourra déterminer le moment dipolaire induit d'une molécule que si on connaît la *fonction $E(r)$ dans tout le volume occupé par la molécule*, la connaissance de la valeur de E en un point étant alors insuffisante. Cela revient à exiger la connaissance du champ E et de ses dérivées spatiales de différents ordres en un point se trouvant à l'intérieur de la molécule (que l'on peut identifier par convention avec son centre), puisque la fonction $E(r)$ pourra être représentée alors par une *série de Taylor* suivant les coordonnées x_1, x_2, x_3 du vecteur r.

Il est facile d'évaluer les ordres de grandeur des termes successifs de cette série dans le champ monochromatique d'une onde lumineuse. La dérivée $\partial E_l / \partial x_m$ sera de l'ordre de E/λ et la coordonnée x_m de l'ordre de la dimension a de la molécule, de sorte que le terme $x_m \cdot \partial E_l / \partial x_m$ sera de l'ordre de $(a/\lambda) E$. On évalue de la même façon les ordres de grandeur des autres termes contenant des dérivées d'ordres supérieurs. Si on prend pour unité le terme d'ordre zéro de la série, les termes contenant les dérivées premières, secondes et suivantes seront de l'ordre de a/λ, $(a/\lambda)^2$, $(a/\lambda)^3$, etc.

On constate ainsi que dans un champ non uniforme le lien entre le moment dipolaire induit d'une molécule et le champ électrique E est *spatialement non local*. De ce fait *les relations entre P et E et entre D et E sont également spatialement non locales*. Dans les champs électriques faibles qui sont du ressort de l'électrodynamique linéaire et de l'optique, on peut négliger l'influence des carrés et des puissances supérieures du champ E et de ses dérivées spatiales. Dans

cette « approximation linéaire » on doit avoir dans le champ monochromatique d'une onde lumineuse:

$$D_j = \varepsilon_{jl} E_l + \gamma_{jlm} \frac{\partial E_l}{\partial x_m} + \alpha_{jlmn} \frac{\partial^2 E_l}{\partial x_m \partial x_n} + \ldots \qquad (96.7)$$

Cette expression concerne un milieu *anisotrope* dont les propriétés optiques sont caractérisées par les tenseurs ε_{jl}, γ_{jlm}, . . ., qui dépendent de la fréquence ω. Conformément aux notations tensorielles admises, la répétition d'un indice des coordonnées correspond à une sommation. Si on prend pour unité le terme d'ordre zéro de la série (96.7), les termes suivants seront de l'ordre de a/λ, $(a/\lambda)^2$, etc.

Pour une onde monochromatique plane

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \exp i (\omega t - \boldsymbol{kr})$$

la différentiation par rapport à x_m se ramène à multiplier par $-ik_m$. Par suite on peut écrire (96.7) sous la forme

$$D_j (\boldsymbol{r}, t) = \varepsilon_{jl} (\omega, \boldsymbol{k}) E_l (\boldsymbol{r}, t), \qquad (96.8)$$

où on a utilisé la notation

$$\varepsilon_{jl} (\omega, \boldsymbol{k}) = \varepsilon_{jl} (\omega) - ik_m \gamma_{jlm} + (-ik_m) (-ik_n) \alpha_{jlmn} + \ldots \qquad (96.9)$$

Dans le champ d'une onde monochromatique plane le lien entre ***D*** *et* ***E*** *présente formellement un caractère local*, mais le tenseur de la permittivité diélectrique $\varepsilon_{jl} (\omega, \boldsymbol{k})$ dépend maintenant non seulement de ω mais encore de $\boldsymbol{k}$. La dépendance de ce tenseur avec le vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$ constitue la *dispersion spatiale*.

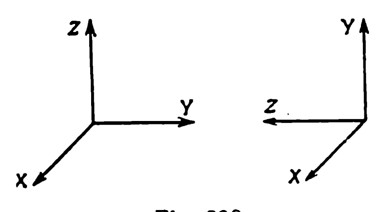


Fig. 320

4. Comme en optique le paramètre a/λ est petit, les effets de la dispersion spatiale sont *petits* et d'observation difficile. Pendant longtemps le seul effet connu était la *polarisation rotatoire naturelle* qui s'observe dans les milieux dont le tenseur γ_{jlm} est différent de zéro.

Etablissons la forme du tenseur γ_{jlm} pour les milieux isotropes dissymétriques (liquides et cristaux cubiques dont le tenseur $\varepsilon_{jl} (\omega)$ se réduit à un scalaire). En rejetant dans (96.7) tous les termes contenant des tenseurs du quatrième ordre et d'ordres supérieurs, on obtient

$$D_j (\boldsymbol{r}, t) = \varepsilon E_j (\boldsymbol{r}, t) + \gamma_{jlm} \frac{\partial E_l}{\partial x_m}. \qquad (96.10)$$

Sous forme développée, la composante x du vecteur D s'écrit

$$D_x = \varepsilon E_x + \gamma_{xxx}\frac{\partial E_x}{\partial x} + \gamma_{xxy}\frac{\partial E_x}{\partial y} + \\ + \gamma_{xxz}\frac{\partial E_x}{\partial z} + \gamma_{xyx}\frac{\partial E_y}{\partial x} + \gamma_{xyy}\frac{\partial E_y}{\partial y} + \\ + \gamma_{xyz}\frac{\partial E_y}{\partial z} + \gamma_{xzx}\frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma_{xzy}\frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma_{xzz}\frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (96.11)$$

Tournons le système de coordonnées de 90° autour de l'axe X (fig. 320). Le milieu étant isotrope, tous les coefficients figurant dans (96.11) restent inchangés, mais y et E_y se transforment respectivement en $-z$ et $-E_z$, de même que z et E_z se transforment en y et E_y. Les autres coordonnées et les autres composantes des vecteurs E et D restent les mêmes. En effectuant dans (96.11) les substitutions convenables, on obtient

$$D_x = \varepsilon E_x + \gamma_{xxx}\frac{\partial E_x}{\partial x} - \gamma_{xxy}\frac{\partial E_x}{\partial z} + \\ + \gamma_{xxz}\frac{\partial E_x}{\partial y} - \gamma_{xyx}\frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma_{xyy}\frac{\partial E_z}{\partial z} - \gamma_{xyz}\frac{\partial E_z}{\partial y} + \\ + \gamma_{xzx}\frac{\partial E_y}{\partial x} - \gamma_{xzy}\frac{\partial E_y}{\partial z} + \gamma_{xzz}\frac{\partial E_y}{\partial y}. \quad (96.11a)$$

Mais en vertu de la définition du tenseur γ_{jlm}, après rotation du système de coordonnées, la relation entre D_x et les composantes du vecteur E s'écrira sous la même forme (96.11). En identifiant les deux relations on trouve $\gamma_{xxy} = \gamma_{xxz}$, $\gamma_{xxz} = -\gamma_{xxy}$, d'où $\gamma_{xxy} = \gamma_{xxz} = 0$, etc. En outre, $\gamma_{xyz} = -\gamma_{xzy}$, etc.

Le coefficient γ_{xxx} est égal à zéro. En effet, par raison de symétrie, $\gamma_{xxx} = \gamma_{yyy} = \gamma_{zzz}$. Si on tourne le trièdre de 90° autour de l'axe Z de telle sorte que l'axe Y vienne occuper la partie négative de l'axe X initial, on devra effectuer dans (96.11) les substitutions suivantes: $x \to -y$, $D_x \to -D_y$, $E_x \to -E_y$, et en gardant tous les coefficients initiaux on obtient

$$-D_y = -\varepsilon E_y + \gamma_{xxx}\frac{\partial E_y}{\partial y} + \ldots$$

D'autre part, en se fondant sur la définition du tenseur γ_{jlm} dans le nouveau système on peut écrire

$$D_y = \varepsilon E_y + \gamma_{yyy}\frac{\partial E_y}{\partial y} + \ldots$$

et comme $\gamma_{xxx} = \gamma_{yyy}$ on en tire $\gamma_{xxx} = 0$.

Ainsi, chaque fois que deux des indices j, l, m sont identiques, toutes les composantes du tenseur γ_{jlm} sont nulles. Ne sont diffé-

rentes de zéro que les composantes désignées par trois indices différents; si on permute deux indices voisins, la composante du tenseur γ_{jlm} change de signe. On peut donc écrire

$$\gamma_{xyz} = -\gamma_{yxz} = \gamma_{yzx} = -\gamma_{zyx} = \gamma_{zxy} = -\gamma_{xzy} = -g. \tag{96.12}$$

L'expression (96.11) se transforme en la formule

$$D_x = \varepsilon E_x + g\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right),$$

et sous forme vectorielle

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} + g \operatorname{rot} \boldsymbol{E}. \tag{96.13}$$

Si chaque point du milieu est *centre de symétrie*, par réflexion par rapport à ce centre le milieu reste inchangé de même que le tenseur γ_{jlm}. Mais le système de coordonnées direct cède la place à un système inverse et les signes des coordonnées x, y, z et des composantes des vecteurs polaires $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{D}$ changent, de sorte que (96.10) s'écrit maintenant

$$-D_j = -\varepsilon E_j + \gamma_{jlm} \frac{\partial E_l}{\partial x_m}.$$

Il s'ensuit que $\gamma_{jlm} = 0$, autrement dit la rotation du plan de polarisation ne se produira pas. Pour que la rotation devienne possible, il faut que les molécules du liquide ou des cristaux cubiques *ne possèdent pas de centres de symétrie.*

Notons encore que pour un milieu isotrope optiquement actif la quantité g est un *pseudoscalaire* et non pas un scalaire vrai (cf. t. I, § 7). Lorsqu'on passe du système direct au système inverse, ou inversement, la quantité g change de signe; en effet la relation (96.12) montre que γ_{jlm} est un *pseudotenseur parfaitement antisymétrique.*

5. Par analogie avec (96.13) on écrira

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} + g' \operatorname{rot} \boldsymbol{H}, \tag{96.14}$$

où g' est un autre *pseudoscalaire.* Nous admettons ici que la perméabilité magnétique est égale à l'unité. Le terme supplémentaire $g' \operatorname{rot} \boldsymbol{H}$ est nécessaire pour que la loi de la conservation de l'énergie soit vérifiée. En effet, en utilisant les équations de Maxwell, on peut mettre les relations (96.13) et (96.14) sous la forme

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} - \frac{g}{c} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}; \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} + \frac{g'}{c} \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}.$$

Simplifions ces équations en portant la deuxième expression dans la première et la première dans la seconde. Le produit gg' est une quantité *d'ordre de petitesse supérieur* et peut être négligé. On obtient

ainsi

$$D = \varepsilon E - \frac{g}{c}\frac{\partial B}{\partial t}, \quad B = H + \frac{\varepsilon g'}{c}\frac{\partial E}{\partial t}. \tag{96.15}$$

Conformément à l'électrodynamique, la quantité $E\dot{D} + H\dot{B}$ est égale à la dérivée par rapport au temps de la densité d'énergie électromagnétique (multipliée par 8π) (cf. t. III, § 84). A l'aide de (96.15) mettons cette quantité sous la forme

$$E\dot{D} + H\dot{B} = (\varepsilon E\dot{E} + H\dot{H}) + \frac{1}{c}(\varepsilon g' E\ddot{E} - gH\ddot{H}).$$

Le premier terme du second membre est la dérivée de $^1/_2(\varepsilon E^2 + H^2)$. Il s'ensuit que le deuxième terme doit être lui aussi la dérivée par rapport au temps d'une certaine fonction. Il en sera ainsi si la relation $\varepsilon g' = g$ est vérifiée car alors

$$\varepsilon g' E\ddot{E} + gH\ddot{H} = g\frac{\partial}{\partial t}(E\dot{E} - H\dot{H}).$$

Ainsi se trouve démontrée la nécessité de l'introduction du second terme dans (96.14); les formules (96.15) s'écrivent alors

$$D = \varepsilon E - \frac{g}{c}\frac{\partial H}{\partial t}, \quad B = H + \frac{g}{c}\frac{\partial E}{\partial t}. \tag{96.16}$$

6. Nous disposons maintenant d'un système complet d'équations représentant les ondes monochromatiques dans un milieu homogène optiquement actif. Il résulte des équations div $D = 0$ et div $B = 0$ que dans ce milieu les ondes planes sont *transversales par rapport aux vecteurs* D *et* B; *elles le sont aussi par rapport aux vecteurs* E *et* H, puisqu'il résulte des équations (96.13) et (96.14) que div $E =$ $=$ div $H = 0$. En portant les expressions (96.16) dans les équations de Maxwell

$$\operatorname{rot} H = \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} E = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t},$$

on obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} H &= \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E}{\partial t} - \frac{g}{c^2}\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}, \\ \operatorname{rot} E &= -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{g}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}. \end{aligned} \tag{96.17}$$

Posons que l'onde est plane et se propage dans le sens positif de l'axe Z. Dans ce cas seules les composantes E_x et E_y, H_x et H_y sont différentes de zéro et ne dépendent que de la coordonnée z. Partant de là, écrivons les équations (96.17) sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial H_y}{\partial t} - \frac{g}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial E_y}{\partial z} &= \frac{1}{c}\frac{\partial H_x}{\partial t} + \frac{g}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}. \end{aligned} \tag{96.18}$$

Les dérivées $\partial H_x/\partial z$ et $\partial H_y/\partial z$ se présentent sous la forme analogue. Notons que dans (96.18) toutes les quantités sont réelles. On simplifiera les raisonnements ultérieurs en introduisant les combinaisons complexes suivantes :

$$\begin{aligned} E_+ &= E_x + iE_y, \quad & E_- &= E_x - iE_y, \\ H_+ &= H_x + iH_y, \quad & H_- &= H_x - iH_y. \end{aligned} \qquad (96.19)$$

La partie réelle du nombre complexe E_+ définit la composante E_x et le coefficient de la partie imaginaire définit la composante E_y, etc. Pour procéder à l'étude des phénomènes de polarisation rotatoire, il est préférable d'utiliser directement les combinaisons complexes (96.19) que les expressions réelles correspondantes. Par exemple, dans le cas d'oscillations harmoniques, $E_x = A \cos \omega t$, $E_y = A \sin \omega t$, mais $E_+ = Ae^{i\omega t}$. Le point représentatif du nombre complexe E_+ se déplace dans le plan complexe suivant une trajectoire circulaire en allant de l'axe X vers l'axe Y et représente donc une *onde circulaire polarisée à gauche*. De même E_- représente une *onde polarisée circulairement à droite*.

Multiplions par i la deuxième équation (96.18) ; par addition et soustraction des équations on trouve les dérivées $\partial E_+/\partial z$ et $\partial E_-/\partial z$. En procédant de la même façon avec le champ magnétique on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_+}{\partial z} &= \frac{i}{c}\frac{\partial H_+}{\partial t} + \frac{ig}{c^2}\frac{\partial^2 E_+}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial H_+}{\partial z} &= -\frac{i\varepsilon}{c}\frac{\partial E_+}{\partial t} + \frac{ig}{c^2}\frac{\partial^2 H_+}{\partial t^2}. \end{aligned} \qquad (96.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_-}{\partial z} &= -\frac{i}{c}\frac{\partial H_-}{\partial t} - \frac{ig}{c^2}\frac{\partial^2 E_-}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial H_-}{\partial z} &= \frac{i\varepsilon}{c}\frac{\partial E_-}{\partial t} - \frac{ig}{c^2}\frac{\partial^2 H_-}{\partial t^2}. \end{aligned} \qquad (96.21)$$

Les équations initiales ont été divisées en deux groupes d'*équations indépendantes*. Le premier groupe contient les combinaisons E_+ et H_+ qui représentent les ondes polarisées circulairement à gauche et le second groupe contient les combinaisons E_- et H_- auxquelles correspondent les ondes polarisées circulairement à droite. Les deux groupes étant semblables, il suffit de discuter l'un d'eux, par exemple (96.20). Eliminons par un procédé usuel la quantité H_+. En rejetant les termes en g^2, on a

$$\frac{\partial^2 E_+}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 E_+}{\partial t^2} + \frac{2ig}{c^2}\frac{\partial^3 E_+}{\partial t^2\,\partial z}$$

et une équation analogue pour H_+. Pour une onde monochromatique plane $E_+ = C \exp i(\omega t - kz)$ la dérivation par rapport à z est

équivalente au produit par $-ik$. Par conséquent

$$\frac{\partial^2 E_+}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 E_+}{\partial t^2} + \frac{2gk}{c^2}\frac{\partial^2 E_+}{\partial t^2}.$$

Dans le dernier terme k peut être remplacé par le nombre d'onde à l'approximation d'ordre zéro, i.e. $k = \omega\sqrt{\varepsilon}/c$, ce qui conduit à l'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 E_+}{\partial z^2} = \frac{1}{v_+^2}\frac{\partial^2 E_+}{\partial t^2}, \tag{96.22}$$

où

$$v_+ = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}\frac{1}{[1+2g\omega/c\sqrt{\varepsilon}]^{1/2}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{g\omega}{\varepsilon},$$

ou encore

$$v_+ = \frac{c}{n} - \frac{g\omega}{n^2}, \tag{96.23}$$

où n est l'indice de réfraction du milieu. Pour l'onde polarisée circulairement à gauche, on trouve de même

$$v_- = \frac{c}{n} + \frac{g\omega}{n^2}. \tag{96.24}$$

Comme les vitesses v_+ et v_- sont différentes, on doit observer une *biréfringence circulaire* et une *rotation du plan de polarisation*.

Vérifions que dans toute onde plane polarisée circulairement les vecteurs électrique et magnétique sont rectangulaires. Il suffit pour cela de procéder dans (96.20) aux substitutions $\partial/\partial t \to i\omega$ et $\partial/\partial z \to -ik$. La première équation (96.20) s'écrira

$$\frac{\omega}{c} H_+ = i\left(k - \frac{g\omega^2}{c}\right) E_+.$$

Comme le quotient E_+/H_+ est un nombre *purement imaginaire*, les vecteurs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{H}$ sont rectangulaires dans l'onde considérée.

7. Si le milieu possède un *centre de symétrie*, le développement (96.9) du tenseur $\varepsilon_{jl}(\omega, \boldsymbol{k})$ ne comportera pas de termes linéaires en $\boldsymbol{k}$. Dans ce cas la dispersion spatiale peut être due aux termes quadratiques. Ce type de dispersion détermine la faible dépendance de l'absorption des cristaux cubiques de Cu_2O avec la polarisation de la lumière (Gross et Kaplianski, 1960) et la faible anisotropie de l'indice de réfraction des cristaux cubiques de silicium (Pasternak et Védam, 1971). Ces effets sont très faibles, car ils sont déterminés par le carré $(a/\lambda)^2$, i.e. par une quantité de l'ordre de 10^{-6} à 10^{-5} (a est la dimension de la molécule ou le paramètre du réseau cristallin). Il existe ainsi d'autres effets de dispersion spatiale que nous ne considérerons pas ici.

§ 97. Fluctuations thermiques

Dans ce paragraphe auxiliaire nous présentons quelques notions concernant les fluctuations thermiques que nous aurons à utiliser dans l'étude de la diffusion moléculaire de la lumière.

1. Soit f une grandeur arbitraire fluctuante. On appelle *fluctuation* de la grandeur f l'écart $\Delta f = f - \bar{f}$ entre sa valeur instantanée et sa valeur moyenne. Généralement on utilise le *carré moyen de la fluctuation*, i.e. la quantité $\overline{(\Delta f)^2}$. La racine carrée de cette quantité $\sqrt{\overline{(\Delta f)^2}}$ est la *fluctuation quadratique moyenne*; son rapport à la valeur moyenne $\bar{f}$, i.e. $\sqrt{\overline{(\Delta f)^2}}/\bar{f}$ est la *fluctuation quadratique moyenne relative*.

En faisant la moyenne de l'expression $(\Delta f)^2 = (f - \bar{f})^2 = f^2 - 2f\bar{f} - (\bar{f})^2$, on obtient

$$\overline{(\Delta f)^2} = \overline{f^2} - 2\overline{f\bar{f}} - (\bar{f})^2.$$

Comme $\bar{f}$ est une quantité constante, on a $\overline{f\bar{f}} = \bar{f}\bar{f} = (\bar{f})^2$. Par suite

$$\overline{(\Delta f)^2} = \overline{f^2} - (\bar{f})^2. \tag{97.1}$$

Calculons la moyenne du produit de deux grandeurs fluctuantes:

$$fg = (\bar{f} + \Delta f)(\bar{g} + \Delta g) = \bar{f}\bar{g} + \bar{g}\Delta f + \bar{f}\Delta g + \Delta f \Delta g.$$

Comme $\bar{f}$ et $\bar{g}$ sont des quantités constantes et $\overline{\Delta f} = \overline{\Delta g} = 0$, on a

$$\overline{fg} = \bar{f}\bar{g} + \overline{\Delta f \Delta g}. \tag{97.2}$$

En posant $f = g$ on retrouve la formule (97.1).

Les grandeurs f et g sont dites *statistiquement indépendantes* si $\overline{\Delta f\ \Delta g} = 0$. Dans ce cas

$$\overline{fg} = \bar{f}\bar{g}. \tag{97.3}$$

2. Considérons un système physique arbitraire composé de N parties indépendantes et identiques. Un exemple en est un gaz parfait dont les parties constitutives sont les molécules prises isolément. Soit f_i une *grandeur additive* arbitraire caractéristique du i-ème sous-système, par exemple l'énergie cinétique de la i-ème molécule. Si l'additivité postulée est vérifiée, la grandeur correspondante du systèm^ tout entier sera représentée par $F = \sum f_i$. Exprimons la valeur quadratique moyenne des fluctuations de la grandeur F en fonction de la valeur quadratique moyenne de la grandeur f_i. On a évidemment $\bar{F} = \sum \bar{f_i} = N\bar{f}$, où on a omis l'indice i, puisqu'on a admis que toutes les parties du système étaient identiques. D'autre part,

$$F^2 = \left(\sum f_i\right)^2 = \sum f_i^2 + \sum_{i \neq j}\sum f_i f_j.$$

Comme les parties sont indépendantes, $\overline{f_i f_j} = \bar{f_i}\bar{f_j} = (\bar{f})^2$ et par suite

$$\overline{F^2} = N\overline{f^2} + N(N-1)(\bar{f})^2.$$

En portant ces valeurs dans (97.1) on obtient

$$\overline{(\Delta F)^2} = \overline{F^2} - (\bar{F})^2 = N(\overline{f^2} - \bar{f}^2). \tag{97.4}$$

Conformément à (97.1) on en tire

$$\frac{\sqrt{\overline{(\Delta F)^2}}}{\bar{F}} = \frac{\sqrt{N}\sqrt{\overline{(\Delta f)^2}}}{N\bar{f}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\frac{\sqrt{\overline{(\Delta f)^2}}}{\bar{f}}. \tag{97.5}$$

La fluctuation relative de la grandeur F est donc inversement proportionnelle à la racine carrée de N. Si N est grand, les fluctuations relatives sont négligeables. Ces résultats s'appliquent aussi aux grandeurs non additives. Le *bien-fondé de l'application des considérations thermodynamiques aux systèmes macroscopiques* est intimement lié aux résultats obtenus ci-dessus.

3. Appliquons la formule (97.4) au calcul des fluctuations du nombre de molécules contenues dans un volume donné V de gaz parfait. Dans un grand récipient fermé de volume V se trouvent N molécules de gaz parfait, qui ne sont soumises à aucun champ de force. Divisons le volume V en $z = V/v$ éléments de volume v_i identiques, chacun de volume v. En notant n_i le nombre de molécules contenues dans le petit volume v_i et N le nombre de molécules contenues dans le grand volume V, on a $N = \sum n_i$. Le nombre moyen $\overline{n_i}$ de molécules contenues dans v_i est $\overline{n_i} = \overline{n} = Nv/V$, donc le même dans tous les petits volumes. Représentons ce nombre moyen $\overline{n_i}$ sous la forme $\overline{n} = Np$, où $p = v/V$ est la probabilité de présence d'une molécule dans un petit volume v. Donnons à f_i les valeurs suivantes: $f_i = 1$ lorsque la i-ème molécule est contenue dans un petit volume v et $f_i = 0$ lorsqu'elle se trouve dans le volume restant $V - v$. Le nombre n de molécules contenues dans un petit volume v peut être représenté sous la forme $n = \sum f_i$, la sommation étant faite sur les N molécules du volume V. Il est évident que $f_i = f_i^2 = f_i^3 = \ldots$, et par suite $\overline{f_i} = \overline{f_i^2} = \overline{f_i^3} = \ldots = p$. En appliquant la formule (97.1) il vient

$$\overline{\Delta f_i^2} = \overline{f_i^2} - (\overline{f_i})^2 = p - p^2 = p\,(1-p).$$

Et comme pour un gaz parfait les quantités $f_1, f_2, f_3, \ldots$ sont statistiquement indépendantes, la formule (97.4) donne

$$\overline{\Delta n^2} = Np\,(1-p) = (1-p)\,\overline{n}. \tag{97.6}$$

Si le volume V est infiniment grand, on a $p \to 0$ et

$$\overline{\Delta n^2} = \overline{n}. \tag{97.7}$$

On en déduit la fluctuation relative de la densité du gaz parfait

$$\sqrt{\overline{\Delta\rho^2}}/\overline{\rho} = 1/\sqrt{\overline{n}}. \tag{97.8}$$

4. Un procédé plus général de calcul des fluctuations de densité s'appliquant aux gaz, aux liquides et aux solides se fonde sur le *théorème de l'équipartition de l'énergie cinétique entre les degrés de liberté*. Considérons une petite partie de liquide ou de gaz entourée de toutes parts par le même milieu liquide ou gazeux dont la température T est maintenue constante (au moyen d'un thermostat). Afin de simplifier les calculs, supposons que cette petite portion de liquide ou de gaz est placée dans un cylindre muni d'un piston. Si les parois du cylindre conduisent parfaitement la chaleur et si le piston s'y déplace sans frottement, leur présence n'empêchera pas les échanges d'énergie entre la substance se trouvant à l'intérieur du cylindre et le thermostat, ni l'égalisation des pressions. Par suite de l'agitation thermique le piston exécutera des mouvements browniens. Nous appliquerons au piston le théorème de l'équipartition de l'énergie cinétique entre les degrés de liberté.

On peut assimiler le piston à un oscillateur harmonique exécutant des vibrations thermiques. Lorsqu'il se déplace de x de sa position d'équilibre $x = 0$, son énergie potentielle moyenne est $^1/_2\varkappa\overline{x^2} = {}^1/_2kT$, $\varkappa$ étant le coefficient d'élasticité correspondant à ce déplacement. En notant S l'aire du piston et ΔV la variation de volume du système, on a $\Delta V = Sx$. Par suite $\overline{(\Delta V)^2} = S^2\overline{x^2} = S^2kT/\varkappa$. La force de rappel ramenant le piston dans sa position d'équilibre est $F = S\dfrac{\partial P}{\partial x}x$, où P est la pression du gaz ou du liquide. Par conséquent

$\varkappa = -S\, \partial P/\partial x = -S^2\, \partial P/\partial V$. On obtient finalement

$$(\overline{\Delta V^2})_T = -\frac{kT}{(\partial P/\partial V)_T} = -kT\,(\partial V/\partial P)_T. \qquad (97.9)$$

L'indice T indique que la température du milieu (du thermostat) est maintenue *constante*. Si la substance contenue dans le volume V était adiabatiquement isolée, on aurait remplacé l'indice T par l'indice S (entropie constante), i.e.

$$(\overline{\Delta V^2})_S = -kT\,(\partial V/\partial P)_S. \qquad (97.10)$$

Les formules (97.9) et (97.10) expriment les fluctuations du volume d'une *même masse de substance* se trouvant en équilibre thermodynamique avec le milieu ambiant. Pour un gaz parfait à température constante, $PV = \text{const}$ et $(\partial V/\partial P)_T = -V/P$. Comme $PV = nkT$, n étant le nombre de molécules contenues dans le volume V, on déduit de la formule (97.9) $\overline{(\Delta V)^2} = V^2/n$. Supposons maintenant que le volume V est donné et que le nombre n de molécules qui s'y trouvent varie par suite des fluctuations thermiques. Si le volume V augmentait de ΔV, le nombre de molécules contenues dans le volume initial V diminuerait de $\Delta n = n\,\Delta V/V$. On en tire

$$\overline{(\Delta n)^2} = (n/V)^2\,\overline{(\Delta V)^2} = n = \bar{n},$$

résultat conforme à (97.7). Dans le résultat final il n'est pas nécessaire de distinguer n et $\bar{n}$.

5. Passons maintenant au calcul des *fluctuations de l'énergie*. Pour mieux faire comprendre la méthode mise en œuvre, nous commençons par le calcul des fluctuations de l'énergie cinétique $\mathscr{E}$ d'une molécule d'un gaz parfait monoatomique. Conformément à la loi de répartition des vitesses de Maxwell

$$\bar{\mathscr{E}} = \frac{1}{Z}\int \mathscr{E} e^{-\alpha\mathscr{E}}\, d\Gamma, \qquad (97.11)$$

où $\alpha = 1/(kT)$, $d\Gamma$ est l'élément de volume de l'espace des vitesses et Z est défini par la condition de normalisation:

$$Z = \int e^{-\alpha\mathscr{E}}\, d\Gamma. \qquad (97.12)$$

En dérivant (97.12) par rapport au paramètre α on trouve

$$\frac{dZ}{d\alpha} = -\int \mathscr{E} e^{-\alpha\mathscr{E}}\, d\Gamma,$$

et la formule (97.11) s'écrit

$$\bar{\mathscr{E}} = -\frac{1}{Z}\frac{dZ}{d\alpha}. \qquad (97.13)$$

De là

$$\frac{d\bar{\mathscr{E}}}{d\alpha} = -\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{d\alpha^2} + \frac{1}{Z^2}\left(\frac{dZ}{d\alpha}\right)^2 = -\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{d\alpha^2} + \bar{\mathscr{E}},$$

et

$$\overline{\mathscr{E}^2} = \frac{1}{Z}\int \mathscr{E}^2 e^{-\alpha\mathscr{E}}\, d\Gamma = \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{d\alpha^2}. \qquad (97.14)$$

En comparant les deux dernières formules on obtient

$$\overline{(\Delta\mathscr{E})^2} = \overline{\mathscr{E}^2} - (\bar{\mathscr{E}})^2 = -\frac{d\bar{\mathscr{E}}}{d\alpha},$$

et en substituant $\alpha = 1/(kT)$

$$\overline{(\Delta\mathscr{E})^2} = kT^2\frac{d\bar{\mathscr{E}}}{dT}. \qquad (97.15)$$

Comme pour un gaz parfait monoatomique $\overline{\mathscr{E}} = {}^3/_2 kT$, on a

$$\overline{(\Delta\mathscr{E})^2} = \frac{3}{2}(kT)^2. \qquad (97.16)$$

6. La méthode de calcul de $\overline{(\Delta\mathscr{E})^2}$ peut être appliquée pratiquement sans rien changer au calcul de cas plus compliqués et plus importants. Considérons, par exemple, une petite portion (sous-système) d'un milieu isotrope (liquide ou gazeux) qui est en équilibre statistique avec le milieu tout entier dont la température T est maintenue constante. Vis-à-vis de ce sous-système le milieu environnant joue le rôle de *thermostat*. Par suite des échanges d'énergie entre le milieu et le sous-système, l'énergie de ce dernier subira des fluctuations incessantes. Les variations désordonnées de l'énergie du sous-système sont régies par une loi statistique analogue à la loi maxwellienne de la répartition de l'énergie cinétique parmi les molécules. Aussi la valeur de l'énergie moyenne du sous-système s'exprimera-t-elle par la formule (97.13), où α conserve sa signification, mais l'intégration de (97.12) s'effectue sur l'espace multidimensionnel des coordonnées et des impulsions du sous-système. C'est la seule différence avec le cas traité plus haut, qui d'ailleurs ne se répercute nullement sur les calculs ultérieurs, de sorte que le résultat (97.15) s'applique tel quel au sous-système considéré.

La formule (97.15) reste valable en statistique quantique. On le démontre en remplaçant l'intégrale (97.12) par la somme

$$Z = \sum g_i \exp(-\alpha\mathscr{E}_i),$$

où $\mathscr{E}_i$ est l'énergie des niveaux quantiques du sous-système et g_i la multiplicité de ces niveaux. La sommation est faite sur tous les états quantiques du sous-système (cf. t. II, § 85).

Si le sous-système considéré est macroscopique et c'est son volume qui est maintenu constant, $\overline{\mathscr{E}}$ représentera l'*énergie interne du sous-système* et $d\overline{\mathscr{E}}/dT$ sa *capacité calorifique* C_V à volume constant. On obtient alors à partir de (97.15)

$$\overline{(\Delta\mathscr{E}^2)}_V = kT^2 C_V. \qquad (97.17)$$

L'indice V dans le premier membre sert à indiquer que $\overline{(\Delta\mathscr{E}^2)}_V$ est le carré moyen des fluctuations de l'énergie du sous-système lorsque son volume V est maintenu constant.

7. Considérons maintenant les *fluctuations de l'enthalpie I* du sous-système. Pour traiter cette question nous utiliserons l'artifice suivant. Supposons que le sous-système soit enfermé dans une enceinte à parois mobiles parfaitement conductrices de la chaleur, ce qui permet de faire varier le volume du sous-système. Posons que l'enceinte est soumise à l'action des forces extérieures, maintenant constante la pression extérieure P. Ces forces font croître de PV l'énergie potentielle du sous-système. Si on entend par $\mathscr{E}$ la même énergie que dans le cas précédent, compte tenu de l'énergie potentielle supplémentaire PV, la valeur moyenne de l'énergie totale du sous-système sera égale à $\overline{\mathscr{E}} + P\overline{V}$, qui est précisément l'enthalpie du sous-système I. On pourrait donc répéter les considérations données plus haut sans rien y changer, à condition de remplacer $\mathscr{E}$ par $\mathscr{E} + PV$. A la place de la formule (97.15) on obtient

$$\overline{(\Delta I^2)}_P = kT^2 \frac{dI}{dT}. \qquad (97.18)$$

Or pour $P = \text{const}$, la dérivée dI/dT représente la capacité calorifique C_P du sous-système à pression constante, ce qui permet d'écrire

$$\overline{(\Delta I^2)}_P = kT^2 C_P. \qquad (97.19)$$

8. Appliquons la méthode thermodynamique de calcul des fluctuations exposée ci-dessus à *n'importe quelles grandeurs* caractérisant les propriétés macro-

scopiques des sous-systèmes. Nous ne considérerons ici que les corps isotropes pour lesquels, à l'état d'équilibre thermodynamique, toute grandeur thermodynamique est une fonction des autres grandeurs thermodynamiques; on peut prendre ces dernières pour les *variables indépendantes*. Quoique les grandeurs thermodynamiques des sous-systèmes macroscopiques soient sujettes à des fluctuations, leurs états instantanés sont *pratiquement équilibrés* si le sous-système est petit. Comme ces grandeurs dépendent elles aussi de deux variables indépendantes, le problème consiste à calculer les fluctuations thermiques de ces variables indépendantes. Dans le résultat final donnant la valeur quadratique moyenne d'une fluctuation donnée, on devra indiquer laquelle des grandeurs choisies pour caractériser l'état du sous-système est *maintenue constante*, afin que ce résultat ait un sens.

Quelques exemples aideront à comprendre le principe du calcul des fluctuations des grandeurs physiques.

Commençons par le calcul des fluctuations de la température d'un sous-système macroscopique que nous supposerons être en contact thermique avec un thermostat. En posant que la température du sous-système dépend des variables indépendantes V et $\mathscr{E}$, on écrira

$$\Delta T=\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_{\mathscr{E}}\Delta V+\left(\frac{\partial T}{\partial \mathscr{E}}\right)_V\Delta\mathscr{E}.$$

Comme V et $\mathscr{E}$ sont indépendantes, on a $\overline{\Delta V\cdot\Delta\mathscr{E}}=0$ et par suite

$$\overline{(\Delta T)^2}=\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)^2_{\mathscr{E}}\overline{(\Delta V)^2}+\left(\frac{\partial T}{\partial \mathscr{E}}\right)^2_V\overline{(\Delta\mathscr{E})^2}.$$

A volume constant, la dérivée $(\partial\mathscr{E}/\partial T)_V$ représente la capacité calorifique C_V du sous-système, de sorte que la formule (97.17) donne

$$\overline{(\Delta T^2)_V}=\frac{1}{C_V^2}\overline{(\Delta\mathscr{E}^2)_V}=\frac{kT^2}{C_V}. \tag{97.20}$$

Calculons les fluctuations de l'entropie S du sous-système. Prenons V et $\mathscr{E}$ pour variables indépendantes. En raisonnant comme dans le cas précédent, crivons

$$\overline{\Delta V\cdot\Delta\mathscr{E}}=0,\qquad \overline{(\Delta S^2)_V}=\left(\frac{\partial S}{\partial\mathscr{E}}\right)^2_V\overline{(\Delta\mathscr{E}^2)_V}.$$

Comme $\partial S/\partial\mathscr{E}=1/T$, compte tenu de (97.17)

$$\overline{(\Delta S^2)_V}=kC_V. \tag{97.21}$$

Si on avait pris pour variables indépendantes P et I on aurait obtenu

$$\overline{(\Delta S^2)_P}=kC_P. \tag{97.22}$$

Considérons maintenant les fluctuations de la pression P. Soient V et T les variables indépendantes. On a

$$\overline{\Delta V\cdot\Delta T}=0,\qquad \overline{(\Delta P^2)_T}=\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)^2_T\overline{(\Delta V^2)_T},$$

ou en vertu de (97.9)

$$\overline{(\Delta P^2)_T}=-kT\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T. \tag{97.23}$$

En prenant P es S pour variables indépendantes, on trouve

$$\overline{(\Delta P^2)_S}=-kT\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S=-\gamma kT\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T, \tag{97.24}$$

où $\gamma = C_P/C_V$. Pour obtenir (97.24) on a utilisé la relation thermodynamique $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S \Big/ \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = \gamma$ (cf. t. II, § 47).

Calculons enfin les *fluctuations de la densité* ρ d'une substance contenue dans un volume V. Le problème se réduit à transformer la formule (97.9). Remarquons d'abord que la quantité $V\,\partial P/\partial V$ ne dépend pas de V, ce qui permet de remplacer V par le volume massique v. On trouve ainsi

$$\overline{(\Delta V^2)}_T = -\frac{VkT}{v\,(\partial P/\partial v)_T}.$$

Comme la masse de substance $V\rho$ contenue dans le volume V est constante, on a $V\,\Delta\rho + \rho\,\Delta V = 0$. Par conséquent $(\Delta\rho)^2 = \left(\frac{\rho}{V}\right)^2 (\Delta V)^2$, et

$$V\,\overline{(\Delta\rho^2)}_T = -\frac{\rho^2 kT}{v\,(\partial P/\partial v)_T}. \tag{97.25}$$

Plus le volume V est petit, plus grandes y sont les fluctuations relatives de la densité.

§ 98. Diffusion de la lumière

1. Dans un milieu transparent et homogène, une onde plane ne se propage que dans le sens direct sans être diffusée de côté. (Nous négligerons la diffraction en admettant que la largeur du front de l'onde est assez grande pour que l'angle de divergence par diffraction soit petit.) Supposons que l'homogénéité optique du milieu soit perturbée, par exemple par la présence d'une multitude de fines particules d'une substance étrangère réparties au hasard dans le milieu. Comme exemple on peut citer un air poussiéreux, le brouillard, la fumée, les émulsions et les suspensions contenant en suspension des particules étrangères. L'indice de réfraction de ces milieux inhomogènes présente des variations spatiales très irrégulières, mais sa valeur moyenne dans tout petit volume contenant un très grand nombre d'hétérogénéités macroscopiques est partout la même dans le milieu. On dit que le milieu est *optiquement trouble*. Dans tout milieu optiquement trouble, la lumière se propage non seulement dans le sens direct, mais se trouve *diffusée de tous les côtés*. Tyndall (1820-1893) fut le premier à avoir procédé en 1869 à une étude expérimentale de la diffusion de la lumière par les milieux troubles, et c'est pour cela que le phénomène est appelé *effet Tyndall*. La théorie de l'effet fut élaborée par Rayleigh.

2. La propagation de la lumière dans un milieu isotrope inhomogène et immobile est décrite par les équations de Maxwell

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} &= \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}(\varepsilon \boldsymbol{E}) = 0,\\ \operatorname{rot} \boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0, \end{aligned} \tag{98.1}$$

où la permittivité diélectrique ε est fonction des coordonnées. Représentons-la par $\varepsilon = \varepsilon_0 + \delta\varepsilon$, où ε_0 est la partie constante de la permittivité. Pour le problème de la diffusion de la lumière, seul importe le cas où $\delta\varepsilon$ est petit devant ε_0, mais pour le moment nous n'introduirons pas cette limitation. Par ailleurs, on peut choisir arbitrairement la valeur de ε_0, car le résultat d'un calcul exact ne peut dépendre de la valeur de ε_0. Il est cependant commode et plus conforme à la réalité d'entendre par ε_0 la permittivité diélectrique du milieu débarrassé des particules de la substance étrangère.

Représentons le champ électromagnétique sous la forme $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{H}'$, où $\boldsymbol{E}_0$ et $\boldsymbol{H}_0$ vérifient les équations de Maxwell pour un milieu homogène

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H}_0 = \frac{\varepsilon_0}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}_0}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}(\varepsilon_0 \boldsymbol{E}_0) = 0,$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E}_0 = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}_0}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{H}_0 = 0.$$

Dans le problème de la diffusion de la lumière, ces équations définissent l'*onde incidente* qui se serait propagée dans le milieu si celui-ci ne contenait pas d'inhomogénéités optiques, tandis que $\boldsymbol{E}'$ et $\boldsymbol{H}'$ définissent le champ de la *lumière diffusée*. En soustrayant les équations ci-dessus des équations (98.1) on obtient

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot} \boldsymbol{H}' - \frac{\varepsilon_0}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}'}{\partial t} = \frac{\delta\varepsilon}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}(\varepsilon_0 \boldsymbol{E}') = -\operatorname{div}(\delta\varepsilon \boldsymbol{E}), \\ &\operatorname{rot} \boldsymbol{E}' - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}'}{\partial t} = 0, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{H}' = 0. \end{aligned} \tag{98.2}$$

On a obtenu pour le champ $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$ des équations de Maxwell semblables à celles qui correspondent à un milieu homogène de permittivité ε_0. Les deux premières équations (98.2) comportent des seconds membres que l'on peut considérer comme des *sources supplémentaires d'ondes électromagnétiques*. En utilisant la notation

$$\delta \boldsymbol{P} = \frac{\delta\varepsilon}{4\pi}\boldsymbol{E}, \tag{98.3}$$

ces équations s'écrivent

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H}' - \frac{\varepsilon_0}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}'}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\frac{\partial}{\partial t}\delta \boldsymbol{P}, \quad \operatorname{div}(\varepsilon_0 \boldsymbol{E}') = -4\pi \operatorname{div}(\delta \boldsymbol{P}). \tag{98.4}$$

Les équations (98.4) montrent qu'il apparaît dans le milieu une *polarisation supplémentaire* $\delta \boldsymbol{P}$ définie par l'expression (98.3) ; chaque élément de volume δV du milieu acquiert ainsi un *moment dipolaire supplémentaire* $\delta V \cdot \delta \boldsymbol{P}$. En variant dans le temps, ce moment dipolaire émet des ondes électromagnétiques comme un *dipôle oscillant de Hertz*. C'est la lumière diffusée par l'élément de volume δV.

3. Supposons que l'inhomogénéité optique soit due à de petites billes identiques de rayon a, réparties au hasard dans le volume oc-

cupé par le milieu. Posons que la distance moyenne entre les billes soit grande devant le rayon a et que a est petit devant la longueur d'onde. Dans ces conditions on pourra poser, dans le calcul du champ électrique $\boldsymbol{E}$ à l'intérieur d'une bille, que le champ extérieur $\boldsymbol{E}_0$ de l'onde lumineuse est homogène. Nous avons démontré en électrostatique (t. III, § 16) que le champ $\boldsymbol{E}$ est également homogène et se trouve défini par l'expression

$$\boldsymbol{E}=\frac{3}{\varepsilon/\varepsilon_0+2}\boldsymbol{E}_0=\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\boldsymbol{E}_0, \tag{98.5}$$

où ε est la permittivité diélectrique des billes et ε_0 celle du milieu ambiant. Selon la formule (98.3) la polarisation supplémentaire n'est différente de zéro qu'à l'intérieur des billes où elle est égale à

$$\delta\boldsymbol{P}=\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{4\pi}\boldsymbol{E}=\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{4\pi}\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\boldsymbol{E}_0.$$

Le moment dipolaire supplémentaire d'une bille est

$$\boldsymbol{p}=\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}(\varepsilon-\varepsilon_0)\,a^3\boldsymbol{E}_0. \tag{98.6}$$

Supposons d'abord que l'onde incidente est *polarisée rectilignement*. Dans ce cas les vecteurs $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{E}$ sont toujours parallèles à une seule et même direction fixe. Le champ électrique du dipôle $\boldsymbol{p}$ à grande distance r de celui-ci (dans la zone d'onde) est

$$E_1=\frac{\sin\vartheta}{c^2r}[\ddot{p}]_{t-r/v}=-\frac{\omega^2\sin\vartheta}{c^2r}[p]_{t-r/v}, \tag{98.7}$$

où $v=c/\sqrt{\varepsilon}=c/n$ est la vitesse de la lumière dans le milieu considéré et ϑ l'angle que fait l'axe du dipôle $\boldsymbol{p}$ avec la direction de la lumière diffusée (cf. t. III, § 141). *La lumière diffusée est polarisée rectilignement* et son vecteur électrique est situé dans le plan passant par l'axe du dipôle $\boldsymbol{p}$ et la direction du rayonnement émis. *Nous entendons ici et dans ce qui suit par intensité de la lumière la valeur numérique du vecteur de Poynting moyenné sur le temps.* Selon l'électrodynamique (cf. t. III, § 141) l'intensité de la lumière diffusée par une seule bille est

$$I_1=\frac{\sin^2\vartheta}{4\pi\varepsilon_0v^3r^2}\overline{\ddot{p}^2}=\frac{\omega^4\sin^2\vartheta}{4\pi\varepsilon_0v^3r^2}\overline{p^2}. \tag{98.8}$$

L'intensité de l'onde directe est

$$I_0=\frac{c}{4\pi}\overline{E_0H_0}=\frac{v}{4\pi}\varepsilon_0\overline{E_0^2}. \tag{98.9}$$

En utilisant (98.6) on trouve

$$I_1=9\varepsilon_0^2\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\right)^2\frac{\omega^4a^6}{c^4}\frac{\sin^2\vartheta}{r^2}I_0. \tag{98.10}$$

ou

$$I_1=9\varepsilon_0^2\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\right)^2\frac{\pi^2V_1^2}{\lambda^4}\frac{\sin^2\vartheta}{r^2}I_0, \tag{98.11}$$

où λ est la longueur d'onde dans le vide et $V_1 = {}^4/_3\pi a^3$ le volume de la bille. L'énergie $\mathcal{P}_1$ diffusée par la bille dans l'unité de temps dans toutes les directions s'obtient en intégrant (98.11) sur une sphère de rayon r. En prenant un élément de surface $2\pi r^2 \sin\vartheta d\vartheta$, on obtient

$$\mathcal{P}_1 = 24\pi^3\varepsilon_0^2 \left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\right)^2 \frac{V_1^2}{\lambda^4} I_0. \qquad (98.12)$$

Supposons maintenant que la lumière incidente est une *lumière naturelle*. Adoptons sa direction de propagation pour axe Z et posons que l'on observe la lumière diffusée suivant la direction OA faisant l'angle θ avec l'axe Z. L'angle θ est appelé *angle de diffusion* (fig. 321). Orientons l'axe X perpendiculairement à OA et à OZ. Comme $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{E}_0$ sont colinéaires, le vecteur $\boldsymbol{p}$ est parallèle au plan XY. Décomposons le vecteur $\boldsymbol{p}$ suivant les axes X et Y. Les intensités des rayonnements émis par les moments dipolaires $\boldsymbol{p}_x$ et $\boldsymbol{p}_y$ sont données par la formule (98.8) où on posera d'abord $\vartheta = \pi/2$, puis $\vartheta = \frac{\pi}{2} - \theta$. Comme la lumière incidente est naturelle, ces rayonnements sont *incohérents* et il faut additionner leurs intensités pour trouver I_1. La formule (98.8) se transforme ainsi en la formule

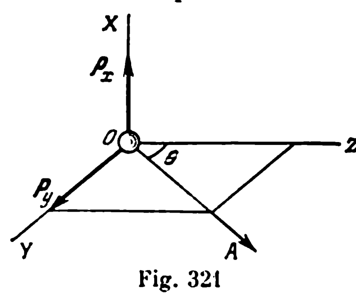


Fig. 321

$$I_1 = \frac{\omega^4}{4\pi\varepsilon_0 v^3 r^2}(\overline{p_x^2} + \overline{p_y^2}\cos^2\theta) = \frac{\omega^4}{4\pi\varepsilon_0 v^3 r^2}\,\frac{1+\cos^2\theta}{2}\,\overline{p^2},$$

puisque pour une lumière naturelle $\overline{p_x^2} = \overline{p_y^2} = {}^1/_2\overline{p^2}$. A la place de (98.11) on obtient

$$I_1 = 9\varepsilon_0^2 \left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\right)^2 \frac{\pi^2 V_1^2}{\lambda^4}\,\frac{1+\cos^2\theta}{2r^2} I_0. \qquad (98.13)$$

La formule (98.12) ne change évidemment pas.

La lumière diffusée n'est polarisée que partiellement. *La lumière diffusée n'est entièrement polarisée rectilignement que lorsque la ligne d'observation OA est perpendiculaire à la direction de propagation de la lumière incidente*, puisque dans ce cas le moment dipolaire $\boldsymbol{p}_y$ ne rayonne pas.

Calculons l'intensité I de la lumière diffusée par un volume V renfermant un grand nombre de billes. Le nombre moyen de billes contenues dans ce volume est égal à NV, où N est le nombre moyen de billes contenues dans l'unité de volume. Comme les distances entre les billes sont grandes devant λ et comme les billes sont distribuées au hasard dans le volume V, pour trouver I on doit additionner les intensités diffusées par chacune des billes. En supposant que la

distance entre le point d'observation et le volume V est grande devant les dimensions linéaires de V, on peut poser dans la formule (98.13) que toutes les distances r sont égales entre elles, ce qui donne

$$I = 9\varepsilon_0^2 \left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\right)^2 \frac{V_1^2}{\lambda^4} \frac{1+\cos^2\theta}{2r^2} NVI_0. \qquad (98.14)$$

4. Calculons la diminution de l'intensité I_0 de la lumière incidente due à la diffusion. Délimitons dans le milieu un cylindre arbitraire dont la section droite est égale à l'unité et dont les génératrices sont parallèles à l'axe Z. Découpons dans ce cylindre une tranche cylindrique infiniment courte comprise entre les plans z = const et $z + dz$ = const. Par la base inférieure y pénètre par seconde l'énergie $I_0(z)$ et par la base supérieure en sort l'énergie $I_0(z + dz)$. La différence de ces énergies $-dI_0$ représente l'énergie diffusée $\mathcal{P}_1 N\,dz$. En identifiant les deux expressions on obtient

$$dI_0 = -\gamma I_0\,dz, \qquad (98.15)$$

où conformément à (98.12)

$$\gamma = 24\pi^3 \varepsilon_0^2 \left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\right)^2 \frac{NV_1^2}{\lambda^4}. \qquad (98.16)$$

Ainsi, par suite de la diffusion, l'intensité de la lumière incidente décroît suivant la loi exponentielle:

$$I_0 = \text{const}\cdot e^{-\gamma z}. \qquad (98.17)$$

La quantité γ est le *coefficient de diffusion.*

5. Conformément à la formule (98.14), l'intensité de la lumière diffusée varie en raison inverse de la *quatrième puissance de la longueur d'onde*. Comme cette formule fut établie initialement par Rayleigh, on l'appelle *loi de Rayleigh*. Cette loi est vérifiée pour les particules diffusantes dont les dimensions linéaires sont petites devant la longueur d'onde.

La loi de Rayleigh fut confirmée qualitativement dès les premières études expérimentales de Tyndall, qui constata que par diffusion la lumière blanche prenait une teinte bleuâtre. Se fondant sur ces observations, Tyndall suggéra que la couleur bleue et la polarisation du ciel seraient dues à la diffusion de la lumière solaire par les petites particules de poussière qui sont toujours abondantes dans l'atmosphère terrestre.

La théorie quantitative de la diffusion de la lumière fut élaborée par Rayleigh. Si la lumière n'était pas diffusée, le ciel paraîtrait noir. Sur ce fond noir les étoiles et les autres corps célestes paraîtraient plus brillants et plus nets. C'est ce que voient les cosmonautes à bord des vaisseaux spatiaux. Du fait de l'existence de l'atmosphère une partie importante des rayons solaires directs est diffusée de tous côtés. Comme la partie de lumière diffusée est d'autant plus grande que la longueur d'onde est plus courte, la lumière diffusée est enrichie en radiations de courtes longueurs d'onde, c'est ce qui explique

la *couleur bleue du ciel.* Au lever et au coucher du Soleil la lumière solaire directe traverse une couche épaisse de l'atmosphère terrestre et une partie importante des radiations de courtes longueurs d'onde sont diffusées. Dans la lumière directe qui parvient jusqu'à la surface terrestre prédomine les radiations rouges et c'est pour cela qu'au lever et au coucher le Soleil paraît rouge. La *teinte rouge de l'aube* s'explique par les mêmes phénomènes.

La teneur de l'atmosphère en poussières et autres particules diminue avec l'altitude. On pourrait donc s'attendre à ce que la proportion de rayons bleus dans la lumière diffusée diminue à mesure que l'altitude augmente. Or les observations faites dans les observatoires de haute montagne montrent que c'est le contraire qui est vrai. Plus l'air est pur et moins il contient de particules étrangères, plus la lumière du ciel contient de rayons bleus et plus sa polarisation est grande. Partant de ces constatations, Rayleigh en conclut que la diffusion est réalisée dans ce cas non par des particules étrangères, mais par les *molécules d'air*; toutes les études théoriques et expérimentales ultérieures confirmèrent ce point de vue. Cette diffusion est appelée *diffusion moléculaire* ou *diffusion de Rayleigh.* Le mécanisme physique de cette diffusion ne fut expliqué qu'en 1908 par M. Smoluchowski (1872-1917). *La diffusion moléculaire est provoquée par les fluctuations thermiques de l'indice de réfraction* qui rendent le milieu optiquement trouble. En 1910, Einstein bâtit sur cette base une théorie de la diffusion de la lumière par les liquides et les gaz. Cette théorie concerne les cas où la longueur d'onde de la lumière est suffisamment grande pour pouvoir diviser le milieu en éléments de volume petits devant le cube de la longueur d'onde et contenant encore un très grand nombre de molécules. On peut appliquer à ces éléments de volume les équations macroscopiques de Maxwell sans avoir à tenir explicitement compte de la structure moléculaire des substances. Les fluctuations de l'indice de réfraction qui se produisent dans ces éléments de volume jouent le rôle d'*inhomogénéités macroscopiques* déterminant la diffusion de la lumière, comme le font les billes considérées plus haut.

Dans le cas général, le champ $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$ de la lumière diffusée peut être calculé par les équations (98.2), où ε_0 désigne maintenant la valeur moyenne de la permittivité diélectrique du milieu et $\delta\varepsilon$ les fluctuations de ε_0. On trouve la solution par la *méthode des approximations successives.* Dans l'approximation d'ordre zéro on néglige dans (98.2) toutes les inhomogénéités du milieu, i.e. on néglige les seconds membres de ces équations. Il n'y aura donc pas de lumière diffusée $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$ et cette approximation ne fournit que l'onde incidente $\boldsymbol{E}_0$, $\boldsymbol{H}_0$. Pour trouver l'approximation d'ordre un on remplace dans les seconds membres de (98.2) $\boldsymbol{E}$ par la valeur $\boldsymbol{E}_0$ trouvée dans l'approximation d'ordre zéro. En résolvant les équations obtenues on trouve $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$, puis $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ en première approximation.

Avec ces solutions on corrige les seconds membres de (98.2) et on trouve E, H en deuxième approximation et ainsi de suite.

La première approximation est déjà pratiquement suffisante, et on posera donc $\delta P = \delta\varepsilon E_0/(4\pi)$. Divisons le milieu en volumes élémentaires $\delta_i V$ qui sont petits devant le cube de la longueur d'onde, mais qui contiennent encore un très grand nombre de molécules. Le moment dipolaire supplémentaire de chaque volume élémentaire $\delta_i V$ résultant des fluctuations de la permittivité diélectrique est

$$p = \frac{\delta_i\varepsilon \cdot \delta_i V}{4\pi} E_0.$$

Cette expression ne diffère de (98.6) que par le facteur de E_0. En admettant que la lumière incidente est une lumière naturelle, l'intensité moyenne de la lumière diffusée par le volume élémentaire $\delta_i V$ est

$$I_i = \frac{\pi^2}{\lambda^4} \frac{1+\cos^2\theta}{2r^2} I_0 (\delta_i V)^2 \overline{(\delta_i \varepsilon)^2}. \qquad (98.18)$$

Le champ électrique correspondant est proportionnel à $\delta_i V$ et à $\delta_i \varepsilon$.

6. Considérons d'abord la diffusion moléculaire par un *gaz parfait*. Dans ce cas

$$\varepsilon_i = 1 + 4\pi\beta \frac{N_i}{\delta_i V},$$

où β est la polarisabilité de la molécule et N_i le nombre de molécules contenues dans le volume élémentaire $\delta_i V$. Comme le volume $\delta_i V$ est fixé dans l'espace, i.e. ne fluctue pas, on tire de la formule ci-dessus $\delta_i V \delta\varepsilon_i = 4\pi\beta\delta N_i$, ce qui signifie que la diffusion de la lumière est due aux *fluctuations du nombre de molécules* contenues dans les volumes $\delta_i V$. Selon (97.7) $\overline{(\delta N_i)^2} = \overline{N_i} = N\delta_i V$, N étant le nombre de molécules contenues dans l'unité de volume. Ainsi

$$I_i = \frac{8\beta^2\pi^4}{\lambda^4} \frac{1+\cos^2\theta}{r^2} I_0 N \delta_i V.$$

Pour les gaz $n^2 - 1 = 4\pi N\beta$. Comme l'indice n est peu différent de l'unité, on peut écrire $n - 1 = 2\pi N\beta$. Après avoir éliminé β on trouve

$$\overline{I}_i = \frac{2\pi^2 (n-1)^2}{N\lambda^4} \frac{1+\cos^2\theta}{r^4} I_0 \delta_i V.$$

Pour pouvoir calculer l'intensité I de la lumière diffusée par un volume fini V, on remarquera que les différents volumes élémentaires $\delta_i V$ et $\delta_j V$ diffusent la lumière de façon *incohérente*. En effet si les dimensions de tous les volumes $\delta_i V$ sont égales, les champs électriques des ondes qu'ils ont diffusées seront de la forme $E_i = A\delta N_i$, le coefficient A étant le même pour tous les volumes élémentaires

$\delta_i V$. Le champ total de l'onde diffusée est alors égal à ΣE_i et son intensité est

$$I \sim \overline{\left(\sum E_i\right)^2} = A^2 \overline{\sum_{i \neq j}\sum \delta N_i \delta N_j} + A^2 \overline{\sum (\delta N_i)^2}.$$

Or pour un gaz parfait les fluctuations des nombres de molécules contenues dans les différents volumes élémentaires sont *indépendantes*. Par suite la somme double figurant dans la formule ci-dessus est égale à zéro et c'est ce qui démontre l'indépendance des fluctuations. Il s'ensuit que pour trouver I on doit multiplier $\overline{I_i}$ par le nombre des volumes élémentaires contenus dans le volume V, i.e. par $V/\delta_i V$. On trouve ainsi

$$I = \frac{2\pi^2 (n-1)^2 V}{N\lambda^4} \frac{1+\cos^2\theta}{r^2} I_0. \tag{98.19}$$

Si la lumière est polarisée rectilignement, on remplacera le facteur $(1 + \cos^2 \theta)/2$ par $\sin^2 \vartheta$.

La formule (98.19) fut établie, en 1899, par Rayleigh qui cependant ne la justifia pas assez. Rayleigh l'établit en admettant que la diffusion est produite par les molécules distinctes, qui se comportent exactement comme les petites billes qui ont servi à établir la formule (98.14). Pour calculer l'intensité résultante de la lumière diffusée il additionnait les intensités des ondes diffusées par les molécules individuelles, comme si les ondes étaient incohérentes. Rayleigh supposait que l'incohérence résultait des mouvements thermiques des molécules, mais ne tenait pas explicitement compte des fluctuations du nombre de particules contenues dans les volumes diffusants.

En 1907, L. I. Mandelstam nota que si tous les volumes élémentaires $\delta_i V$ (identiques) fixés dans l'espace contenaient le même nombre de molécules, les ondes secondaires qu'ils émetteraient seraient *cohérentes, que les molécules y soient mobiles ou fixes*. Si les intensités des champs de ces ondes s'additionnaient, le résultat en serait leur *extinction interférentielle* dans toutes les directions, à l'exclusion de la direction de l'onde incidente.

L'extinction ne sera pas totale, puisque les nombres des molécules contenues dans les volumes élémentaires *fluctuent* (Smoluchowski le suggéra dès 1908). Par suite de ces fluctuations, les rayonnements émis par les volumes élémentaires comportent une partie cohérente et une partie incohérente. La partie cohérente modifie la vitesse de phase de l'onde incidente (cf. § 68). Les rayonnements non cohérents apparaissent par suite des fluctuations du nombre de particules. La diffusion de la lumière est liée à ces dernières. Ce n'est que grâce à l'existence de la relation aléatoire (97.7) que la formule (98.19) appliquée aux gaz parfaits est la même que celle

que l'on obtiendrait si les molécules diffusaient la lumière de façon incohérente.

7. L'accord entre la formule (98.19) et l'expérience est satisfaisant lorsque les molécules gazeuses présentent une symétrie sphérique, i.e. sont *isotropes*. C'est le cas des molécules des gaz rares. Cette formule reçut sa première confirmation quantitative lors de l'étude de la diffusion de la lumière solaire par l'atmosphère terrestre (bleu du ciel). Après avoir mesuré le coefficient de diffusion on peut calculer, à l'aide de la formule (98.19), le nombre de Loschmidt N, i.e. le nombre de molécules d'air par unité de volume. La valeur de N ainsi calculée est en excellent accord avec les valeurs déterminées par d'autres procédés.

Lorsque les molécules de gaz sont *anisotropes*, comme c'est le cas pour la molécule CO_2, on constate des écarts à la théorie exposée. Si la lumière incidente est polarisée rectilignement, la lumière diffusée ne sera polarisée que partiellement et non pas totalement, comme l'exige la théorie. Cette *dépolarisation de la lumière diffusée* est due justement à l'anisotropie des molécules. Posons que le vecteur électrique $\boldsymbol{E}_0$ de l'onde incidente est parallèle à l'axe X. Si la molécule était isotrope, son moment dipolaire induit $\boldsymbol{p} = \beta \boldsymbol{E}_0$ aurait la même direction. La lumière diffusée par la molécule serait polarisée rectilignement et le plan des vibrations passerait par l'axe du dipôle $\boldsymbol{p}$ et la ligne d'observation. Dans le cas d'une molécule anisotrope, les vecteurs $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{E}$ ne sont pas parallèles et le vecteur $\boldsymbol{p}$ possède des composantes le long des axes Y et Z. Comme l'orientation spatiale de la molécule varie de façon continue et désordonnée du fait de ses mouvements thermiques, les polarisabilités de la molécule le long de X, Y et Z fluctuent également. Les composantes p_y et p_z donnent naissance à des ondes diffusées dont la polarisation est différente de celle de l'onde produite par la composante p_x. C'est ce qui détermine la dépolarisation de la lumière diffusée.

Les fluctuations des orientations spatiales des molécules anisotropes modifient également l'*intensité* de la lumière diffusée, mais nous ne nous arrêterons pas sur cet aspect de la théorie.

8. Considérons maintenant la diffusion moléculaire par les *gaz* et les *liquides non parfaits* se trouvant dans des états assez éloignés de leurs points critiques. Nous partirons de la formule (98.18). La permittivité diélectrique ε est fonction de la densité ρ et de la température T du milieu. Comme sa variation thermique est faible, nous n'en tiendrons pas compte. On aura alors

$$\delta_i \varepsilon = \frac{d\varepsilon}{d\rho} \delta_i \rho,$$

où $\delta_i \rho$ désigne les *fluctuations de la densité* dans le volume $\delta_i V$. En posant $V = \delta_i V$ dans la formule (97.25) on a

$$\delta_i V \overline{(\delta_i \rho)^2} = -\rho^2 \frac{kT}{v\,(\partial P/\partial v)_T},$$

et la formule (98.18) s'écrit maintenant

$$I_i = \frac{\pi^2}{\lambda^4} \frac{1+\cos^2\theta}{2r^2} I_0 \delta_i V \left(\rho \frac{d\varepsilon}{d\rho}\right)^2 \frac{kT}{(-v\,\partial P/\partial v)_T}.$$

Supposons que le volume diffusant V n'est pas petit. Lorsqu'il s'agit de gaz ou de liquides se trouvant dans des états éloignés de leurs points critiques, on peut prendre des volumes élémentaires $\delta_i V$ dont les dimensions linéaires, tout en étant petites devant la longueur d'onde λ, sont grandes par rapport au rayon d'action des forces moléculaires (de l'ordre de 10^{-7} cm). Dans ce cas ces volumes élémentaires diffusent la lumière de façon *incohérente* et on calculera l'intensité résultante de la lumière diffusée par le volume V en multipliant I_i par le nombre de volumes élémentaires, i.e. par $V/\delta_i V$. (Nous admettons que les volumes élémentaires $\delta_i V$ sont égaux, ce qui ne peut affecter le résultat final.) On obtient ainsi

$$I = \frac{\pi^2}{\lambda^4} \frac{1+\cos^2\theta}{2r^2} V I_0 \left(\rho \frac{d\varepsilon}{d\rho}\right)^2 \frac{kT}{(-v\,\partial P/\partial v)_T}. \qquad (98.20)$$

Cette formule fut établie en 1910 par Einstein et elle englobe la formule de Rayleigh (98.19) comme cas particulier.

Lorsqu'on s'approche du *point critique* de la substance étudiée, les fluctuations de la densité deviennent très grandes, puisque la dérivée $\partial P/\partial v$ tend vers zéro. C'est ce qui explique l'*opalescence critique*, i.e. la très forte diffusion de la lumière qu'on observe à proximité d'un point critique. Ce phénomène était connu bien avant que Smoluchowski et Einstein eurent élaboré la théorie des fluctuations et c'est cette théorie qui en expliqua l'origine. Au point critique la formule d'Einstein (98.20) conduit à une valeur infinie de l'intensité de la lumière diffusée, ce qui signifie qu'elle y est en défaut. La raison en est qu'on ne peut plus considérer que les fluctuations de densité dans les volumes élémentaires $\delta_i V$ soient *statistiquement indépendantes* à proximité d'un point critique. Ornstein et Zernike généralisèrent la formule d'Einstein à la diffusion de la lumière près d'un point critique. Comme les dimensions linéaires des inhomogénéités provoquant la diffusion de la lumière n'y sont plus petites devant la longueur d'onde λ, l'intensité de la lumière diffusée cesse d'être proportionnelle à la quatrième puissance de la fréquence et croît *plus lentement* avec celle-ci. En outre la diffusion n'est plus symétrique par rapport à un plan orthogonal aux rayons incidents: *la lumière est diffusée plus fortement en avant qu'en arrière*. On ne peut cependant analyser ici ces questions.

La formule d'Einstein ne tient pas compte de toutes les causes de diffusion de la lumière et notamment elle ne tient pas compte des *fluctuations d'anisotropie* qui se manifestent dans les liquides composés de molécules anisotropes. Si on en tient compte, on trouve que l'intensité de la lumière diffusée s'en trouve accrue de même que

sa dépolarisation. Pour les liquides les calculs théoriques sont moins sûrs que pour les gaz et leur accord avec les données expérimentales est moins bon.

9. La diffusion moléculaire de la lumière peut résulter non seulement des fluctuations de la densité, mais d'autres causes encore. Un exemple instructif est la *diffusion de la lumière par les solutions.* Dans les conditions ordinaires les molécules du soluté sont si intimement mélangées avec les molécules du solvant que la solution se comporte optiquement comme un milieu presque aussi homogène que le solvant pur. Les *fluctuations de la concentration du soluté* au sein du solvant sont une cause possible de diffusion de la lumière. Dans les conditions ordinaires ces fluctuations et la diffusion de la lumière correspondante sont petites. Mais il existe un grand nombre de combinaisons de substances qui, en dessous d'une certaine température T_{cr} dite *température critique de miscibilité*, ne sont que partiellement solubles l'une dans l'autre, et au-dessus de cette température sont miscibles en toutes proportions (cf. t. II, § 123). A la température critique de miscibilité, deux liquides ne sont complètement miscibles qu'en *proportions pondérales bien déterminées.* C'est ainsi qu'à la température critique T_{cr} = 40 °C on obtient un mélange contenant 20 parties en poids de sulfure de carbone et 80 parties d'alcool méthylique. C'est à la température critique de miscibilité qu'on doit s'attendre à des fluctuations de concentration particulièrement importantes, comme dans le cas des fluctuations de densité à proximité du point critique. En effet, à la température critique de miscibilité, on observe une très forte diffusion de la lumière analogue à l'opalescence critique.

10. Un deuxième exemple est la *diffusion de la lumière à la surface de séparation de deux liquides immiscibles ou à la surface libre d'un liquide.* Du fait de l'agitation thermique la surface d'un liquide n'est jamais parfaitement lisse et présente toujours des *irrégularités* sur lesquelles se diffracte la lumière ; il s'y produit donc une *diffusion moléculaire superficielle.* Si la hauteur de ces irrégularités est petite devant la longueur d'onde, comme c'est généralement le cas, l'amplitude de la lumière diffusée varie en raison inverse de la *longueur d'onde* et son intensité en raison inverse du *carré de la longueur d'onde.* Comme la tension superficielle tend à égaliser les rugosités produites par l'agitation thermique, la diffusion moléculaire superficielle est particulièrement forte à l'interface de deux liquides immiscibles ayant des coefficients de tension superficielle peu différents l'un de l'autre.

11. La diffusion moléculaire de la lumière dans les cristaux a été observée de façon certaine par G. S. Landsberg en 1926-1927. La difficulté de ces études résidait, d'une part, en ce que, selon les estimations, l'intensité de la lumière diffusée par des cristaux de bonne qualité ne serait que de 10^{-8} de l'intensité de la lumière inci-

dente. D'autre part, on ne savait pas encore s'il pouvait exister des cristaux où la majeure partie de la lumière diffusée serait composée de la lumière due à la *diffusion moléculaire* et non pas de la lumière parasite due à la diffusion par des défauts tels que les inclusions ou les microfissures. On ne réussit à séparer ces deux processus de diffusion que par étude de la *dépendance de l'intensité de la lumière diffusée avec la température*. L'intensité de la lumière parasite diffusée par les défauts de structure *doit etre indépendante de la température*, tandis que celle de la lumière diffusée par le processus moléculaire *doit augmenter avec la température*. G. S. Landsberg constata que dans les meilleurs cristaux de quartz 25 % seulement de la lumière diffusée étaient indépendants de la température et avaient donc pour origine les inclusions étrangères tandis que la partie restante (75 %) variait avec la température suivant une loi linéaire. Cette plus grande partie de la lumière diffusée a donc pour origine la diffusion moléculaire.

§ 99. Effet Mandelstam-Brillouin

1. Nous avons montré au paragraphe précédent que dans un milieu optiquement inhomogène, de permittivité diélectrique $\varepsilon = \varepsilon_0 + \delta\varepsilon$, le champ électromagnétique pouvait être représenté sous la forme $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{H}'$, où $\boldsymbol{E}_0$, $\boldsymbol{H}_0$ est le champ de l'onde incidente et $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$ le champ de l'onde diffusée. Si le milieu est faiblement inhomogène, l'approximation linéaire peut suffire, ce qui revient à écrire

$$\begin{gathered} \operatorname{rot} \boldsymbol{H}' - \frac{\varepsilon_0}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}'}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\,\delta\boldsymbol{P}, \quad \operatorname{div}(\varepsilon_0 \boldsymbol{E}') = -4\pi \operatorname{div}(\delta\boldsymbol{P}), \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{E}' - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}'}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{H}' = 0, \end{gathered} \tag{99.1}$$

avec

$$\delta\boldsymbol{P} = \frac{\delta\varepsilon}{4\pi}\boldsymbol{E}_0. \tag{99.2}$$

Cela revient à considérer que le milieu est *homogène* de permittivité ε_0. L'influence des inhomogénéités est équivalente à la présence dans le milieu de *sources d'ondes supplémentaires*: chaque volume élémentaire dV du milieu émet un rayonnement supplémentaire comme le ferait un *dipôle de Hertz* de moment dipolaire $\delta\boldsymbol{P}\,dV$. Ce rayonnement supplémentaire est la *lumière diffusée*.

Les équations (99.1) sont *linéaires et homogènes* par rapport à $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$ et par rapport à $\delta\varepsilon$. Il s'ensuit que si on représente $\delta\varepsilon$ sous la forme $\delta\varepsilon = \sum \delta_i \varepsilon$, le rayonnement diffusé sera donné dans l'approximation linéaire par la superposition des champs diffusés par les inhomogénéités $\delta_i\varepsilon$. On peut donc traiter le problème de la diffusion de la lumière incidente en considérant d'abord le cas où le

milieu ne comporte qu'une *seule inhomogénéité* $\delta_i\varepsilon$ d'un type donné. Les inhomogénéités $\delta_i\varepsilon$ dont la superposition définit $\delta\varepsilon$ peuvent être choisies arbitrairement. Considérons d'abord le cas simple où $\delta\varepsilon$ ne comporte qu'un seul terme: $\delta\varepsilon = a \exp(-iKr)$, où a et K sont des constantes. Posons que l'onde incidente est plane et a pour expressions

$$E_0 = Ae^{i(\omega t - kr)}, \quad H_0 = Be^{i(\omega t - kr)},$$

et voyons à quelles longueurs d'onde $\lambda = 2\pi/k$ et suivant quelles directions on observera un rayonnement diffusé.

Divisons le milieu en tranches par des plans équidistants et perpendiculaires au vecteur K (fig. 322). Soit $\Lambda = 2\pi/K$ la distance entre les plans. Selon (99.2) les phases des sources secondaires situées sur ces plans équidistants doivent être les mêmes. Si l'inhomogénéité n'était située que dans la tranche I et au-delà de celle-ci, le milieu était homogène, l'onde incidente serait en partie réfléchie par cette tranche et en partie transmise. Si l'inhomogénéité n'existait que dans la tranche II, on aurait obtenu une autre onde réfléchie, de même amplitude mais de phase différente. Avec l'inhomogénéité présente dans la tranche III on obtiendrait une troisième onde réfléchie, etc. Dans l'approximation linéaire le champ de diffusion du milieu tout entier résulte simplement de la superposition de ces ondes réfléchies. Pour que ces ondes se renforcent mutuellement, il faut que soit vérifiée la *condition de Bragg-Wulff*: $2\Lambda \sin(\theta/2) = m\lambda$, où θ est l'angle de diffusion, i.e. l'angle entre les directions de la lumière incidente et de la lumière diffusée, et m un nombre entier (ordre du spectre de diffraction).

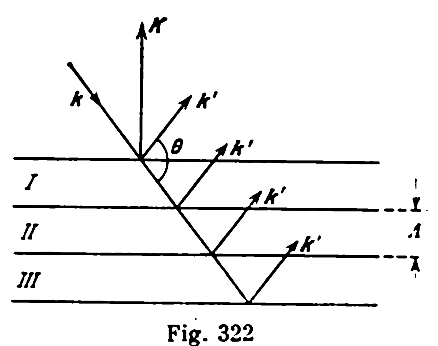


Fig. 322

Démontrons que $m = 1$. En faisant la somme de toutes les ondes planes réfléchies par les différentes tranches du milieu, on obtient une onde de la forme $E' = A'e^{i(\omega t - k'r')}$ dont le vecteur d'onde k' détermine la direction de propagation des ondes réfléchies. D'autre part, la polarisation supplémentaire du milieu est

$$\delta P = \frac{E_0}{4\pi}\,\delta\varepsilon = \frac{aA}{4\pi}\,e^{i[\omega t - (k+K)\,r]}.$$

En portant ces expressions dans la deuxième équation (99.1) et en comparant les exposants, on trouve $k' - k = K$, d'où

$$2\Lambda \sin(\theta/2) = \lambda. \qquad (99.3)$$

Ainsi, dans le cas où l'onde est diffractée par une inhomogénéité sinusoïdale de la permittivité diélectrique, on obtient dans l'approximation linéaire un spectre de diffraction *d'ordre un seulement*.

Selon le théorème de Fourier, toute inhomogénéité du milieu peut être représentée par une *superposition d'inhomogénéités sinusoïdales planes ayant des directions différentes*. Nous avons montré dans ce qui précède que ces inhomogénéités sinusoïdales diffusent la lumière de façon *indépendante*. Si la direction du rayonnement diffusé est donnée, ne sont efficaces que les inhomogénéités sinusoïdales dont le vecteur d'onde $\boldsymbol{K}$ est dirigé suivant la *bissectrice de l'angle supplémentaire* de l'angle θ (fig. 322). Toutes les autres inhomogénéités sinusoïdales ne contribuent pas à la diffusion dans la direction considérée. Ces considérations montrent que le mécanisme de la diffusion par les inhomogénéités de la permittivité diélectrique est parfaitement analogue à celui de la diffusion des rayons X dans les cristaux, conformément à la théorie de Bragg-Wulff (cf. § 61).

2. Jusqu'ici nous n'avons tenu compte que des variations *spatiales* de la fonction $\delta\varepsilon$, sans nous soucier de ses variations *temporelles*. Si on en tient compte, on aboutit à un nouveau phénomène de diffusion de la lumière. Posons, comme on l'a fait au paragraphe précédent, que ε ne dépend que de la densité ρ, ce qui, dans l'approximation linéaire, s'écrit $\Delta\varepsilon = (d\varepsilon/d\rho)\,\Delta\rho$. Toute inhomogénéité de la densité du milieu est une *source d'ondes sonores*. Décomposons $\Delta\rho$ en une intégrale ou une série de Fourier en n'y conservant que les ondes sonores qui interviennent dans la diffusion des ondes le long d'une direction donnée. Leur vecteur d'onde $\boldsymbol{K}$ a été défini plus haut. A cette valeur de $\boldsymbol{K}$ correspond une fréquence acoustique Ω déterminée et deux sens de propagation de l'onde sonore: suivant $\boldsymbol{K}$ et en sens opposé. L'inhomogénéité $\delta\varepsilon$ qui est responsable de la diffusion de la lumière dans la direction considérée est représentée par la somme $\delta\varepsilon = \delta\varepsilon_1 + \delta\varepsilon_2$, où $\delta\varepsilon_1$ et $\delta\varepsilon_2$ se présentent sous forme d'ondes sonores planes:

$$\delta\varepsilon_1 = a_1 e^{i(\Omega t - \boldsymbol{K}\boldsymbol{r})} \text{ et } \delta\varepsilon_2 = a_2 e^{-i(\Omega t + \boldsymbol{K}\boldsymbol{r})}.$$

A ces ondes correspondent les vecteurs de la polarisation supplémentaire du milieu:

$$\delta\boldsymbol{P}_1 = \frac{\boldsymbol{E}_0}{4\pi}\,\delta\varepsilon_1 = \frac{a_1\boldsymbol{A}}{4\pi}\,e^{i[(\omega+\Omega)t - (\boldsymbol{k}+\boldsymbol{K})\boldsymbol{r}]},$$

$$\delta\boldsymbol{P}_2 = \frac{a_2\boldsymbol{A}}{4\pi}\,e^{i[(\omega-\Omega)t - (\boldsymbol{k}+\boldsymbol{K})\boldsymbol{r}]}.$$

Dans ces conditions les sources du rayonnement diffusé et donc le rayonnement diffusé lui-même varient en fonction du temps avec les fréquences $\omega + \Omega$ et $\omega - \Omega$ (modulation de l'onde lumineuse par une onde acoustique). On doit observer dans le spectre du rayon-

nement diffusé un doublet à ces fréquences. C'est le phénomène de la *structure fine de la diffusion de Rayleigh* ou *effet de diffusion de Mandelstam-Brillouin.* Le déplacement de la fréquence est égal à $\Omega = Kv = (2\pi/\Lambda)v$, où v est la vitesse du son et Λ la longueur de l'onde sonore. D'après (99.3)

$$\Omega = \frac{4\pi v}{\lambda} \sin\frac{\theta}{2} = 2\omega n \frac{v}{c} \sin\frac{\theta}{2}, \qquad (99.4)$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide et n l'indice de réfraction du milieu.

On peut interpréter le doublet de Mandelstam-Brillouin comme un *changement de la fréquence de la lumière par effet Doppler*, qui se produit lorsque la lumière se réfléchit sur une onde acoustique. Lorsque l'onde sonore se propage à l'encontre de l'onde lumineuse, la fréquence de celle-ci augmente, et diminue si les deux types d'onde se propagent dans le même sens. Le changement de fréquence par effet Doppler est donné par la formule

$$\frac{\Omega}{\omega} = \frac{2v \sin\theta/2}{c/n},$$

d'où la formule (99.4).

C'est Debye (1884-1966) qui introduisit dans sa théorie de la capacité calorifique du corps solide l'idée que le mouvement thermique pouvait être assimilé à des ondes soniques de différentes fréquences et de différentes directions de propagation. Debye traita ces ondes par les méthodes de la physique statistique. Ce sont les mêmes ondes que celles qui déterminent la diffusion de la lumière avec apparition du doublet de Mandelstam-Brillouin.

3. La structure fine des raies de la diffusion de Rayleigh fut prévue indépendamment par L. I. Mandelstam et L. Brillouin. Selon le témoignage de G. S. Landsberg, L. I. Mandelstam élabora sa théorie dès 1918, mais ne publia ses résultats qu'en 1926, après que Brillouin eut publié, en 1922, les résultats de ses recherches. Mandelstam et Landsberg essayèrent de déceler l'effet expérimentalement dans un cristal de quartz ; ils constatèrent l'existence de l'effet, mais ne purent en faire une étude quantitative, ne disposant pas d'appareils spectraux de pouvoir séparateur adéquat. Mais ces recherches les conduisirent à la découverte de l'effet de la *diffusion combinatoire de la lumière* (cf. § 100) ; l'étude de cet effet étant beaucoup plus intéressante, ils abandonnèrent l'étude de la structure fine de la diffusion Rayleigh, qui fut poursuivie par E. F. Gross (1897-1972) à Léningrad.

Gross mit l'effet en évidence en faisant diffuser la lumière par les *liquides* *), mais constata qu'il apparaît dans les liquides, en plus des

*) Ce résultat était inopiné, puisque selon la théorie hydrodynamique l'absorption du son par les liquides est proportionnelle au carré de la fréquence ω. Si cette théorie était entièrement valable, les ondes sonores de fréquences

deux composantes déplacées, une *composante fixe*. La cause de l'apparition de cette dernière fut expliquée par Landau (1908-1968) et Placzek (1905-1955).

En considérant le volume massique V du liquide comme une fonction de la pression et de l'entropie, on peut écrire

$$\delta V = (\partial V/\partial P)_S\, \delta P + (\partial V/\partial S)_P\, \delta S. \qquad (99.5)$$

Cette expression montre qu'il doit exister deux types de fluctuations du volume massique : les unes étant dues aux *fluctuations de la pression* à entropie constante, les autres aux *fluctuations de l'entropie* à pression constante. Les fluctuations du premier type se propagent sous forme d'*ondes acoustiques* et déterminent l'apparition des *composantes déplacées*. Les inhomogénéités produites par les fluctuations du second type s'égalisent par *conduction thermique* et de ce fait se propagent beaucoup plus lentement et font apparaître la *composante fixe* de la lumière diffusée.

Notons que les processus de diffusion de la lumière par les fluctuations de pression et d'entropie sont *incohérents*. Il s'ensuit que les intensités intégrales de la composante fixe I_ω et des composantes déplacées $I_{\omega-\delta\omega}$ et $I_{\omega+\delta\omega}$ sont liées par la relation

$$\frac{I_\omega}{I_{\omega-\delta\omega}+I_{\omega+\delta\omega}} = -\frac{(\partial V/\partial s)_P^2\,\overline{\Delta s^2}}{(\partial V/\partial P)_s^2\,\overline{\Delta P^2}} = -\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_P^2 \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_s,$$

pour l'établissement de laquelle on a utilisé les formules (97.22) et (97.24) ainsi que la formule $c_P = T\,(\partial s/\partial T)_P$, la lettre minuscule s désignant ici l'entropie massique. Comme la différentielle de l'enthalpie massique $di = T\,ds + V\,dP$ est une différentielle totale, on a $(\partial T/\partial P)_s = (\partial V/\partial s)_P$, et par suite

$$\frac{I_\omega}{I_{\omega-\delta\omega}+I_{\omega+\delta\omega}} = -\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_s \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_s \left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_P \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_P = -\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_s \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P,$$

ou, en vertu de l'identité $(\partial T/\partial V)_s (\partial V/\partial s)_T (\partial s/\partial T)_V = -1$,

$$\frac{I_\omega}{I_{\omega-\delta\omega}+I_{\omega+\delta\omega}} = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial s}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_V = \frac{(\partial V/\partial T)_P\,(\partial s/\partial V)_T}{(\partial s/\partial T)_V}.$$

En considérant l'entropie s comme une fonction de T et V on a

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial s}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P,$$

et le résultat final est

$$\frac{I_\omega}{I_{\omega-\delta\omega}+I_{\omega+\delta\omega}} = \frac{(\partial s/\partial T)_P-(\partial s/\partial T)_V}{(\partial s/\partial T)_V} = \frac{c_P-c_v}{c_v}. \qquad (99.6)$$

C'est la formule établie par Landau et Placzek.

---

optiques ne pourraient se propager dans les liquides. La découverte de la structure fine de la lumière diffusée par les liquides incita L. I. Mandelstam et M. A. Léontovitch (1903-1981) à élaborer une théorie moléculaire de la viscosité des liquides, basée sur les effets de relaxation, et une théorie de l'absorption du son par les liquides.

Dans les solides amorphes il existe des ondes acoustiques *longitudinales* et *transversales*. Comme ces ondes se propagent avec des vitesses différentes, on trouve que dans la lumière diffusée une raie doit se décomposer en *cinq composantes* : une composante fixe et deux couples de raies déplacées dont un couple provient des ondes acoustiques longitudinales et l'autre des ondes transversales.

V. V. Vladimirski (né en 1915) indiqua que dans le cas général, dans les cristaux, chaque raie d'une lumière non polarisée doit se décomposer en 25 *composantes* : une composante fixe et 24 composantes déplacées. En effet, une onde acoustique longitudinale et deux ondes acoustiques transversales peuvent se propager dans un cristal suivant chaque direction. Suivant cette même direction peuvent se propager deux ondes lumineuses polarisées dans des plans rectangulaires et chacune de ces ondes se décompose en deux ondes lors de leurs réflexions sur les ondes acoustiques de sens appropriés. C'est ainsi qu'apparaissent 24 composantes déplacées. Du fait de la faible anisotropie de tous les cristaux étudiés, ces 24 composantes se répartissent en six groupes de 4 raies. Comme les appareils spectraux ne peuvent séparer les quatre raies d'un groupe, on n'observe expérimentalement que *six composantes déplacées*.

4. Depuis l'invention des lasers, on dispose de sources d'impulsions lumineuses tellement puissantes (on dit impulsions gigantesques) que le milieu où elles se propagent s'en trouve affecté. Dans un champ électrique alternatif $\boldsymbol{E}$ se manifeste la pression d'électrostriction

$$\mathcal{P} = \frac{1}{8\pi}\left(\rho\,\frac{d\varepsilon}{d\rho}\right)E^2 \qquad (99.7)$$

(cf. t. III, § 32) La quantité $\rho\, d\varepsilon/d\rho$ est peu différente de l'unité. Dans les champs lumineux faibles auxquels a affaire l'optique linéaire, la pression $\mathcal{P}$ est très petite et on peut négliger son action sur le milieu. Dans le champ d'une impulsion gigantesque de rayonnement laser cette pression peut atteindre plusieurs centaines de milliers d'atmosphères. On doit alors considérer *simultanément* les ondes lumineuses et acoustiques. On se trouve alors en présence d'un système complexe d'*équations non linéaires* d'électrodynamique et d'acoustique qui déterminent l'existence de plusieurs *phénomènes optiques non linéaires*. L'un de ces phénomènes est la *diffusion stimulée de Mandelstam-Brillouin*. Quoique nous n'étudierons les effets non linéaires qu'au chapitre XI, il est opportun d'étudier ici la diffusion stimulée de Mandelstam-Brillouin.

Soient $\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{A}_0 \cos(\omega t - \boldsymbol{kr})$, $\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{A}_1 \cos[(\omega + \Omega)t - \boldsymbol{k'r}]$, $\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{A}_2 \cos[(\omega - \Omega)t - \boldsymbol{k'r}]$, $\boldsymbol{E}_3 = \boldsymbol{A}_3 \cos[\omega t - \boldsymbol{k'r}]$ les intensités du champ électrique de l'onde incidente et des trois ondes diffusées de Mandelstam-Brillouin. Les trois ondes diffusées résultent de l'interaction de l'onde incidente avec les fluctuations thermiques. Au début, les intensités de ces ondes sont petites, mais ultérieure-

ment elles peuvent augmenter par suite des interactions avec l'onde incidente. La pression électrostrictive $\mathcal{P}$ est déterminée par le carré de la somme de tous les champs, i.e. $(E_0 + E_1 + E_2 + E_3)^2$. Représentons à l'aide de formules de trigonométrie les carrés et les produits des cosinus sous forme de sommes de termes constants et des cosinus des sommes et des différences des arguments. Les termes constants ne participent pas à l'excitation d'ondes acoustiques; les termes contenant les cosinus des arguments sommés sont tout aussi inefficaces, car ils représentent les *termes de hautes fréquences* qui varient dans le temps avec les fréquences optiques et on sait que les ondes acoustiques s'amortissent d'autant plus vite que la fréquence est plus élevée. Seuls les *termes de basses fréquences* contenant les cosinus des différences des arguments excitent des ondes acoustiques. Ecrivons tous ces termes en omettant les facteurs numériques et en remarquant que $K = k' - k$ (fig. 322). On obtient

$$A_0A_1 \cos (\Omega t - Kr),\ A_0A_2 \cos (\Omega t + Kr),\ A_0A_3 \cos Kr,$$
$$A_1A_2 \cos 2\Omega t,\ A_1A_2 \cos \Omega t,\ A_2A_3 \cos \Omega t.$$

Seul le premier terme importe et représente l'onde qui se propage dans le même sens et avec la même phase que l'onde acoustique primaire générée par les fluctuations thermiques. Cette onde acoustique ainsi que toutes les ondes lumineuses qu'elle diffuse subissent une *amplification paramétrique* qui se poursuit jusqu'à ce que l'intensité de la lumière diffusée devienne comparable à celle de la lumière incidente. C'est ce que l'on observe expérimentalement. A la différence de la diffusion incohérente par les fluctuations thermiques, la *diffusion stimulée* de *Mandelstam-Brillouin est cohérente.*

PROBLÈME

Lors de l'étude de la diffusion par un cristal de diamant de la lumière émise par la raie de résonance d'une lampe à mercure ($\lambda = 253{,}65$ nm), on observe dans une direction rectangulaire ($\theta = 90°$) par rapport à la lumière incidente deux couples de composantes latérales déplacées de $\delta\lambda = 0{,}052$ nm et de $\delta\lambda = 0{,}032$ nm par rapport à la composante centrale fixe. Calculer les vitesses de propagation des ondes acoustiques longitudinale et transversale dans le cristal de diamant. L'indice de réfraction du diamant est $n = 2{,}42$.

Réponse. $v = \dfrac{c}{2n \sin(\theta/2)} \dfrac{\delta\lambda}{\lambda}$; $v_{\text{long}} = 18\,000$ m/s; $v_{\text{trans}} = 11\,000$ m/s.

Comme la vitesse du son dans le diamant est grande, on arrive à séparer la structure fine de la diffusion Rayleigh même avec un spectrographe à prisme.

§ 100. Diffusion combinatoire

1. Lors d'études spectrales de la diffusion de la lumière dans les cristaux de quartz et de spath d'Islande, Mandelstam et Landsberg constatèrent (février 1928) que chacune des raies spectrales de la lu-

mière incidente était accompagnée d'un ensemble de raies d'autres fréquences qu'on appela *satellites*. Pratiquement en même temps, cet effet fut découvert en Inde par Raman (1888-1970) et Krishnan (1898-1961) au cours d'une étude de la diffusion de la lumière par les liquides. Ces chercheurs observèrent un décalage en fréquence des raies satellites beaucoup plus grand que dans l'effet Mandelstam-Brillouin. Ce phénomène est connu sous le nom de *diffusion combinatoire* ou d'*effet Raman*. (La publication de Raman est antérieure à celle des chercheurs soviétiques.) Examinons les principales lois expérimentales de la diffusion combinatoire.

1) Les fréquences des satellites diffèrent de celle de la raie excitatrice de $\Delta\omega^{j}_{\text{comb}}$, où j est le numéro d'ordre du satellite ; à différents satellites correspondent différents $\Delta\omega_{\text{comb}}$. Lorsqu'on passe d'une raie à une autre du rayonnement primaire, l'ensemble des valeurs de $\Delta\omega^{j}_{\text{comb}}$ reste *le même*. Cet ensemble caractérise la substance étudiée et ne change que si on change de substance. Ce fait est mis à profit pour réaliser des analyses spectrales par la méthode de la diffusion combinatoire de la lumière. On caractérise généralement les fréquences des raies spectrales ainsi que leurs variations par le nombre d'ondes contenues sur une longueur de 1 cm. Nous les noterons ν et $\Delta\nu$ en posant $\nu = 1/\lambda$. Le tableau 11 montre dans quelle mesure la constance de $\Delta\nu$ est respectée aux différentes longueurs d'onde dans la diffusion combinatoire (selon les mesures de G. S. Landsberg).

Tableau 11

Fréquence de la raie fondamentale ν, cm^{-1}	Benzène C_6H_6	Chloroforme $CHCl_3$		Tétrachlorure de carbone CCl_4	
	$\Delta\nu_{\text{rouge}}$	$\Delta\nu_{\text{rouge}}$	$\Delta\nu_{\text{violet}}$	$\Delta\nu_{\text{rouge}}$	$\Delta\nu_{\text{violet}}$
33 692	992,9	—	—	—	—
33 086	991,3	667,7	—	459,7	—
31 985	992,9	667,7	669,3	458,3	459,4
31 923	992,3	667,3	669,5	457,8	460,4
29 917	—	668,1	670,5	458,7	458,8
27 388	991,2	666,6	—	458,4	461,2
27 354	991,3	666,8	669,9	459,4	461,8
27 290	991,1	—	669,8	459,1	461,8
24 705	992,2	669,2	669,5	457,9	459,7
24 515	—	667,5	—	457,8	—
23 034	992,9	667,3	—	—	—
22 994	992,1	670,8	—	457,8	—
22 938	992,3	669,4	667,1	459,6	457,8
Moyenne	992,0	668,0	669,4	458,5	460,2

2) A chaque satellite de fréquence $\omega - \Delta\omega_{comb}$ déplacée vers l'extrémité rouge du spectre correspond un satellite de fréquence $\omega + \Delta\omega_{comb}$ déplacée vers l'extrémité violette du spectre. Les premiers sont appelés *satellites rouges* ou *satellites Stokes* et les seconds *satellites violets* ou *satellites anti-Stokes.*

3) A une température donnée le nombre de satellites différents (nombre d'indices j différents) et leurs intensités relatives dépendent de la nature de la substance diffusante. *Les intensités des satellites violets sont notablement plus petites que celles des satellites rouges correspondants et manifestent une tendance générale à s'affaiblir à mesure que* $\Delta\nu_{comb}$ *augmente.*

4) *Les valeurs constantes de* $\Delta\omega_{comb}$ *correspondant à une substance donnée coïncident avec les fréquences propres* Ω_{infr} *des vibrations infrarouges de la même substance*, quoique à tous les Ω_{infr} connus ne correspondent pas toujours des $\Delta\omega_{comb}$ connus et inversement. En outre, il arrive qu'à une raie intense de diffusion combinatoire correspond une faible raie d'absorption infrarouge et inversement.

5) Les raies de la diffusion combinatoire de la lumière sont plus ou moins *polarisées.* Les degrés de polarisation des différents satellites d'une seule et même raie sont différents et ne sont nullement corrélés à la polarisation de la raie fondamentale de la lumière diffusée. La polarisation des satellites rouges et violets correspondant à une valeur donnée de $\Delta\omega_{comb}$ est *toujours la même et ne dépend pas de la fréquence de la raie fondamentale.*

2. Mandelstam et Landsberg expliquèrent le phénomène de diffusion combinatoire aussitôt après l'avoir découvert. Les électrons de la molécule commencent à vibrer dès qu'ils sont soumis à l'action du champ $\boldsymbol{E}$ de l'onde lumineuse et la molécule acquiert de ce fait un moment dipolaire induit $\boldsymbol{p} = \beta\boldsymbol{E}$. Au point de vue classique le tenseur de polarisabilité β de la molécule est déterminé par les positions instantanées des noyaux atomiques de la molécule. Or comme les noyaux ne sont jamais au repos et exécutent des mouvements thermiques désordonnés, la polarisabilité β n'est pas constante et varie dans le temps. On peut la représenter par une superposition de vibrations harmoniques dont les fréquences sont déterminées par les vibrations des noyaux atomiques, i.e. coïncident avec les fréquences propres des vibrations infrarouges de la molécule. Ainsi apparaît une *modulation des vibrations* des moments dipolaires induits $\boldsymbol{p}$. Si le champ électrique extérieur $\boldsymbol{E}$ varie dans le temps, suivant une loi harmonique, avec la fréquence ω, les vibrations du moment dipolaire $\boldsymbol{p}$ comportent des fréquences combinatoires $\omega \pm \Omega_{infr}$. Les mêmes fréquences combinatoires se manifestent dans le rayonnement émis par ces moments dipolaires, i.e. dans la lumière diffusée.

Telle est l'origine du phénomène selon les conceptions classiques.

Ces considérations se laissent facilement présenter sous forme mathématique. Si s est le nombre de noyaux contenus dans la molé-

cule, ces noyaux possèdent $3s$ degrés de liberté dont trois sont *de translation* et trois *de rotation*. Les $f = 3s - 6$ degrés de liberté restants concernent les *mouvements internes des noyaux dans la molécule*. Pour décrire ces mouvements internes il faut disposer de f coordonnées $q_1, q_2, \ldots, q_f$ que l'on peut choisir arbitrairement. Il est commode d'utiliser les *coordonnées généralisées normales*.

Lorsque les noyaux occupent des positions d'équilibre, toutes les coordonnées sont nulles et lorsque les écarts par rapport aux positions d'équilibre sont petits, lors des mouvements thermiques chacune des coordonnées q_m exécute des vibrations harmoniques libres $q_m = a_m \cos(\Omega_m t + \delta_m)$ avec une fréquence infrarouge Ω_m et une phase δ_m qui varie de façon parfaitement désordonnée. Les vibrations étant petites, le tenseur de polarisabilité β peut être développé en série en ne gardant que les termes de puissances un en q. Si on admet, pour simplifier, que β est un scalaire, on obtient

$$\beta = \beta_0 + \sum \left(\frac{\partial\beta}{\partial q_m}\right) q_m,$$

et après substitution des valeurs de q_m

$$\beta = \beta_0 + \sum \left(\frac{\partial\beta}{\partial q_m}\right) a_m \cos(\Omega_m t + \delta_m) =$$
$$= \beta_0 + \frac{1}{2} \sum \left(\frac{\partial\beta}{\partial q_m}\right) a_m e^{i(\Omega_m t + \delta_m)} + \frac{1}{2} \sum \left(\frac{\partial\beta}{\partial q_m}\right) a_m e^{-i(\Omega_m t + \delta_m)}.$$

En écrivant l'onde incidente sous la forme complexe $E = E_0 e^{i\omega t}$, on a

$$p = \beta_0 E_0 e^{i\omega t} + \frac{E_0}{2} \sum \left(\frac{\partial\beta}{\partial q_m}\right) a_m e^{i[(\omega+\Omega_m)t+\delta_m]} +$$
$$+ \frac{E_0}{2} \sum \left(\frac{\partial\beta}{\partial q_m}\right) a_m e^{i[(\omega-\Omega_m)t-\delta_m]}.$$

Cette expression montre que le rayonnement diffusé contient, en plus de la lumière de *fréquence initiale* ω, une lumière de *fréquences combinées* $\omega \pm \Omega_m$. Il est évident que les ondes qui sont diffusées par différentes molécules sont *incohérentes*, puisque l'excitation thermique des vibrations des noyaux entraîne que les phases δ_m varient de façon désordonnée, que l'on considère différentes molécules ou les vibrations d'une même molécule à des instants différents.

3. La théorie classique de la diffusion combinatoire ne peut être suffisante, comme d'ailleurs de tout autre phénomène concernant l'émission ou l'absorption de la lumière. Les succès de cette théorie résultent de ce que, les masses des noyaux atomiques étant *relativement grandes*, les équations de la mécanique classique expriment correctement certaines caractéristiques des vibrations. Mais la théorie classique n'explique pas toutes les particularités de la diffusion combinatoire de la lumière ; elle ne peut, par exemple, expliquer les

rapports observés entre les intensités des satellites rouges et violets correspondants. Selon la théorie classique, ces intensités doivent être *pratiquement égales*, tandis que les données expérimentales montrent que *l'intensité des satellites rouges est toujours plus grande que celle des satellites violets correspondants.*

La théorie quantique explique facilement ce résultat. Selon la mécanique quantique les niveaux d'énergie de la molécule forment une *série discrète* $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \ldots$ La diffusion d'un photon par la molécule est analogue au processus du choc du photon avec une molécule, processus qui doit vérifier la *loi de la conservation de l'énergie.* Lors de ce processus le photon peut transmettre une partie de son énergie à la molécule ou au contraire recevoir de l'énergie d'une molécule excitée. Conformément à la relation $\mathcal{E}_{\text{phot}} = \hbar\omega$, la variation de l'énergie du photon se manifeste par une *variation de sa fréquence.* Soit un photon d'énergie $\hbar\omega$ qui est diffusé par une molécule d'énergie $\mathcal{E}_n$. Après diffusion l'énergie du photon est $\hbar\omega'$ et celle de la molécule est $\mathcal{E}_m$. La loi de la conservation de l'énergie implique que $\hbar\omega + \mathcal{E}_n = \hbar\omega' + \mathcal{E}_m$, d'où

$$\omega' = \omega + \Omega_{nm}, \tag{100.1}$$

avec

$$\Omega_{nm} = (\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_m)/\hbar. \tag{100.2}$$

Si $\mathcal{E}_n > \mathcal{E}_m$ la fréquence du photon diffusé est plus grande que celle du photon incident, i.e. la lumière diffusée comporte un *satellite violet*; si $\mathcal{E}_n < \mathcal{E}_m$ un *satellite rouge* apparaît dans la lumière diffusée.

Posons $\mathcal{E}_n < \mathcal{E}_m$. Le satellite rouge apparaît lorsque $\mathcal{E}_n$ est le niveau initial de la molécule, mais lorsque ce niveau initial est $\mathcal{E}_m$ c'est le satellite violet qui apparaît dans la lumière diffusée. Le rapport des intensités des satellites est $I_r/I_{\text{viol}} = N_n/N_m$, où N_n est le nombre de molécules occupant le niveau $\mathcal{E}_n$ et N_m est le nombre de molécules occupant le niveau $\mathcal{E}_m$. Selon la formule de Boltzmann, on aura à l'équilibre thermique

$$\frac{N_n}{N_m} = \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_m}{kT}\right) = \exp\frac{\hbar\,|\Omega_{nm}|}{kT},$$

et par suite

$$\frac{I_r}{I_{\text{viol}}} = \exp\frac{\hbar\,|\Omega_{nm}|}{kT}. \tag{100.3}$$

Cette formule explique le rapport des intensités que l'on observe expérimentalement.

4. Dans les impulsions puissantes de rayonnement laser, on observe un effet non linéaire appelé *diffusion combinatoire stimulée de la lumière.* Cet effet est dû à une *action en retour de l'onde lumineuse sur les molécules du milieu.* Dans un champ électrique E non uniforme,

une molécule de moment dipolaire $\boldsymbol{p}$ est soumise à la force $\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{p}\nabla)\boldsymbol{E}$. Les forces de ce type exercent une action sur les *parties constitutives d'une molécule*, puisque toute partie électriquement neutre d'une molécule, composée par exemple d'un noyau et d'un électron, possède un moment dipolaire. Comme les moments dipolaires induits $\boldsymbol{p}$ sont proportionnels au champ $\boldsymbol{E}$, toutes ces forces sont proportionnelles *au carré* du champ $\boldsymbol{E}$. Le champ $\boldsymbol{E}$ se compose du champ $\boldsymbol{E}_0$ de l'onde incidente et du champ $\boldsymbol{E}'$ des ondes diffusées. Au début le champ $\boldsymbol{E}'$ est faible, puisqu'il a pour origine les fluctuations thermiques du milieu. Mais par la suite il peut se renforcer par interactions avec l'onde incidente. Parmi les forces composantes

$$[(\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}')\nabla](\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}')$$

il existe des termes où figure le produit des champs $\boldsymbol{E}_0$ et $\boldsymbol{E}'$ dont les fréquences coïncident avec les fréquences correspondantes des vibrations infrarouges de la molécule. Ces termes déterminent une *amplification par résonance* de ces vibrations infrarouges, ce qui entraîne un accroissement de l'intensité des raies correspondantes de la diffusion combinatoire. Les vibrations stimulées des noyaux atomiques de la molécule sont en phase avec l'onde incidente, et c'est pour cela que *la diffusion combinatoire stimulée est cohérente avec l'onde incidente*, ce qui la distingue de la diffusion combinatoire ordinaire qui est d'origine thermique.

CHAPITRE IX

THÉORIE DE LA RELATIVITÉ

§ 101. Le principe de la relativité dans la mécanique newtonienne et dans la mécanique relativiste

1. *La théorie de la relativité est une théorie physique fondamentale dont les lois s'imposent à toute la Physique.* La Relativité s'est constituée au début du XXe siècle pour surmonter les difficultés de principe auxquelles étaient confrontées l'électrodynamique et l'optique des corps en mouvement. Toutes les tentatives entreprises pour surmonter ces difficultés sur la base de l'éther universel ont été vaines et la théorie de la relativité élimina cette hypothèse. La théorie de la relativité repose non pas sur des hypothèses, mais sur des *principes* ou des *postulats* fondés sur les données expérimentales. C'est ce qui fait sa force et explique ses succès. La naissance et l'essor de la théorie de la relativité ne seront qu'esquissés, car il s'agit surtout de bien mettre en évidence les questions de principe et d'approfondir la signification des postulats et du contenu de la théorie.

La théorie de la relativité est l'œuvre d'Albert Einstein. Il l'exposa en 1905 dans un mémoire fondamental intitulé : « De l'électrodynamique des corps en mouvement ». Plusieurs résultats exposés dans ce mémoire avaient été antérieurement établis par Larmor (1857-1942), Lorentz et Poincaré (1854-1912). Mais Larmor et Lorentz étaient partisans, par principe, du concept d'éther universel fixe auquel était attaché le système de référence qui avait leur préférence. Poincaré qui, dès 1898, fit la critique de la notion de simultanéité d'événements spatialement séparés, critique qui fut reprise par Einstein, s'approcha le plus de la Relativité. C'est encore lui qui combla les lacunes mathématiques et corrigea les erreurs dans les travaux de Lorentz. Mais c'est dans le mémoire cité d'Einstein qu'on trouve une conception physique nouvelle de tout le problème et une construction conséquente de la théorie de la Relativité.

2. Commençons par une révision de ce qui a été dit dans le tome I au sujet du principe de relativité en mécanique newtonienne. La loi fondamentale de la mécanique de Newton s'exprime par l'équation

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}, \qquad (101.1)$$

où $\boldsymbol{F}$ est la force qui s'exerce sur un point matériel et $\boldsymbol{r}$ le rayon vecteur qui définit sa position par rapport à un référentiel d'inertie. Considérons deux référentiels d'inertie, l'un *fixe* (ou *non accentué*) que l'on désignera par S et l'autre *mobile* (ou *accentué*) que l'on désignera pas S'. Posons que le référentiel S' est animé par rapport au référentiel S d'un mouvement rectiligne et uniforme avec la vitesse $\boldsymbol{V}$. Si $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{r}'$ sont les rayons vecteurs définissant à un instant t les positions du point matériel mobile par rapport à ces deux référentiels, ces rayons vecteurs sont liés par la *transformation de Galilée*

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{V}t. \tag{101.2}$$

La mécanique de Newton admet que le temps t est *absolu*, i.e. qu'il est le même dans tous les référentiels. Pour simplifier on repère le temps à partir de l'instant où les origines des coordonnées de S et S' sont confondues. Ce procédé de repérage du temps n'affecte pas la généralité des raisonnements.

En dérivant la relation (101.2) deux fois de suite par rapport au temps on obtient les *formules de transformation des vitesses et des accélérations*:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{V}, \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'. \tag{101.3}$$

L'accélération est invariante par rapport à la transformation de Galilée, i.e. est la même dans les deux référentiels S et S'. Les rayons vecteurs $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{r}'$ ainsi que les vitesses $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{v}'$ sont différents, mais *les différences des rayons vecteurs et des vitesses de deux points matériels quelconques sont les mêmes*, puisqu'elles caractérisent les *positions relatives* et la *vitesse* d'un point par rapport à l'autre. En mécanique newtonienne la force $\boldsymbol{F}$ ne dépend que des *différences des rayons vecteurs et des vitesses* des points matériels interagissants. C'est pour cela que la force $\boldsymbol{F}$ et l'équation de Newton (101.1) ne changent pas lors de la transformation de Galilée. Il en est de même pour les équations différentielles de mouvement des systèmes de points matériels en mécanique de Newton. On arrive ainsi au résultat suivant:

Les équations de la mécanique de Newton, qui déterminent les variations de l'état de mouvement des systèmes mécaniques, sont invariantes vis-à-vis d'une transformation de Galilée.

Cette proposition est appelée *principe de relativité galiléen* que l'on peut énoncer aussi de la façon suivante:

Les lois de la Nature qui déterminent les variations de l'état de mouvement des systèmes mécaniques sont les mêmes dans deux référentiels d'inertie dotés d'un mouvement rectiligne et uniforme l'un par rapport à l'autre.

Pour la physique prérelativiste les deux énoncés étaient équivalents, puisqu'elle n'admettait aucune autre transformation de $\boldsymbol{r}$ et t que celle de Galilée lors d'une translation relative uniforme des référentiels d'inertie. En réalité, le deuxième énoncé possède une *géné-*

ralité plus grande, puisqu'il ne précise pas par rapport à quelle transformation des coordonnées et du temps les équations de la mécanique sont invariantes. Dans ce qui suit, sauf indication spéciale, c'est le *second énoncé* du principe de la relativité que nous utiliserons.

3. Le principe de la relativité n'affirme nullement qu'un seul et même phénomène physique se présente de la même façon dans différents référentiels d'inertie. En effet, le mouvement du système n'est pas défini uniquement par les équations différentielles de la mécanique, car il faut leur adjoindre les *conditions initiales* en indiquant, par exemple, les coordonnées et les vitesses de toutes les particules en interaction mutuelle à un instant donné. Or ces conditions initiales changent lorsqu'on passe d'un référentiel à un autre. C'est précisément par suite de la différence des conditions initiales que le mouvement d'un objet tombant du filet à bagages d'un wagon en mouvement uniforme s'effectue suivant une trajectoire verticale si on l'observe par rapport au wagon en mouvement, et suivant une trajectoire parabolique si on le rapporte à la voie de chemin de fer. C'est pour cette raison que dans l'énoncé du principe de relativité il est question non pas de l'identité des phénomènes, mais de l'*identité des lois* qui déterminent la variation de l'état de mouvement des systèmes mécaniques.

On peut illustrer la signification du principe de relativité par un autre exemple. Prenons un système fermé A de corps et indiquons leurs positions et vitesses initiales par rapport à un référentiel d'inertie S. Soit un autre système fermé de corps A' identique au premier, dans lequel les conditions initiales sont exactement les mêmes que dans le système A, mais rapportées à un autre référentiel d'inertie S'. Le mouvement des corps du système A par rapport au référentiel S est alors identique à celui des corps du système A' par rapport au référentiel S'. C'est en cela que consiste l'*équivalence* des référentiels d'inertie qu'impose le principe de la relativité.

En principe, tous les corps de l'Univers sont en interactions mutuelles. Si on ne définissait pas de systèmes fermés, il ne subsisterait, en toute rigueur, qu'un seul système fermé s'étendant à tout l'Univers. Mais alors le principe de la relativité tel qu'il apparaît dans l'exemple qui vient d'être donné serait dénué de sens puisqu'il n'existe qu'un seul Univers. Le principe de la relativité n'a de sens que parce qu'il est possible de négliger un grand nombre d'interactions faibles et de définir ainsi un nombre pratiquement infini de systèmes finis de corps dont chacun se comporte en approximation comme un système *fermé*. Suivant la nature de la question étudiée et la précision imposée, un tel système satisfait plus ou moins complètement à la définition donnée du système fermé. Il faut se demander si l'éloignement de toutes les masses ne faisant pas partie du système considéré est une condition suffisante pour le considérer comme fermé. Conformément à l'expérience, la réponse est

la suivante : dans le cas d'un *mouvement rectiligne et uniforme* (par rapport à un référentiel d'inertie) cette condition est *suffisante*, mais elle est *insuffisante* pour tous les autres mouvements.

4. Il est impossible de diviser tous les phénomènes naturels en phénomènes purement « mécaniques » et en phénomènes purement « non mécaniques ». Mais même si on pouvait réaliser cette distinction, le principe de la relativité ne pourrait s'appliquer aux seuls phénomènes « mécaniques », puisque ceux-ci sont tous liés à une multitude de phénomènes « physiques » et en dépendent. Si le principe de la relativité ne s'appliquait pas aux phénomènes « physiques », il ne saurait être vérifié pour des phénomènes « purement mécaniques ». Il est donc nécessaire d'étendre le principe de la relativité à tous les *phénomènes naturels* et l'énoncer comme suit :

Les lois de la Nature qui déterminent les variations de l'état des systèmes physiques sont les mêmes dans deux référentiels d'inertie en mouvement de translation uniforme l'un par rapport à l'autre.

Cet énoncé constitue le *principe de la relativité restreinte d'Einstein* et n'établit que l'équivalence des *référentiels d'inertie*. C'est en se fondant sur ce principe qu'Einstein élabora, en 1905, la *théorie de la relativité restreinte*. Dix ans plus tard il généralisa le principe de la relativité aux *référentiels non inertiels* et élabora la *théorie de la relativité générale* ou *théorie relativiste de la gravitation*. L'importance de cette *théorie fondamentale* devint particulièrement grande à la suite des récents progrès de l'Astrophysique. Cette théorie est devenue la *théorie fondamentale* de l'Astrophysique et de la Cosmologie. Nous n'exposerons dans ce qui suit que la théorie de la relativité restreinte.

§ 102. Expérience de Michelson

1. Les équations fondamentales de l'électrodynamique, celles de Maxwell et Lorentz, *ne sont pas invariantes par rapport à la transformation de Galilée*. La vitesse de la lumière dans le vide, calculée à partir de ces équations, est en effet constante et égale à c. Ce résultat serait vérifié dans tous les référentiels d'inertie si les équations de Maxwell y avaient la même forme. Or cela est incompatible avec la loi de composition des vitesses (101.3) qui résulte de la transformation de Galilée.

Les physiciens de la fin du XIXe et du début du XXe siècle estimaient que la non-invariance des équations de Maxwell vis-à-vis de la transformation de Galilée ne contredisait pas le principe de la relativité. Ce point de vue était la conséquence de ce que, selon les conceptions admises à l'époque, à tous les phénomènes de l'électrodynamique participe, en plus des substances ordinaires, l'*éther universel*. Les équations de Maxwell ne prenaient leur forme ordinaire que dans les référentiels par rapport auxquels l'éther était au repos.

Ce référentiel était privilégié, puisque dans tous les autres on devait observer un déplacement de l'éther (*vent d'éther*). On considérait à l'époque que la mise en évidence du vent d'éther était l'un des problèmes cruciaux de la Physique. Or le résultat des expériences infirma complètement l'hypothèse de l'éther et donc l'éventualité de son mouvement. Les expériences qui étaient destinées à rendre manifeste le vent d'éther présentent cependant un certain intérêt en ce que, tout en rejetant le concept d'éther universel, elles permettent de poser la question de l'existence d'un *référentiel d'inertie privilégié.* Les expériences réalisées pour déceler le vent d'éther fournissent une réponse à la question de l'existence d'un référentiel d'inertie privilégié.

2. Si on admet l'hypothèse de l'existence d'un référentiel privilégié, la première question qui se pose est celle du mouvement de la Terre par rapport à ce référentiel. Notons V la vitesse de ce mouvement de la Terre. Selon la cinématique prérelativiste, dans le sens du vecteur V la vitesse de la lumière par rapport à la Terre serait égale à $c - V$ et dans le sens opposé elle serait égale à $c + V$, où c désigne la vitesse de la lumière par rapport au référentiel privilégié.

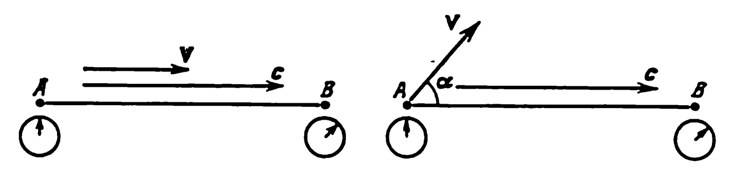


Fig. 323

Ce résultat peut être vérifié par l'expérience. On pourrait, semble-t-il, utiliser pour cela deux horloges synchrones installées sur la Terre en des points A et B différents se trouvant à une distance $l = AB$ l'une de l'autre (fig. 323). Si la droite AB est orientée suivant le vecteur V, le temps que mettrait la lumière pour parcourir cette distance AB serait égal à $t_{AB} = l/(c - V)$, et à $t_{BA} = l/(c + V)$ pour la parcourir en sens inverse. La différence de ces temps de parcours serait, au premier ordre d'approximation en V/c, égale à $t_{AB} - t_{BA} \approx 2 \frac{l}{c} \frac{V}{c}$. Si la droite AB fait un angle α avec la direction de la vitesse V, cette différence serait égale à

$$t_{AB} - t_{BA} \approx 2 \frac{l}{c} \frac{V}{c} \cos \alpha.$$

On détermine le temps t_{AB} en notant les indications des horloges aux instants où la lumière arrive en B et où elle est émise en A. Le même procédé fournit le temps t_{BA}.

Maintes suggestions ont été faites pour réaliser l'expérience, mais elles ne différaient pas en principe du schéma expérimental qui vient d'être décrit. Toutes les suggestions de ce type furent abandonnées après que Michelson fit la remarque suivante. Les temps t_{AB} et t_{BA} sont mesurés au moyen de *deux horloges* situées en des points différents de l'espace. Pour que la mesure soit correcte, il est nécessaire de *synchroniser* les horloges, chose pratiquement irréalisable avec la précision nécessaire. (Einstein fit remarquer plus tard que c'est là une difficulté *de principe* et non seulement pratique, voir § 104.) Il faut donc réaliser l'expérience sans avoir à synchroniser

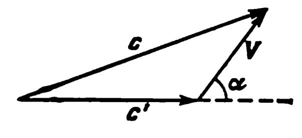


Fig. 324

les horloges, c'est-à-dire à l'aide d'une *seule horloge*. On y arrive en envoyant du point A où se trouve l'horloge un signal lumineux que l'on réfléchit dans un miroir placé en B pour le faire revenir en A. Le temps de propagation aller et retour t le long de la droite AB peut être repéré au moyen d'une seule horloge. En divisant le double de la longueur AB par le temps mesuré, on trouve la vitesse de la lumière c. Mais on obtient ainsi la *vitesse moyenne de propagation dans deux sens diamétralement opposés* et non pas la vitesse de propagation dans un sens donné, suivant une certaine direction. Michelson étudia la dépendance du temps de propagation total t avec la direction de propagation AB.

Selon la figure 324, $c^2 = c'^2 + V^2 + 2Vc' \cos \alpha$, où c et V sont la vitesse de la lumière et la vitesse de la Terre par rapport au référentiel privilégié, c' est la vitesse de la lumière par rapport à la Terre et α l'angle entre les vitesses V et c'. En résolvant cette équation quadratique par rapport à c' on trouve

$$c' = -V \cos \alpha + c\sqrt{1-\beta^2 \sin^2 \alpha},$$

où on a utilisé la notation $\beta = V/c$. En ne gardant que les carrés de β on obtient

$$c' = c\left(1 - \beta \cos \alpha - \frac{1}{2}\beta^2 \sin^2 \alpha\right).$$

3. Michelson utilisa pour ses mesures l'interféromètre qu'il avait construit et qui a été décrit au § 35 (fig. 140). Il y introduisit la lame P_2 pour égaliser les longueurs optiques des deux bras de l'appareil et rendre ainsi réalisables les interférences en lumière blanche. Tant qu'il s'agira d'une discussion de principe, on négligera la lame P_2 et on posera que la lame P_1 est infiniment mince. Supposons que

le bras *2* de l'interféromètre fasse un angle α avec la direction de la vitesse V. Pour faire le parcours aller et retour entre le point A et le miroir M_2 la lumière mettra un temps

$$t_2 = \frac{l}{c}\frac{1}{1-\beta\cos\alpha-\frac{1}{2}\beta^2\sin^2\alpha}+\frac{l}{c}\frac{1}{1+\beta\cos\alpha-\frac{1}{2}\beta^2\sin^2\alpha}=$$

$$=\frac{2l}{c}\frac{1-\frac{1}{2}\beta^2\sin^2\alpha}{\left(1-\frac{1}{2}\beta^2\sin^2\alpha\right)^2-\beta^2\cos^2\alpha}\approx\frac{2l}{c}\frac{1-\frac{1}{2}\beta^2\sin^2\alpha}{1-\beta^2}.$$

Calculons le temps t_1 que mettra la lumière pour faire le trajet aller et retour suivant le bras de l'interféromètre perpendiculaire au bras *2*. Il suffit pour cela de remplacer dans l'expression précédente l'angle α par l'angle $\alpha\pm\frac{\pi}{2}$, ce qui donne

$$t_1=\frac{2l}{c}\frac{1-\frac{1}{2}\beta^2\cos^2\alpha}{1-\beta^2}.$$

Ainsi

$$t_2-t_1=\frac{l}{c}\frac{\beta^2}{1-\beta^2}\cos 2\alpha\approx\frac{l}{c}\beta^2\cos 2\alpha.$$

A cette différence de temps correspond une différence de phase des rayons interférents égale à

$$\varphi_2-\varphi_1=\frac{2\pi c}{\lambda}(t_2-t_1)=\frac{2\pi l}{\lambda}\beta^2\cos 2\alpha.$$

Si on tourne l'interféromètre, l'angle α varie et les franges d'interférences doivent se déplacer. C'est cet effet que Michelson chercha à mettre en évidence.

Si on prend l'interfrange pour unité de mesure, le déplacement des franges correspondant à une rotation de l'interféromètre sera égal à

$$\Delta N=\frac{\Delta(\varphi_2-\varphi_1)}{2\pi}=\frac{l}{\lambda}\beta^2\Delta(\cos 2\alpha). \qquad (102.1)$$

Le déplacement maximal

$$\Delta N_{max}=\frac{2l}{\lambda}\beta^2 \qquad (102.2)$$

correspond à une rotation de l'interféromètre pour laquelle $\cos 2\alpha$ varie entre ±1 et ∓1. Ce déplacement est petit puisqu'il est du *second ordre* en $\beta\equiv V/c$ et on ne peut l'évaluer puisqu'on ne connaît pas la vitesse de la Terre par rapport au référentiel privilégié. Mais on peut évaluer la limite inférieure de ΔN_{max}. Supposons d'abord que le Soleil soit au repos par rapport au référentiel privilégié. V désignera alors la vitesse de la Terre sur son orbite qui est égale

à 30 km/s environ de sorte que $\beta = 10^{-4}$, $\beta^2 = 10^{-8}$. Dans la première expérience de Michelson (1881) la longueur du bras de l'interféromètre était $l = 1{,}2$ m; avec $\lambda = 600$ nm, on trouve $\Delta N_{max} = 0{,}04$ interfrange.

Si on tient compte du mouvement du Soleil on peut s'attendre à un déplacement plus important des franges. Décomposons la vitesse de déplacement du Soleil en une composante $V_{\parallel}$ située dans le plan de l'orbite terrestre et une composante $V_{\perp}$ perpendiculaire à ce plan. La vitesse totale de la Terre est alors égale à $V = V_{orb} + V_{\parallel} + V_{\perp}$, où V_{orb} est la vitesse orbitale de la Terre. Si l'expérience est réalisée à l'instant où les directions des vitesses V_{orb} et $V_{\parallel}$ sont confondues, la vitesse totale de la Terre sera donnée par

$$V^2 = (V_{orb} + V_{\parallel})^2 + V_{\perp}^2,$$

de sorte que V sera plus grand que V_{orb} et le déplacement des franges sera plus grand que celui calculé plus haut.

Le déplacement minimal calculé de 0,04 interfrange ne devrait s'observer que deux fois par an lorsque la direction du vent d'éther est de même sens ou de sens opposé au déplacement de la Terre. Il est par conséquent nécessaire de poursuivre les observations pendant *six mois* au minimum. C'est ce que faisaient Michelson et tous les autres physiciens qui répétèrent ses expériences.

L'expérience a été réalisée avec une telle précision qu'on pouvait déceler un déplacement égal à 0,01 interfrange, de sorte que le déplacement escompté de 0,04 interfrange pouvait être sûrement décelé malgré toutes les sources d'erreur fortuites. Mais on n'observa aucun déplacement ou plus exactement le résultat obtenu permettait d'affirmer que la vitesse du vent d'éther, s'il existait, ne saurait être supérieure à 18 km/s.

4. En 1887, Michelson et Morley (1837-1923) recommencèrent les expériences. Afin que la rotation de l'interféromètre ne produise pas de déformations qui provoquent un petit déplacement des franges, l'appareil et tous les accessoires étaient disposés sur une plaque massive de ciment qui flottait à la surface du mercure contenu dans un bassin. En outre, l'appareil était constamment en rotation, même lors des mesures. En faisant réfléchir le rayon lumineux successivement sur 16 miroirs montés sur la même plaque de ciment, la longueur effective du bras de l'interféromètre a été portée à 11 m. Le déplacement calculé des franges dû au mouvement orbital de la Terre était maintenant égal à 0,4 interfrange. Le déplacement maximal que l'on pouvait observer (compte tenu des erreurs expérimentales) était égal à 0,02 et le déplacement moyen des franges était égal à 0,01 interfrange. L'expérience a permis d'affirmer que la vitesse du vent d'éther était assurément inférieure à 7 km/s. Michelson en arriva à conclure que le résultat de ces expériences était négatif, autrement dit que l'effet était nul: *il n'y a pas de vent d'éther.*

16—0791

L'expérience de Michelson fut reprise maintes fois par d'autres physiciens qui affinaient toujours l'expérience. Dans les années trente du XXe siècle, on arriva à la conclusion que si le vent d'éther existait, il devait avoir une vitesse inférieure à 1-1,5 km/s.

5. La mise en œuvre des lasers émettant une lumière hautement monochromatique et spatialement cohérente permit de simplifier grandement le schéma de l'expérience de Michelson et d'en accroître la précision. L'expérience fut réalisée en 1964 par les physiciens américains Jaseja, Javan, Murrey et Townes. Le principe en est le suivant.

Au cas où la vitesse de la lumière dépendrait de la direction de sa propagation par rapport à la Terre, la fréquence du rayonnement émis par le laser devrait se modifier si on faisait tourner celui-ci. La variation de la fréquence serait proportionnelle à β^2. On disposa deux lasers à hélium-néon en positions rectangulaires sur une plate-forme tournante (fig. 325). Le pinceau de lumière envoyé par un des lasers traversait une glace semi-transparente S, tandis que le pinceau envoyé par le second laser était réfléchi par cette même glace S. Après cela les deux pinceaux se propageaient dans le même sens et tombaient sur un multiplicateur photoélectrique qui était installé sur la plate-forme tournante. Si les fréquences de ces pinceaux étaient légèrement différentes, on aurait observé des battements du courant photoélectrique de fréquence se trouvant dans la gamme des fréquences radioélectriques, qui pourraient être décelés par un analyseur A par les procédés radioélectriques connus. La fréquence des battements devrait varier lors de la rotation de l'appareil. Si dans la position initiale l'un des lasers était dirigé suivant la direction de translation de la Terre et l'autre suivant une direction rectangulaire, on devrait observer, conformément à la théorie de l'éther fixe, une variation de la différence des fréquences des lasers égale à 3 MHz environ, due au mouvement orbital de la Terre, l'erreur expérimentale ne dépassant pas quelques hertz. Le résultat fut nul et on en conclut que la vitesse du vent d'éther, si celui-ci existait réellement, ne saurait être supérieure à 30 m/s. Par rapport aux expériences antérieures, la précision des mesures a été accrue de 50 fois environ.

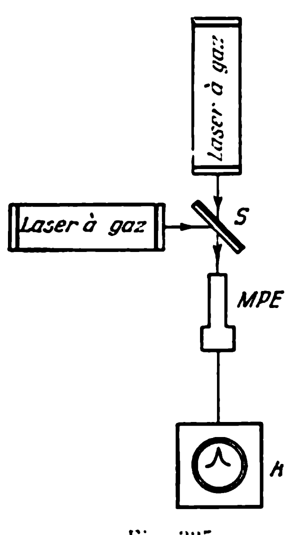


Fig. 325

6. Le résultat négatif de l'expérience de Michelson démontre que dans le référentiel terrestre la vitesse de la lumière dans le vide est

isotrope, i.e. indépendante de sa direction de propagation. On entend ici par vitesse de la lumière sa *vitesse moyenne* dans les deux sens de propagation suivant une droite donnée ; c'est cette vitesse moyenne qui caractérise le résultat de l'expérience utilisant une seule horloge. En généralisant ce résultat on peut affirmer qu'il est vérifié *dans tous les référentiels d'inertie*.

Il reste encore à préciser si la valeur numérique de la vitesse de la lumière est la même dans tous les systèmes de référence. Une réponse affirmative à cette question a été fournie en 1932 par les expériences de Kennedy et Torndyke qui modifièrent l'appareil de Michelson. Ils utilisaient un interféromètre de Michelson où les longueurs des bras étaient *inégales*, l'un étant plus long de 16 cm que l'autre. Ils ont observé les franges d'interférence pendant six mois, l'interféromètre étant immobile par rapport à la Terre. Au cours de tout ce temps, la Terre se déplaçait sur l'orbite d'une position initiale dans la position diamétralement opposée et participait simultanément au mouvement du Soleil. Ainsi les expérimentateurs disposaient de plusieurs référentiels se distinguant les uns des autres par leurs orientations et par leurs dispositions dans l'espace. Si la vitesse de la lumière était différente dans tous ces référentiels, on aurait observé un déplacement régulier des franges d'interférence. En réalité les déplacements des franges étaient aléatoires et ne dépassaient pas 3/1000 d'interfrange. On en conclut qu'à 2 m/s près environ la vitesse de la lumière dans le vide est la même, quelle que soit la position de la Terre dans l'espace.

Ces différents résultats établissent l'équivalence de tous les référentiels d'inertie pour tous les phénomènes physiques et démontrent qu'*il n'existe pas de référentiel privilégié*.

§ 103. Indépendance de la vitesse de la lumière par rapport au mouvement de la source lumineuse

1. La théorie de la relativité d'Einstein se fonde, d'une part, sur le principe ou postulat de la relativité et, d'autre part, sur le *postulat selon lequel la vitesse de la lumière dans le vide est indépendante du mouvement de la source lumineuse*. Généralement, ce dernier postulat est désigné sous le nom de *principe de l'invariance de la vitesse de la lumière*, quoique Pauli (1900-1958) nota que cette dénomination pouvait prêter à confusion. Il ne peut être question d'affirmer que la vitesse de la lumière est toujours constante dans le vide, puisque cela n'est vrai que dans les *référentiels d'inertie*, tandis que son indépendance du mouvement de la source reste vraie en *Relativité générale* où aucune limitation n'est imposée au choix du référentiel.

Si on avait adopté dès le début la théorie ondulatoire de la lumière, il aurait été inutile de poser pour postulat indépendant que la vitesse de la lumière est indépendante du mouvement de la

source lumineuse. Il est cependant préférable de bâtir une théorie aussi fondamentale que la théorie de la relativité sans faire intervenir aucune hypothèse sur la nature et le mécanisme des phénomènes physiques.

2. Ritz (1878-1909) avança l'hypothèse que la vitesse de la lumière serait dépendante du mouvement de la source lumineuse. Selon cette hypothèse, la vitesse de la lumière dans le vide ne serait constante et égale à c que par rapport à la source lumineuse. Si la source lumineuse se déplace avec la vitesse v par rapport à un référentiel, la vitesse de la lumière c' par rapport à ce référentiel serait égale à la somme vectorielle de c et de v, i.e. $c' = c + v$, comme c'est le cas pour la vitesse d'un obus tiré d'une pièce d'artillerie en mouvement. C'est l'hypothèse dite *balistique*. Ritz remania de façon systématique l'électrodynamique de Maxwell conformément à son hypothèse. Il est évident que l'hypothèse balistique peut expliquer le résultat négatif de l'expérience de Michelson dans le cas où la source lumineuse est fixe par rapport à l'interféromètre.

Or l'hypothèse balistique, comme toute autre hypothèse sur la dépendance de la vitesse de la lumière par rapport au mouvement de la source, se trouve en contradiction avec l'interprétation moléculaire de la réflexion et de la réfraction de la lumière (cf. §§ 68, 69). Cette interprétation se fonde sur l'idée que les ondes réfléchies et réfractées résultent des interférences de l'onde incidente avec les ondes secondaires émises par les molécules et les atomes du milieu. Si on admet que le milieu est fixe et la source mobile, les ondes émises par celle-ci se propageront avec des vitesses différentes de celles des ondes émises par les molécules et les atomes du milieu, et elles ne pourront plus interférer. Mais il s'agit là d'une remarque fondée sur la théorie ondulatoire de la lumière et non d'une vérification expérimentale indépendante de toute hypothèse sur la nature de la lumière.

En 1913, l'astronome néerlandais de Sitter (1872-1934) fit remarquer que les observations astronomiques sur le mouvement des étoiles doubles démontrent que l'hypothèse balistique était erronée. Admettons que l'hypothèse balistique soit vraie et supposons pour simplifier que les composantes d'une étoile double tournent autour de leur centre de masse sur des orbites circulaires situées dans le même plan que celui qui contient la Terre. Etudions le mouvement de l'une de ces étoiles. Notons v la vitesse de son mouvement sur l'orbite circulaire. Lorsque l'étoile s'éloigne de la Terre le long de la droite qui les joint, la vitesse de la lumière serait égale à $(c - v)$ et lorsqu'elle se rapproche de la Terre la vitesse de la lumière serait égale à $(c + v)$. Si on repère le temps à partir de l'instant où l'étoile commence à s'éloigner de la Terre, la lumière émise parviendrait jusqu'à la Terre à l'instant $t_1 = L/(c - v)$ et lorsque l'étoile commence à se rapprocher de la Terre, la lumière émise parviendrait

sur Terre à l'instant $t_2 = T/2 + L/(c + v)$, où T est la période de révolution de l'étoile et L sa distance à la Terre. Comme la distance L aux étoiles est énorme, le mouvement des étoiles présenterait des écarts notables aux lois de Kepler. Lorsque L est très grand, il peut arriver que $t_2 \leqslant t_1$, ce qui signifie que l'étoile pourrait être observée simultanément en plusieurs positions ou semblerait tourner en sens inverse. Or les observations astronomiques ne laissent apparaître aucune singularité.

Si l'hypothèse balistique était vraie, le résultat de l'expérience de Michelson, réalisée non pas avec une source terrestre mais avec la lumière d'une étoile, aurait été positif. C'est ce que fit Tomaschek en 1926, mais obtint un résultat négatif.

En 1956, A. M. Bontch-Brouévitch et V. A. Moltchanov ont comparé les vitesses de la lumière émise par les bords opposés du Soleil en utilisant des méthodes de mesures modernes. Par suite de la rotation axiale du Soleil, l'un des bords se rapproche de l'observateur avec une vitesse de 2,3 km/s et l'autre s'en éloigne avec la même vitesse. Les mesures ont montré que les deux vitesses étaient égales à une précision suffisante.

On réalisa aussi des expériences spéciales où on comparait les vitesses des quanta γ émis par des noyaux de carbone excités ($^*C^{12}$) en mouvement et par des noyaux d'oxygène excités ($^*O^{16}$) immobiles. On réalisa aussi des expériences d'annihilation des paires électron-positon, conçues spécialement pour vérifier l'invariance de la vitesse de la lumière. Dans ces expériences avec les noyaux atomiques et les particules élémentaires, les vitesses des sources sont comparables à la vitesse de la lumière, donc beaucoup plus grandes que dans les observations astronomiques où les sources de lumière cosmiques sont animées de vitesses beaucoup plus petites. Les expériences confirmèrent qu'à 10 % près la vitesse des quanta γ était indépendante de la vitesse de la source.

Toutes les expériences confirment le postulat de l'invariance de la vitesse de la lumière dans le vide par rapport au mouvement de la source de lumière.

3. Notons, pour conclure, que la théorie de la relativité n'aurait pu être élaborée si on n'avait pas établi le fait fondamental que *la vitesse de propagation de la lumière est finie*. L'étude des méthodes et des résultats des mesures de la vitesse de la lumière présente un intérêt extraordinaire qui n'est pas seulement historique. Il est notamment indispensable de préciser toujours mieux la valeur numérique de cette constante, afin d'améliorer la précision des mesures des distances astronomiques par le procédé de radiodétection, ce qui, à son tour, est indispensable pour la cosmonautique. Notons, sans approfondir ces questions, qu'en 1972 la vitesse de la lumière a été déterminée en se fondant sur des mesures indépendantes de la longueur d'onde λ et de la fréquence ν de la lumière. La source de lumière

était un laser à hélium-néon émettant sur une longueur d'onde de 3,39 μm. La longueur d'onde était mesurée par un procédé interférométrique en la comparant à une longueur étalon — la longueur d'onde dans le vide de la raie orange de l'isotope du krypton-86. L'erreur de ces mesures $\sim 10^{-5}$ nm. La fréquence du rayonnement laser était mesurée par comparaison avec l'étalon atomique de fréquence, i.e. avec la fréquence de transition entre deux niveaux quantiques hyperfins de l'atome de césium-133 dans un champ magnétique nul. On y a mis en œuvre les méthodes de l'optique non linéaire, fondées sur la génération de rayonnements de fréquences égales à la somme et à la différence des fréquences. On a trouvé ainsi que la vitesse de la lumière $c = \lambda\nu$ a pour valeur

$$c = 299\,792\,458 \pm 1{,}2 \text{ m/s}$$

dont la précision est plus de deux ordres de grandeur meilleure que celle des résultats antérieurs.

§ 104. Concept de simultanéité

1. Avant que la théorie de la relativité ait été élaborée, on estimait que le principe de la relativité était en contradiction avec le principe de l'invariance de la vitesse de la lumière. En effet, selon le principe de la relativité, la vitesse de la lumière dans le vide doit être la même dans tous les référentiels d'inertie. Notons c cette vitesse et prenons deux référentiels d'inertie S et S' en translation uniforme l'un par rapport à l'autre. Soient O et O' deux points qui sont fixes par rapport aux référentiels S et S' et qui sont confondus à l'instant $t = 0$. A cet instant faisons jaillir en ces points un bref éclair de lumière et étudions sa propagation dans le référentiel S d'abord. Comme la lumière se propage avec la même vitesse c dans toutes les directions, à un instant t l'impulsion lumineuse parviendra jusqu'à la surface sphérique Σ de rayon ct et de centre O. Examinons maintenant la propagation de l'impulsion lumineuse dans le référentiel S'. Les deux référentiels sont équivalents, ils ne se distinguent l'un de l'autre que par ce que la source de lumière se déplace par rapport à ces référentiels de façon différente. Mais comme la vitesse de la lumière ne dépend pas du mouvement de la source, cette différence ne joue ici aucun rôle. On peut donc affirmer qu'à l'instant t l'impulsion lumineuse parviendra jusqu'à la surface sphérique Σ' de rayon ct et de centre O'. Les sphères Σ et Σ' sont distinctes car à l'instant t leurs centres O et O' se seront écartés l'un de l'autre. Il s'ensuit qu'une seule et même impulsion lumineuse doit se trouver *simultanément* sur deux surfaces sphériques, chose qui est inconcevable.

2. Le raisonnement ci-dessus est erroné, puisqu'il est fondé sur une *conception intuitive de simultanéité*. Lorsque deux événements se produisent en un même point de l'espace, il est facile de se rendre compte s'ils sont simultanés ou ne le sont pas. Mais lorsque deux événements se produisent *en des points spatiaux différents*, on ne peut affirmer s'ils sont ou ne sont pas simultanés, car *il n'existe pas de simultanéité préétablie d'événements spatialement séparés*.

En principe, on pourrait donner une description spatio-temporelle des phénomènes naturels sans recourir au concept de simultanéité. Considérons un référentiel d'inertie arbitraire; pour définir la position d'un point par rapport à ce référentiel, on utilisera des axes de coordonnées, matérialisés par exemple par trois tiges rigides rectangulaires. On mesurera la distance entre deux points en appliquant contre les tiges un étalon de longueur rigide divisé en mètres et en unités de longueurs plus petites. Ce procédé est inutilisable pour la mesure de grandes longueurs et il faut alors avoir recours aux procédés de mesure indirects des longueurs dont il a été question dans le tome I, § 1. Pour mesurer le temps on dispose des *horloges identiques* en différents points assez rapprochés de notre système de coordonnées et on positionnera les aiguilles des différentes horloges de façon arbitraire et indépendante. On obtient ainsi un système de référence spatio-temporel, puisque tout événement peut être caractérisé dans ce système par le point où il a eu lieu et par les indications de l'horloge se trouvant *au même endroit*.

On a défini ainsi le *temps local*, i.e. le temps repéré par des horloges se trouvant en différents points de l'espace, sans qu'il y ait une relation quelconque entre les indications des horloges. Ce système de référence spatio-temporel ne convient absolument pas à la description des phénomènes naturels et ne peut être praticable qu'un système de référence à *temps unique*, où les indications de toutes les horloges ne sont pas indépendantes mais synchronisées ou corrélées d'une façon déterminée. En principe, le procédé de synchronisation importe peu, à condition qu'il ne comporte pas de *contradiction interne*. Néanmoins des considérations fondées sur le principe de la relativité et le principe de l'invariance de la vitesse de la lumière vis-à-vis du mouvement de la source imposent de façon pratiquement univoque d'adopter le procédé de synchronisation suggéré par Einstein et la définition de simultanéité qui en découle.

3. Einstein suggéra de synchroniser les horloges spatialement séparées au moyen de brefs signaux lumineux se propageant dans le vide. Tant que les horloges n'auront pas été synchronisées, on ne peut parler de vitesse le long d'une certaine direction et il ne peut être question que de la *vitesse moyenne* de propagation dans les deux sens d'une direction donnée, puisqu'on peut déterminer cette vitesse moyenne à l'aide d'une *seule horloge*. Pour ce faire, envoyons d'un point fixe A, à un instant t_1^A, un signal lumineux dirigé vers

un miroir fixe situé à une distance l du point A. Le signal lumineux revient au point A à l'instant t_2^A. Comme les temps sont repérés sur la même horloge, on n'a pas à s'inquiéter de la synchronisation. En divisant le trajet $2l$ par le temps $t_2^A - t_1^A$, on trouve la vitesse moyenne de la lumière $c = 2l/(t_2^A - t_1^A)$. Les expériences de Michelson ainsi que différentes autres expériences ont montré que cette vitesse était une *constante universelle*. On peut affirmer maintenant que, *par définition*, *la vitesse de la lumière est la même dans les deux sens d'une direction quelconque*. On postule ainsi la *synchronisation*

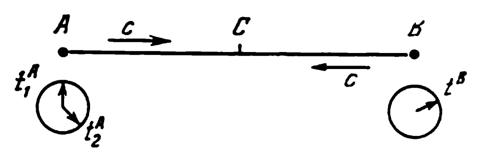


Fig. 326

des horloges et on introduit le *concept de simultanéité*. On peut parler maintenant de la vitesse de déplacement dans un sens donné, puisqu'on peut mesurer le temps de parcours au moyen de deux horloges synchronisées situées en des points distincts de l'espace.

La *règle de synchronisation des horloges d'Einstein* s'énonce comme suit. *Des horloges identiques sont disposées aux points fixes A et B* (fig. 326). *On envoie du point A, à l'instant t_1^A indiqué par l'horloge A, un signal lumineux en direction d'un miroir disposé au point B. Posons que le signal réfléchi revient au point A à l'instant t_2^A (indiqué par l'horloge A). Lorsque le signal arrive en B, réglons l'horloge située en B pour qu'elle indique le temps $t^B = {}^1/_2\,(t_1^A + t_2^A)$. Par définition, les horloges situées en A et B sont alors synchronisées.*

Il existe un autre procédé de synchronisation équivalent au précédent. *Au milieu d'un segment de droite AB faisons jaillir une brève lueur. A l'instant où le signal lumineux arrive en A et en B, on règle les horloges à la même heure, ce qui assure leur synchronisation.*

On peut synchroniser les horloges A et B non seulement directement, mais par l'intermédiaire d'une troisième horloge C. Par l'un des procédés indiqués, synchronisons d'abord les horloges A et C, puis les horloges B et C. Nous postulons que les horloges A et B seront alors synchronisées. Cette affirmation, confirmée par toutes les conséquences qui en résultent, ne donne lieu à aucune contradiction et est confirmée par les résultats expérimentaux. On obtient ainsi un *système de référence spatio-temporel à temps unique* où les horloges sont synchronisées d'après la règle d'Einstein. *Deux événements se produisant en deux endroits différents de ce référentiel sont dits simultanés, si les horloges situées en ces deux endroits marquent le même temps.*

4. *La simultanéité est un concept relatif* en ce sens que deux événements qui sont simultanés dans un référentiel d'inertie peuvent ne plus l'être dans un autre référentiel. Expliquons cette proposition au moyen d'une expérience imaginaire. Soit un train $A'B'$ animé d'un mouvement rectiligne et uniforme de vitesse V sur la surface terrestre (fig. 327). Confondons-le avec le référentiel mobile S'. Posons que la voie de chemin de fer constitue le référentiel fixe S. Supposons que la foudre frappe aux deux extrémités A' et B' du train et laisse des traces A et B sur la voie de chemin de fer. Marquons le centre du train par le point C' et le milieu de l'intervalle

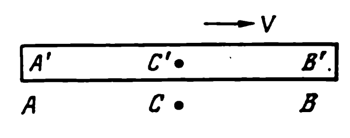


Fig. 327

AB sur la voie par le point C. Supposons que les lueurs des éclairs arrivent simultanément au point C. Dans le référentiel S les coups de foudre tombant sur les extrémités du train sont des événements simultanés. Or à l'instant où les lueurs des deux éclairs se rejoignent, le point C' se trouve à droite du point C. A cet instant le signal lumineux issu de B' aura déjà dépassé C' et le signal issu de A' n'y sera pas encore parvenu. Par conséquent au point de vue d'un observateur solidaire du référentiel S' le coup de foudre tombant sur B' est antérieur au coup de foudre frappant A'.

On conçoit maintenant ce qu'il faut faire pour résoudre le paradoxe mentionné au point 1. La lumière parvient à la surface sphérique Σ simultanément dans le référentiel S et non simultanément dans le référentiel S'. De même la lumière parvient simultanément jusqu'à la surface sphérique Σ' dans le référentiel S' et non simultanément pour un observateur solidaire du référentiel S.

La physique prérelativiste se développait avec succès en admettant que le temps et la simultanéité étaient *absolus*, i.e. étaient les mêmes dans tous les référentiels. Mais cela ne dura que tant que les vitesses considérées étaient *petites*. Or la propagation de la lumière est un processus rapide et c'est pour cela que c'est en optique que la Physique se heurta à de graves difficultés qui ne pouvaient être surmontées que grâce à la théorie de la relativité.

§ 105. Transformation des coordonnées et du temps en théorie de la relativité

1. Considérons deux référentiels d'inertie S et S', S' étant animé d'un mouvement de translation uniforme par rapport à S avec la vitesse V ; il s'ensuit que S est en translation uniforme par rapport à

S' avec la vitesse $-V$. On dispose dans chaque référentiel un grand nombre d'horloges identiques qui sont immobiles dans ce référentiel et synchronisées selon la règle d'Einstein. Soient x, y, z, t les coordonnées et le temps d'un événement quelconque (par exemple le choc de deux billes) rapporté au référentiel S, et soient x', y', z', t' les coordonnées et le temps du même événement rapporté au référentiel S'. Connaissant les valeurs de x, y, z, t, calculer les valeurs de x', y', z', t' ou inversement. La solution de ce problème n'est possible que si l'espace est *homogène* et *isotrope* et le temps est *homogène* *). Dire que l'espace et le temps sont homogènes, c'est affirmer que tous les points de l'espace et tous les instants de temps sont parfaitement équivalents dans les deux référentiels S et S'. Dire que l'espace est isotrope, c'est affirmer que toutes les directions sont équivalentes dans les référentiels S et S'. En vertu de l'homogénéité et de l'isotropie de l'espace et du temps la relation entre x, y, z, t et x', y', z', t' doit être *linéaire*.

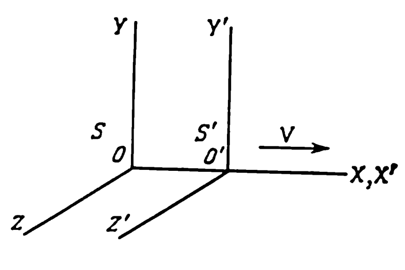


Fig. 328

Le problème de la transformation spatiale des coordonnées est traité en géométrie analytique, aussi ne considérons-nous que le rôle que joue la translation uniforme relative des référentiels dans la transformation des coordonnées et du temps. Il suffit de considérer le cas particulier où les origines O et O' des systèmes de coordonnées S et S' coïncident à un certain instant que nous adopterons pour origine des temps, dans les deux référentiels. Dans ce cas la relation entre x, y, z, t et x', y', z', t' sera non seulement linéaire mais encore *homogène*, car aux valeurs nulles des paramètres non accentués correspondent des valeurs nulles des paramètres accentués. On peut, en outre, faire coïncider en direction les axes X, Y, Z de S avec les axes X', Y', Z' de S', de telle sorte que l'axe X soit confondu avec l'axe X' (fig. 328).

2. Posons que la vitesse relative de translation V des trièdres S et S' est inférieure à la vitesse de la lumière c ($V < c$). A un instant $t_1 > 0$ (indiqué par l'horloge du système S) envoyons de l'origine O un signal lumineux dans le sens positif de l'axe X. Ce signal parviendra à l'origine O' à un instant t' (indiqué par l'horloge du référentiel S'). La relation entre les coordonnées et les temps dans les référentiels S et S' étant linéaire, le temps t' doit dépendre linéaire-

*) Ces propriétés ne peuvent être considérées comme telles *a priori*. Elles sont confirmées par l'expérience, mais l'explication ne pourra être donnée que par la cosmologie lors de l'étude de l'origine et de l'évolution de l'Univers.

ment du temps t_1. A une valeur nulle de t_1 correspond une valeur nulle de t' puisque à l'instant $t = t'$ les origines O et O' sont confondues. On aura donc

$$t' = kt_1, \tag{105.1}$$

où k est un coefficient. Comme l'espace est isotrope, ce coefficient ne peut dépendre que de la valeur absolue de la vitesse V, indépendamment de son sens.

Exprimons k en termes de V. Supposons que le signal se réfléchit au point O' et revient au point O à l'instant t_2 (indiqué par l'horloge de S). Les deux référentiels étant équivalents, on aura

$$t_2 = kt', \tag{105.2}$$

où k a la même valeur que dans (105.1). En éliminant t' on obtient

$$t_2 = k^2 t_1. \tag{105.3}$$

Selon la règle de synchronisation d'Einstein, le signal lumineux envoyé de O à l'instant t_1 et qui y retourne à l'instant t_2 subit une réflexion en O' à l'instant

$$t = \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{1 + k^2}{2} t_1 \tag{105.4}$$

(indiqué par l'horloge du référentiel S). La distance x que parcourt le point O' dans le temps t est $x = Vt$. Comme la lumière parcourt cette distance dans le temps $t - t_1$, $x = c(t - t_1)$. Ainsi $Vt = c(t - t_1)$. En portant dans cette formule la valeur de t donnée par (105.4), on obtient

$$V(k^2 + 1) = c(k^2 - 1), \tag{105.5}$$

d'où

$$\frac{V}{c} = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}, \tag{105.6}$$

$$k^2 = \frac{c + V}{c - V} = \frac{1 + V/c}{1 - V/c}. \tag{105.7}$$

En extrayant la racine carrée de la dernière expression on trouve k et on obtient ensuite deux formules auxiliaires:

$$k + \frac{1}{k} = \frac{2}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, \quad k - \frac{1}{k} = \frac{2V/c}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, \tag{105.8}$$

que nous aurons à utiliser dans ce qui suit. Toutes ces relations ne sont vérifiées que si $V < c$.

Remarquons qu'il résulte des formules (105.1) et (105.4) que

$$\frac{t'}{t} = \frac{2k}{k^2 + 1} = \sqrt{1 - (V/c)^2}, \tag{105.9}$$

d'où $t' < t$. Or t est le temps pendant lequel le point O' se déplace du point fixe O avant qu'il soit rattrapé par le signal lumineux ; t est repéré sur l'horloge « fixe » du référentiel S. Le temps t' désigne le

même intervalle de temps mais repéré sur l'horloge « mobile » du référentiel S'. Ainsi les temps t et t' désignent les intervalles de temps qui s'écoulent entre les mêmes événements mais mesurés l'un dans le référentiel « fixe » S, l'autre dans le référentiel « mobile » S'. La formule (105.9) montre que l'horloge mobile marche plus lentement que l'horloge fixe. Nous discuterons longuement de cette particularité dans ce qui suit, mais il nous faut d'abord poursuivre l'étude de la transformation des coordonnées et du temps.

3. Supposons qu'un événement A se soit produit sur l'axe X (par exemple le choc de deux billes, fig. 329). Dans le référentiel S cet événement est défini par l'abscisse x et le temps t et dans le réfé-

Fig. 329

Fig. 330

rentiel S' par x' et t'. Considérons un signal lumineux envoyé de l'origine O vers le lieu A de l'événement (fig. 329, a). Pour parcourir la distance OA le signal lumineux met un temps x/c. Pour que ce signal parvienne au point A à l'instant t, il doit être émis par O à l'instant $t_1 = t - x/c$. Pour parcourir la distance $O'A$ ce même signal met un temps x'/c, de sorte qu'il passe par le point O' à l'instant $t'_1 = t' - x'/c$. Par définition du coefficient k, $t'_1 = kt_1$ ou $t' - x'/c =$ $= k(t - x/c)$. Réfléchissons le signal au point A pour le faire revenir en O (fig. 329, b). Le signal réfléchi passera par le point O' à l'instant $t'_2 = t' + x'/c$ et par le point O à l'instant $t_2 = t + x/c$. Nous avons interverti ainsi le rôle joué par les grandeurs accentuées et non accentuées; par définition du coefficient k, on peut écrire $t_2 = kt'$ ou $t + x/c = k(t' + x'/c)$. De là

$$t' - x'/c = k(t - x/c), \quad k(t' + x'/c) = t + x/c. \qquad (105.10)$$

Ces relations sont valables en tout point de l'axe X. Supposons, par exemple, que l'événement A se soit produit à gauche des points O et O' (fig. 330, a). Envoyons, du point où s'est produit l'événement, un signal dirigé vers la droite. Comme les coordonnées x et x' sont maintenant négatives, ce signal arrivera aux points O et O' aux instants ultérieurs $t - x/c$ et $t' - x'/c$. En se fondant sur la définition du coefficient k on écrira $t' - x'/c = k(t - x/c)$; or c'est la première des relations (105.10). Envoyons maintenant un

signal qui se propage de droite à gauche (fig. 330, *b*). Posons qu'il atteint le point A aux instants t et t' mesurés respectivement à l'aide des horloges des systèmes S et S'. Le signal passera par les points O et O' aux instants $t + x/c$ et $t' + x'/c$, et par suite $t' + x'/c = k(t' - x'/c)$, qui n'est autre que la seconde relation (105.10).

Il est instructif d'étudier toutes les dispositions relatives des points A, O, O' pour s'assurer que les relations (105.10) sont toujours vérifiées.

On déduit des relations (105.10) les résultats suivants:

$$x' = \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right)x - \frac{1}{2}\left(k - \frac{1}{k}\right)ct,$$
$$t' = \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right)t - \frac{1}{2}\left(k - \frac{1}{k}\right)\frac{x}{c}, \tag{105.11}$$

ou en utilisant (105.8) on trouve

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{105.12}$$

où on a introduit la notation

$$\beta = V/c. \tag{105.13}$$

Nous avons ajouté ici les égalités $y' = y$ et $z' = z$ afin de bien montrer que les coordonnées transversales y et z de l'événement considéré ne se transforment pas. Pour le démontrer fabriquons dans les référentiels S et S', par le même procédé, deux tiges rigides identiques qui sont fixes par rapport à leurs référentiels; dressons-les parallèlement aux axes Y et Y' de manière qu'elles s'appuient par leurs extrémités sur l'axe X (fig. 331). Les longueurs y et y' des tiges mesurées dans les référentiels S et S' sont évidemment égales, mais cela ne constitue pas une preuve de ce que la deuxième équation (105.12) soit vérifiée. Pour cela il faut démontrer encore que les coordonnées y et y' peuvent être considérées comme les coordonnées d'un *seul et même événement*. Fixons les petites billes A et A' aux extrémités supérieures des tiges. Posons qu'au début la bille A' se trouve à gauche de la bille A. Nous affirmons que, mise en mouvement, la bille A' entrera nécessairement en collision avec la bille A. Si la bille mobile passait au-dessus ou au-dessous de la bille fixe, les référentiels S et S' ne seraient pas équivalents. Si les billes s'entrechoquent, y et y' deviennent les coordonnées de cet événement et la deuxième équation (105.12) s'en trouve démontrée. On démontre de la même façon la troisième équation (105.12).

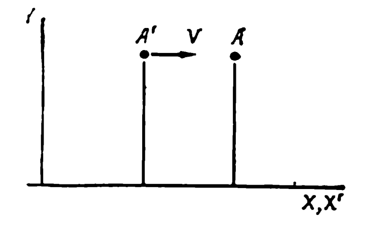


Fig. 331

Ce sont les formules (105.12) qui sont la solution des problèmes de la transformation des coordonnées et du temps lorsqu'on passe d'un référentiel à un autre. On les désigne sous le nom de *transformation de Lorentz* (dénomination suggérée par Poincaré) qui les avait établies en 1904. Larmor avait établi ces mêmes formules en 1900. Aussi bien Larmor que Lorentz croyaient à l'éther universel fixe et pour eux le temps vrai était le temps t repéré dans le référentiel par rapport auquel l'éther était au repos. La quantité t' ne représentait le temps que formellement ; c'était une variable mathématique qui était introduite afin de rendre invariantes les équations de l'électrodynamique lors du passage des variables x, y, z, t aux variables x', y', z', t'. La démonstration des formules de Lorentz, que nous avons donnée ci-dessus, ainsi que l'interprétation de leur vraie signification ont été conçues en 1905 par Einstein. Dans la théorie d'Einstein tous les référentiels d'inertie sont parfaitement équivalents et la quantité t' est un temps aussi vrai que le temps t. Ce fait apparaît clairement lorsqu'on résout les équations (105.12) par rapport à x, y, z et t. On obtient ainsi les formules de la « transformation inverse »

$$x=\frac{x'+Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y=y', \quad z=z', \quad t=\frac{t'+Vx'/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (105.14)$$

qui sont de la même forme que les formules de la « transformation directe » (105.12). Les formules (105.14) se déduisent des formules (105.12) en y remplaçant simplement V par $-V$.

Pour $\beta > 1$ les formules (105.12) et (105.14) fourniraient des valeurs imaginaires des coordonnées et du temps. Il est donc dénué de sens d'envisager le mouvement d'un seul référentiel avec une vitesse V supérieure à la vitesse de la lumière c. Il en résulte qu'aucun corps ne peut avoir une vitesse supérieure à la vitesse de la lumière c, puisqu'on peut attacher un référentiel à tout corps.

Dans le cas de mouvements lents pour lesquels $(V/c)^2 \ll 1$ et $Vv/c^2 \ll 1$ (v est la vitesse du corps mobile), la transformation de Lorentz se trouve ramenée à la transformation de Galilée.

4. En physique prérelativiste, le temps et l'espace étaient des concepts *indépendants*. On admettait que la distance entre deux points de l'espace (ou plus exactement la distance entre deux points matériels considérés à un instant donné) ainsi que les intervalles de temps entre deux événements étaient *les mêmes dans tous les référentiels*. Autrement dit on admettait que ces deux grandeurs étaient *invariantes* lors du passage d'un référentiel à un autre. Cette invariance disparaît en théorie de la relativité où on trouve à la place de l'invariant spatial et de l'invariant temporel un seul invariant — l'*invariant spatio-temporel*. L'invariant spatio-temporel s'établit en multipliant l'une par l'autre les équations (105.11), ce qui donne

$$c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2 = \text{Inv.} \qquad (105.15)$$

Pour raison de commodité on récrit cette formule en utilisant de nouvelles variables temporelles

$$\tau = ct, \quad \tau' = ct', \tag{105.16}$$

ayant la dimension d'une longueur. L'introduction de ces nouvelles variables signifie que les intervalles de temps sont maintenant évalués avec les mêmes unités que les distances spatiales: l'unité de temps est le temps que met la lumière pour parcourir l'unité de distance. Avec ces nouvelles variables (105.15) s'écrit

$$\tau^2 - x^2 = \tau'^2 - x'^2 = \text{Inv}. \tag{105.17}$$

En tenant compte de ce qu'avec les orientations des axes adoptées $y' = y$, $z' = z$, on obtient

$$\tau^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = \tau'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = \text{Inv}. \tag{105.18}$$

Sous cette forme l'invariant spatio-temporel (105.18) ne dépend plus ni de l'orientation relative des référentiels S et S' ni du sens de la vitesse V. La formule (105.18) implique cependant que l'un des événements est donné. Cet événement donné est la coïncidence des origines O et O'. Pour éliminer cette limitation, récrivons (105.18) sous la forme

$$\Delta\tau^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) = \Delta\tau'^2 - (\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2) = \text{Inv}, \tag{105.19}$$

où $\Delta\tau$, Δx, . . ., $\Delta\tau'$, $\Delta x'$, . . . représentent les différences entre les temps et les coordonnées spatiales des événements 1 et 2 dans les référentiels S et S':

$$\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1, \quad \Delta x = x_2 - x_1, \quad \Delta y = y_2 - y_1, \quad \Delta z = z_2 - z_1,$$
$$\Delta\tau' = \tau_2' - \tau_1', \quad \Delta x' = x_2' - x_1', \quad \Delta y' = y_2' - y_1', \quad \Delta z' = z_2' - z_1'.$$

La racine carrée de l'invariant (105.19) est appelée *intervalle entre les événements considérés* que l'on notera dorénavant s_{12} ou Δs. Le carré de l'intervalle entre les événements 1 et 2 peut évidemment s'écrire

$$s_{12}^2 = (\tau_2 - \tau_1)^2 - l_{12}^2 = (\tau_2' - \tau_1')^2 - l_{12}'^2, \tag{105.20}$$

où l_{12} et l_{12}' sont les distances entre les points où se sont produits les événements respectivement dans les référentiels S et S'.

On peut ainsi introduire les paramètres τ et τ' dans les formules de transformation de Lorentz à la place des paramètres t et t'. En nous limitant au cas particulier représenté sur la figure 328, récrivons les formules (105.12) sous la forme

$$x' = \frac{x - \beta\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \tau' = \frac{\tau - \beta x}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{105.21}$$

Si on prend pour unité la vitesse de la lumière c, la quantité β représente la vitesse du système de coordonnées mobile.

Minkowski (1864-1909) a introduit une terminologie géométrique pour décrire les événements spatio-temporels. Il appela *point d'univers* l'ensemble des valeurs de τ, x, y, z, définissant l'instant et le lieu de l'événement. L'ensemble des points d'univers est un espace à quatre dimensions dit *espace-temps* ou *univers de Minkowski*. Une ligne tracée dans l'univers de Minkowski est appelée *ligne d'univers*. L'intervalle entre deux événements est adopté comme *distance invariante* entre les points d'univers correspondants. C'est en se fondant sur ces conceptions que fut élaboré le calcul tensoriel dans l'univers de Minkowski, qui est analogue au calcul tensoriel de la géométrie euclidienne. C'est un appareil mathématique adéquat à la théorie de la relativité restreinte.

5. Les intervalles entre les événements peuvent être divisés en *intervalles réels* et *intervalles purement imaginaires*. Comme l'intervalle est invariant, cette division *ne dépend pas du choix du référentiel*.

Peut-on trouver un référentiel dans lequel les événements 1 et 2 sont *monolocalisés*, i.e. se produisent en un seul et même point de l'espace? Supposons que S' est un tel référentiel, où $l'_{12} = 0$; d'après (105.20) le carré de l'intervalle est $s_{12}^2 = (\tau'_2 - \tau'_1)^2$. Il en résulte que $s_{12}^2 > 0$, autrement dit l'intervalle s_{12} doit être réel. Pour démontrer que cette condition est suffisante, on peut, sans perte de généralité, utiliser la transformation de Lorentz particulière (105.21). Pour que les événements se produisant dans le référentiel S' soient localisés en un même point, il suffit que $\Delta x' = 0$, i.e. $\Delta x = \beta \Delta \tau$. Ce résultat implique que le référentiel S' doit se déplacer avec la vitesse $\beta = \Delta x / \Delta \tau$. Or pour un intervalle réel $|\Delta x| < \Delta \tau$ d'où $|\beta| < 1$, ce qui signifie que le référentiel S' doit se déplacer avec une vitesse inférieure à la vitesse de la lumière et qui peut donc être réalisée. L'intervalle de temps séparant les événements se produisant en un même point du référentiel S' est $\Delta\tau' = |s_{12}|$, ce qui s'écrit, en utilisant les unités de mesure ordinaires, $\Delta t' = |s_{12}|/c$. Les intervalles réels sont dits *intervalles du genre temps*.

Voyons maintenant s'il peut exister un référentiel où les événements 1 et 2 seraient *simultanés*. Si S' est ce référentiel, on a $\tau'_2 - \tau'_1 = 0$, et d'après (105.20) on doit avoir $s_{12}^2 = -l'^2_{12}$. Cela signifie que l'intervalle s_{12} doit être purement imaginaire. On démontre que cette condition est suffisante comme ci-dessus. La distance entre les points où se sont produits les événements simultanés 1 et 2 dans le référentiel S' est $l'_{12} = |s_{12}|$. Les intervalles purement imaginaires sont dits *intervalles du genre espace*.

Considérons encore le cas spécial où l'intervalle entre les événements est nul. Pour que ces événements se produisent en un même point de référentiel, il faut que celui-ci se déplace avec la vitesse de la lumière. La même condition subsiste si on impose que les événements soient simultanés. Aucune de ces éventualités ne peut être réalisée. Les intervalles nuls sont appelés intervalles *lumineux* ou

isotropes car ils caractérisent l'émission d'un signal en un point donné et l'arrivée de ce signal en un autre point de l'espace.

6. Lorsqu'il s'agit de la transformation de Lorentz particulière (105.21) illustrée par la figure 328, tous les résultats que nous venons d'obtenir peuvent être illustrés par des graphiques, puisque dans ce cas on peut se limiter à la transformation d'une seule coordonnée spatiale x et du temps τ, l'espace de Minkowski étant assimilé à un *plan bidimensionnel* (x, τ). Confondons un événement arbitraire O dans ce plan (point d'univers) avec l'origine des coordonnées rectan-

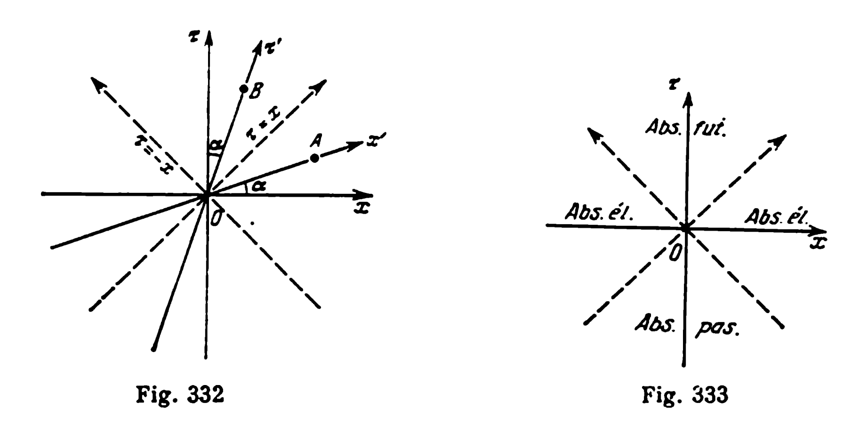


Fig. 332 Fig. 333

gulaires (fig. 332). Faisons passer par O deux axes rectangulaires, l'un étant l'axe spatial x, l'autre l'axe temporel τ dans le référentiel S. Les droites en pointillé $\tau = x$ et $\tau = -x$ sont les lignes d'univers des signaux lumineux se propageant respectivement dans le sens positif et dans le sens négatif de l'axe X. Soit A un événement quelconque. Relions les points A et O par la ligne d'univers $\tau = x \operatorname{tg} \alpha$ décrivant le mouvement uniforme d'un corps le long de l'axe X avec la vitesse β. Lorsque $\beta < 1$ on peut attacher à ce corps un référentiel S' et prendre la droite OA pour axe spatial X'. L'axe temporel τ' est défini par la condition $x' = 0$. D'après (105.21) ce sera la ligne d'univers $x = \beta\tau$, i.e. la droite OB faisant avec l'axe temporel τ le même angle $\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \beta$. Dans ce nouveau référentiel les événements O et A sont simultanés mais spatialement distincts, tandis que les événements O et B sont spatialement confondus mais non simultanés.

Par rapport à l'événement O tous les événements peuvent être divisés en *événements absolument éloignés* et en *événements absolument non simultanés* (i.e. *absolument passés* et *absolument futurs*), comme indiqué sur la figure 333. Pour le premier groupe l'intervalle entre les événements est purement imaginaire et pour le second groupe l'intervalle est réel. Ces différents événements sont délimités par les

17—0791

lignes d'univers en pointillé des signaux lumineux se propageant dans les deux sens de l'axe spatial. Dans l'espace à quatre dimensions de Minkowski cette frontière est une multiplicité tridimensionnelle qui est le cône $\tau^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$, axé sur l'axe des temps τ. Ce cône est appelé *cône de lumière.*

Seuls les événements dont l'intervalle est du genre temps sont liés par la relation de cause à effet. Par exemple, l'événement O (fig. 332) peut être cause de l'événement B, puisque dans tout référentiel l'événement B est postérieur à l'événement O. Mais si l'intervalle entre les événements est du genre espace, les événements ne peuvent être cause l'un de l'autre. Tels sont les événements O et A (fig. 332). Dans un référentiel fixe S l'événement A est postérieur à l'événement O. Dans le référentiel accentué (x', τ') ces deux événements sont simultanés, mais dans un référentiel animé d'une vitesse plus grande que celle du référentiel (x', τ') mais inférieure à la vitesse de la lumière, l'axe spatial présente une pente plus grande que celle de l'axe X' (fig. 332). Dans ce référentiel l'événement A précède l'événement O. On ne peut donc satisfaire à la condition que dans tous les référentiels la « cause » précède l'« effet » et c'est ce qui démontre notre proposition.

La droite OA d'équation $\tau = \beta x$ est la ligne d'univers d'un mouvement qui s'effectuerait avec la vitesse $x/\tau = 1/\beta$, i.e. avec une *vitesse supérieure à la vitesse de la lumière.* L'existence de telles vitesses n'est pas interdite par la théorie de la relativité qui admet l'existence de n'importe quelles vitesses. Néanmoins la propagation d'états avec des vitesses supérieures à la vitesse de la lumière implique que l'intervalle entre deux états quelconques serait du genre espace et par suite aucun des deux états ne saurait être cause de l'autre. Les processus de ce type ne peuvent être utilisés en qualité de « signaux » pour la transmission d'informations. *Aucun corps et aucun signal transmettant des actions ne peuvent se propager avec une vitesse supérieure à la vitesse de la lumière dans le vide. La vitesse de la lumière dans le vide est la vitesse limite de propagation des interactions* *).

§ 106. Contraction des longueurs et du temps selon Lorentz

1. Lorsqu'une tige rigide est au repos par rapport à un référentiel, sa longueur l_0 peut être mesurée en la comparant à un étalon de longueur au repos par rapport à ce même référentiel. La grandeur l_0 pourrait être appelée *longueur propre de la tige*, puisqu'elle ne dépend pas des référentiels par rapport auxquels la tige est au repos. Mais

*) Au cours de la dernière décennie on discute de l'éventualité d'existence de particules superlumineuses — les *tachyons.* Si ces particules existaient réellement, elles ne pourraient servir de « signaux » pour la transmission d'interactions. A ce sujet voir V. A. Ougarov, *Théorie de la relativité restreinte*, Ed. « Naouka », Moscou, 1977 (en russe).

si la tige est en mouvement, il est nécessaire de préciser ce qu'il faut entendre par longueur de la tige dans un référentiel fixe. Pour éviter tout malentendu, notons expressément que dans n importe quel référentiel la mesure des longueurs et des intervalles de temps doit être effectuée au moyen de tiges étalons et d'horloges qui sont *au repos* dans ce référentiel.

Dans un référentiel fixe on appelle longueur l d'une tige mobile la distance qui, sur les repères du référentiel, sépare les positions simultanées des extrémités de la tige en mouvement. Pour établir une relation entre l et l_0 nous utiliserons le cas particulier de la transformation de Lorentz décrit par la formule (105.12). Posons que la tige est au repos dans le référentiel S' et qu'elle y est disposée le long de l'axe X'. La différence $\Delta x'$ des coordonnées de ses extrémités dans le référentiel S' définit la longueur l_0 de la tige au repos. La différence des coordonnées des mêmes extrémités Δx dans le référentiel S, mesurée à un même instant t, est la longueur l de la tige en mouvement. D'après la première formule (105.12), pour $t =$ const on trouve $\Delta x' = \Delta x/\sqrt{1-\beta^2}$, d'où

$$l = l_0\sqrt{1-\beta^2}. \tag{106.1}$$

La longueur de la tige en mouvement est plus petite que la longueur de la même tige au repos. C'est la contraction de longueur de Lorentz. Ce concept a été élaboré indépendamment l'un de l'autre par Fitzgerald (1851-1901) et par Lorentz, pour qui ce n'était qu'une hypothèse *ad hoc* pour expliquer l'échec de l'expérience de Michelson; Lorentz essaya cependant de la justifier par la théorie électronique. Dans la théorie de la relativité la contraction de Lorentz et sa vraie signification physique ne nécessitent aucune hypothèse supplémentaire, ce qui n'exclut pas la possibilité d'une interprétation atomistique de la contraction de Lorentz ainsi que du ralentissement des horloges en mouvement dont il sera question ci-dessous. Mais on doit disposer pour cela, en plus des équations de l'électrodynamique, d'équations encore inconnues caractérisant la structure de la matière. Si on connaissait ces équations, on pourrait analyser les contractions de longueur et de temps. Mais si la théorie de la relativité est valable, le résultat d'une telle analyse est connu d'avance. Les lois de la Nature doivent être *invariantes par rapport à la transformation de Lorentz*, et de ce fait leur application au problème de la contraction de longueur et de temps ne peut fournir d'autres résultats que ceux que fournit la théorie de la relativité.

2. Soient deux événements dont l'intervalle est du genre temps. Les durées Δt et $\Delta t'$ entre ces événements, mesurées l'une dans le référentiel « fixe » S et l'autre dans le référentiel « mobile » S', sont généralement différentes. Les deux référentiels étant équivalents, on peut avoir $\Delta t \lesseqgtr \Delta t'$. Supposons que le référentiel mobile S' est tel que les deux événements se produisent dans un *seul et même*

point de l'espace (un tel référentiel existe puisque l'intervalle est du genre temps, cf. § 105, pt. 5). Le référentiel S' est alors un référentiel d'inertie privilégié. Nous noterons t_0 le temps mesuré dans ce référentiel et t le temps mesuré dans le référentiel « fixe » S. Pour établir la relation entre Δt et Δt_0 nous poserons que la coordonnée x' figurant dans (105.14) est constante, i.e. la même pour les deux événements. En appliquant la dernière formule (105.14) on trouve $\Delta t = \Delta t'/\sqrt{1-\beta^2}$. Mais selon notre définition $\Delta t'$ est précisément la durée Δt_0 et par suite

$$\Delta t_0 = \Delta t \sqrt{1-\beta^2}. \tag{106.2}$$

Ainsi $\Delta t_0 < \Delta t$, ce qui signifie que *l'intervalle de temps s'écoulant entre deux événements est plus petit dans le référentiel où ces événements se produisent au même endroit* (couple d'événements « dans le temps »). C'est l'effet de *ralentissement de l'horloge mobile*. La raison de cette dénomination est la suivante. Disposons une horloge en un certain point du référentiel S' ; on l'appellera horloge « mobile » puisqu'elle se déplace avec le référentiel S'. Par contre toutes les horloges disposées dans le référentiel S sont dites « fixes ». Il est clair que dans le référentiel S' deux événements quelconques se produisant là où se trouve l'horloge « mobile » seront localisés dans le même point de l'espace et l'horloge mesurera la durée Δt_0. Les instants où se manifestent les deux événements sont repérés par la *même* horloge (« mobile ») et leur mesure ne nécessite donc aucune synchronisation. Par contre, dans le référentiel « fixe » S, les instants où se produisent les deux événements sont repérés par des horloges situées en des *points différents de l'espace*. Pour mesurer la durée Δt on doit disposer de *deux horloges* synchronisées conformément à la règle d'Einstein. La mesure du temps au moyen de l'horloge « mobile » et de l'horloge « fixe » présente une *asymétrie* qui se manifeste dans l'inégalité $\Delta t_0 < \Delta t$.

3. Considérons une particule en mouvement par rapport au référentiel « fixe » S décrivant une trajectoire curviligne avec une vitesse variée v. Dans la théorie de la relativité restreinte on n'envisage que des référentiels spatio-temporels se déplaçant par rapport à S de façon rectiligne et uniforme. Prenons un nombre infini de ces référentiels se déplaçant avec toutes les vitesses possibles et dans toutes les directions. Le référentiel par rapport auquel la vitesse instantanée de la particule est nulle, ainsi que l'horloge qui est liée à ce référentiel, sont dits *associés*. Lors de son mouvement la particule passe d'un référentiel associé à un autre. Divisons la trajectoire de la particule dans le référentiel S en segments infiniment courts, et notons dt le temps que met la particule pour parcourir un de ces segments. D'après (106.2) le temps de parcours du segment mesuré au moyen de l'horloge associée est $dt_0 = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}$. La durée

finie mesurée au moyen de l'horloge « fixe » est donnée par l'intégrale

$$t_2 - t_1 = \int \frac{dt_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{106.3}$$

étendue à toute la trajectoire de la particule.

Dans le cas où l'horloge se déplacerait avec la particule, on devra établir une relation entre la durée repérée sur cette horloge avec la durée repérée sur une horloge associée. On ne peut le faire sans une *étude du fonctionnement de l'horloge* puisque le mouvement accéléré s'accompagne de l'apparition de forces d'inertie qui affectent la marche de l'horloge. Par exemple, si on met en mouvement une horloge à ressort, les forces d'inertie peuvent déformer le balancier ou les autres parties mécaniques de l'horloge. Les déformations peuvent être tellement importantes que l'horloge s'arrêtera ou se brisera. Une horloge à pendule ne peut mesurer le temps en l'absence de champ de gravitation. Le cœur d'un organisme vivant (que l'on peut assimiler à une horloge) cessera de battre et l'organisme périra si on lui communique une accélération trop grande, etc. Néanmoins on peut envisager, en principe, une horloge dont le fonctionnement ne sera que très peu affecté (à la limite nullement affecté) par les forces de gravitation et d'inertie; c'est l'horloge *parfaite*. La durée que mesure une horloge parfaite est identique à la durée mesurée par une horloge associée. C'est ce qui permet, en principe, de vérifier par l'expérience si une horloge donnée est parfaite ou ne l'est pas. Il est évident que le temps t_0 figurant dans la formule (106.3) peut être assimilé au temps mesuré par une *horloge parfaite accompagnant la particule dans son mouvement*. Ce temps est le *temps propre* appelé ainsi parce qu'il est invariant, i.e. indépendant du mouvement de la particule. La formule (106.3) laisse apparaître que les durées mesurées, d'une part, par une horloge « fixe » et, d'autre part, par une horloge parfaite « mobile » sont liées par la relation

$$t_2 - t_1 > t_{02} - t_{01}. \tag{106.4}$$

Dans le cas particulier où l'horloge mobile revient à son point de départ (par rapport au référentiel S) elle indiquera un temps plus petit que celui indiqué par l'horloge « fixe ».

4. La meilleure approximation à l'horloge parfaite réalisée à ce jour est l'*horloge atomique* et plus spécialement l'*horloge nucléaire*. L'action des forces d'inertie est équivalente à celle de la force de gravitation (cf. t. I, § 71). Dans les conditions ordinaires ces forces sont négligeables devant les forces électriques et à fortiori devant les forces nucléaires qui déterminent, les unes, les processus dans les couches électroniques, les autres, les processus dans les noyaux des atomes. Les forces d'inertie et de gravitation ne participent pratiquement pas à ces processus intra-atomiques.

Dans l'horloge étalon atomique le phénomène étalon est une transition électronique bien définie de l'atome de césium-133. En

l'absence de tout champ extérieur, la radiation électromagnétique émise exécute $\nu = 9\,192\,631\,770 \approx 10^{10}$ vibrations par seconde; la période de cette radiation sert de base à la *seconde* dite *atomique*. Le rayon de l'atome est $\sim 10^{-8}$ cm. Si on assimile l'atome à un oscillateur harmonique, ses vibrations s'accompagnent d'accélérations énormes $\sim (2\pi\nu)^2 r \sim 10^{13}$ cm/s^2. Si on communique à l'horloge une accélération ~ 1 cm/s^2, on met en œuvre une force 10^{13} fois plus faible qui ne peut évidemment exercer aucune influence notable sur les processus intra-atomiques. Ce n'est que dans le cas où on voudrait mesurer le temps avec une précision relative de $\sim 10^{-12}$ à 10^{-13} que cette petite accélération et le champ de gravitation correspondant seraient susceptibles d'avoir une influence sur la marche de l'horloge et sur ses indications. On devra alors en tenir compte. Les horloges atomiques et nucléaires sont les seules qui conviennent à la mise en évidence et à l'étude de la contraction relativiste du temps, tout au moins aux vitesses petites devant celle de la lumière.

Le phénomène de la désintégration radioactive des atomes ou d'autres particules instables peut assumer les fonctions d'horloge parfaite. La désintégration radioactive obéit à la loi

$$n = n_0 e^{-t/\tau}, \tag{106.5}$$

où n_0 est le nombre initial de particules et n leur nombre au bout d'un temps t. La constante τ est la *durée de vie* de la particule instable. Le rapport n/n_0 définit le temps t. La contraction relativiste du temps a été expérimentalement confirmée dans la désintégration des mésons μ (*muons*). Ce sont des particules chargées instables dont la masse est 207 fois plus grande que celle de l'électron, dont la charge est égale à celle de l'électron, mais peut être négative ou positive. Les muons se forment dans les rayons cosmiques à des altitudes de l'ordre de 10 km. En comparant les flux de muons dans les rayons cosmiques au sommet d'une montagne et au pied de celle-ci, on détermine que dans un référentiel de laboratoire leur durée de vie moyenne est $\tau \approx 10^{-5}$ s. On peut ralentir les muons cosmiques dans un bloc de plomb et séparer les muons lents au moyen d'un dispositif spécial. D'après les mesures la durée de vie d'un muon lent (au repos) est $\tau_0 \approx 2{,}20 \cdot 10^{-6}$ s. Si la contraction relativiste du temps n'existait pas, un flux de muons cosmiques, même possédant la vitesse de la lumière, diminuerait de e fois après un parcours de 600 m environ. Après un parcours de 5 km leur intensité aurait diminué de $e^{50/6} \approx$ ≈ 4000 fois et les muons ne parviendraient pas jusqu'à la surface terrestre. En réalité après un parcours de 5 km leur intensité ne diminue que de $e^{5/3} \approx 5$ fois. La contraction relativiste du temps élimine ce désaccord. La durée de vie τ d'un muon dans un référentiel de laboratoire est liée à la durée de vie propre par la relation $\tau = \tau_0/\sqrt{1-\beta^2}$. D'après les mesures l'énergie cinétique moyenne

des muons cosmiques est $\approx 10^9$ eV. On en déduit que $\sqrt{1-\beta^2} \approx 0{,}1$. On peut donc s'attendre à ce que $\tau \approx 2{,}2 \cdot 10^{-6}/0{,}1 \approx 2 \cdot 10^{-5}$ s. Ce résultat est comparable à celui que fournissent les mesures.

5. La mise en œuvre des accélérateurs de particules chargées a permis de réaliser des expériences de ce type dans des conditions mieux définies et contrôlées. Pour réaliser ces expériences on a recours aux *mésons* π (ou *pions*) dont la masse est 273 fois plus grande que celle de l'électron et la charge est celle de l'électron. Ils se forment en grande quantité lors de l'interaction des protons de grande énergie avec la matière. La durée de vie moyenne d'un pion dans un référentiel par rapport auquel il est au repos est $\tau_0 = 2{,}60 \cdot 10^{-8}$ s. Dans le cyclotron de l'Université de Columbia, on a produit un flux de pions animés d'une vitesse $v = 0{,}75c$ ($\beta = 0{,}75$). Si la contraction du temps n'existait pas, dans le temps τ_0 le faisceau ne parcourait qu'une distance égale à $0{,}75 \cdot 3 \cdot 10^{10} \cdot 2{,}60 \cdot 10^{-8} = 5{,}85$ m. Selon les mesures l'intensité du faisceau diminue de e fois après un parcours de $8{,}5 \pm 0{,}6$ m ; dans le référentiel de laboratoire la durée de vie τ du pion est $1{,}45 \pm 0{,}11$ fois plus grande que sa durée de vie propre τ_0. Ce résultat est conforme à la formule $\tau/\tau_0 = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ qui fournit $\tau/\tau_0 = 1{,}51$.

Les résultats de ces expériences peuvent être interprétés comme une manifestation de la *contraction relativiste de longueur*. En effet, dans un référentiel par rapport auquel le pion est au repos, sa durée de vie est τ_0. Le laboratoire se déplace avec une vitesse v par rapport au pion et parcourt au cours du temps τ_0 une distance $l = v\tau_0$ dans le référentiel lié au pion. Si on mesurait cette distance à l'aide d'une règle graduée, au repos dans le laboratoire, on trouverait $l_0 = l/\sqrt{1-\beta^2} = 8{,}8$ m, en accord avec l'expérience.

6. Hafele et Keating ont réalisé une expérience à l'*échelle macroscopique*, destinée à mettre en évidence le ralentissement relativiste de la marche des horloges. Quatre horloges atomiques en césium identiques ont été installées, en 1971, à bord d'avions de ligne emportant chacun deux horloges autour de la Terre, l'un vers l'Est, l'autre vers l'Ouest. Les intervalles de temps t_{est} et t_{ouest}, mesurés à l'aide des horloges se déplaçant respectivement vers l'Est et vers l'Ouest étaient comparés aux intervalles de temps t_{fixe} mesurés à l'aide d'horloges étalons fixes se trouvant à l'Observatoire Maritime de Washington. Après moyennage des indications des quatre horloges mobiles, on a obtenu les résultats suivants:

$$t_{est} - t_{fixe} = (-59 \pm 10) \cdot 10^{-9}\ \text{s}, \quad t_{ouest} - t_{fixe} = (273 \pm 7) \cdot 10^{-9}\ \text{s}.$$

Voyons quelles sont les prévisions de la théorie de la relativité. L'accélération du centre de la Terre, déterminée par l'attraction gravitationnelle du Soleil, est égale à 0,18 de l'accélération des points de l'équateur terrestre due à la rotation axiale de la Terre.

Bien que cette accélération ne soit pas petite, on peut la négliger en vertu du *principe de l'équivalence des forces de gravitation et des forces d'inertie* (cf. t. I, § 71). En admettant que le champ de gravitation du Soleil est uniforme, l'action de ce champ sera compensée par la force d'inertie centrifuge résultant de la rotation du centre de la Terre autour du Soleil. On peut donc admettre que le centre de la Terre exécute un mouvement rectiligne et uniforme par rapport à un référentiel d'inertie. Il s'ensuit qu'un référentiel non tournant, ayant le centre du Soleil pour origine des coordonnées, sera inertial. C'est ce dernier référentiel que nous utiliserons dans ce qui suit. Posons que les avions contournent le globe terrestre suivant un parallèle à une altitude h et avec une vitesse v par rapport à la Terre. Par rapport au référentiel d'inertie choisi, les vitesses des avions sont: $V_{est} = V_0 + v$, $V_{ouest} = V_0 - v$, où V_0 est la vitesse du laboratoire au sol dans le même référentiel. Posons $h = 0$; si t_0 désigne le temps propre, on aura

$$t_{fixe} = \int dt_0/\sqrt{1 - V_0^2/c^2} \approx t_0 - \frac{V_0^2}{2c^2} t_0,$$

$$t_{est} \approx t_0 - \frac{(V_0 + v)^2}{2c^2} t_0, \quad t_{ouest} \approx t_0 - \frac{(V_0 - v)^2}{2c^2} t_0.$$

Soustrayons de ces expressions les expressions précédentes en remarquant qu'à la précision des calculs on peut remplacer t_0 par t_{fixe} dans le résultat final. On obtient ainsi

$$t_{est} - t_{fixe} = -\frac{2V_0 v + v^2}{2c^2} t_{fixe},$$

$$t_{ouest} - t_{fixe} = \frac{2V_0 v - v^2}{2c^2} t_{fixe}. \qquad (106.6)$$

Il est évident qu'on entend par t_{fixe} le temps de vol des avions, la durée au sol n'y étant pas comprise, puisqu'elle n'affecte pas la valeur des différences $t_{est} - t_{fixe}$ et $t_{ouest} - t_{fixe}$.

En supposant que l'avion fait le tour de la Terre en 24 heures, sa vitesse à la latitude de Washington devrait être $v = V_0 \approx$ ≈ 1000 km/h $= 300$ m/s. Les formules (106.6) fournissent alors les valeurs suivantes: $t_{est} - t_{fixe} \approx -130 \cdot 10^{-9}$ s, $t_{ouest} - t_{fixe} \approx$ $\approx +43 \cdot 10^{-9}$ s.

Le calcul ci-dessus ne tient pas compte de l'influence du *potentiel gravitationnel de la Terre* sur l'écoulement du temps (cf. § 109 et t. I, § 72). Si on en tient compte on devra ajouter aux formules (106.6) la quantité

$$\Delta t_{grav} = \frac{gh}{c^2} t_{fixe}, \qquad (106.7)$$

où h est l'altitude du vol el g l'accélération en chute libre à la surface de la Terre. En posant $h = 10$ km, on trouve $\Delta t_{grav} = 94 \cdot 10^{-9}$ s, ce qui montre que l'« effet de la gravitation » est du même ordre de

grandeur que l'« effet cinématique » évalué ci-dessus. Hafele et Keating ont effectué les calculs en tenant compte de cette correction et calculèrent l'intégrale suivant les trajets réels des avions. Leurs résultats

$$t_{est} - t_{fixe} = (-40 \pm 23) \cdot 10^{-9}\ \mathrm{s}, \quad t_{ouest} - t_{fixe} = (275 \pm 21) \cdot 10^{-9}\ \mathrm{s}$$

sont en bon accord avec les résultats expérimentaux. A noter que la correction Δt_{grav} s'élimine de la différence ($t_{ouest} - t_{est}$), car cette différence n'est déterminée que par l'« effet cinématique » de la contraction du temps. L'accord entre théorie et expérience constitue une preuve indubitable du ralentissement relativiste de la marche des horloges en mouvement.

7. Examinons pour conclure le *paradoxe* dit *des jumeaux*. Le jumeau A reste sur Terre et le jumeau B quitte la Terre à bord d'un vaisseau interstellaire dont la vitesse est proche de la vitesse de la lumière. Au bout de cinq ans, durée repérée sur son horloge, le jumeau B revient sur Terre et retrouve son frère A, qui est devenu un vieillard. B apprend que, d'après l'horloge restée sur Terre, son voyage a duré 50 années terrestres. Ainsi il serait possible d'effectuer, au cours d'une vie humaine, non seulement des voyages dans les profondeurs du Cosmos, mais aussi un *voyage dans le futur*. En laissant de côté les possibilités techniques et pratiques, ces voyages sont en principe réalisables. En effet les processus biologiques ne constituent pas un groupe de phénomènes naturels particulier, et comme tous les autres phénomènes naturels ils sont assujettis aux lois de la Physique. Si on crée à bord d'un vaisseau interstellaire des conditions de vie proches de celles de la vie terrestre, les processus vitaux y évolueront comme sur Terre. Les battements du cœur assument dans l'organisme humain le rôle d'horloges. Au cours d'une vie humaine le cœur exécute sur Terre $2 \cdot 10^9$ battements et il en exécutera autant à bord du vaisseau spatial. Or une horloge en mouvement marche plus lentement qu'une horloge fixe, et par suite lorsque le cœur du jumeau B aura exécuté $1{,}5 \cdot 10^8$ battements, le cœur de son frère A resté à Terre aura exécuté, au moment de leur rencontre, 10 fois plus de battements. C'est ce que l'on appelle le « paradoxe des jumeaux ».

En 1974, le paradoxe des jumeaux a été expérimentalement vérifié sur l'accélérateur du C.E.R.N. (Centre européen de recherches nucléaires à Genève). Les muons accélérés étaient maintenus pendant plus de 150 µs sur une orbite circulaire de rayon de 5 m, à l'aide d'un champ magnétique. Au cours de ce temps ils exécutèrent 10^5 tours. L'énergie des muons était près de 12 fois supérieure à leur énergie au repos, de sorte que $1/\sqrt{1-\beta^2} = 12$. La durée de vie des muons, comptée dans le référentiel de laboratoire, doit être égale à $2{,}2 \cdot 12 = 26{,}4$ µs. Le résultat expérimental était $26{,}37 \pm 0{,}05$ µs.

§ 107. Effet Doppler et aberration de la lumière

1. Si une onde monochromatique, se propageant dans un référentiel « fixe » S suivant une direction donnée, possède une fréquence ω, dans un référentiel « mobile » S' cette onde possédera une autre fréquence ω' et se propagera dans une autre direction. La variation de la fréquence d'une onde qui se manifeste lorsqu'on passe d'un référentiel à un autre est appelée *effet Doppler* (1803-1853) et le changement de sa direction de propagation est appelé *aberration de la lumière*. La théorie de ces effets ne sera donnée ici que pour le cas où la lumière se propage *dans le vide*, car dans ce cas l'espace sera *isotrope* dans les deux référentiels considérés. En présence d'un milieu matériel l'espace ne sera isotrope que dans le référentiel par rapport auquel le milieu est au repos. Dans le référentiel par rapport auquel le milieu est en mouvement apparaît une anisotropie qui complique la théorie de l'effet Doppler et de l'effet d'aberration dans les milieux matériels.

En théorie de la relativité le procédé le plus simple pour déterminer les variations de la fréquence et de la direction de propagation d'une onde consiste à se fonder sur l'*égalité des phases* d'une onde donnée dans les deux référentiels. En supposant que l'onde est plane, cette condition peut s'écrire comme suit :

$$\omega t - \mathbf{kr} = \omega' t' - \mathbf{k'r'}, \qquad (107.1)$$

où $\mathbf{r}$, t et $\mathbf{r}'$, t' sont les coordonnées et le temps d'un seul et même événement dans les référentiels considérés ; l'origine du temps est choisie de telle sorte qu'à l'instant où les origines des coordonnées des deux référentiels coïncident, $t = t' = 0$.

Pour démontrer la condition énoncée, nous supposerons qu'à l'instant $t = t' = 0$, à l'origine des coordonnées, on a apposé une marque sur l'onde qui est telle qu'elle sera transportée par l'onde avec la vitesse de phase ; par conséquent, dans les deux référentiels, la phase des vibrations à l'emplacement de la marque sera égale à $\varphi_1 = \varphi_1' = 0$. Imaginons deux observateurs A et A' se déplaçant arbitrairement dans l'espace ; l'observateur A utilise, pour se repérer dans l'espace et le temps, les coordonnées et l'horloge du référentiel S et l'observateur A' utilise à cet effet les coordonnées et l'horloge du référentiel S'. On peut admettre, sans perte de généralité, que l'observateur A est au repos dans le référentiel S et l'observateur A' est au repos dans le référentiel S'. Cette hypothèse n'est pas nécessaire (généralement dans l'étude de l'effet Doppler on attache le système S à la source lumineuse et le système S' à l'observateur). Les deux observateurs se mettent à compter les ondes qui défilent devant eux, à partir de l'instant où ils voient passer la marque, puis à un certain instant ils se rencontrent. Notons $\mathbf{r}$, t et $\mathbf{r}'$, t' les coordonnées et le temps de cet événement respectivement dans le réfé-

rentiel S et dans le référentiel S'. Selon l'observateur A, à l'instant de sa rencontre avec A', la phase de la vibration qui défile devant lui est $\varphi_2 = \omega t - \boldsymbol{kr}$ et il a dénombré un nombre N d'ondes:

$$N = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2\pi} = \frac{\omega t - \boldsymbol{kr}}{2\pi}.$$

L'observateur A' a dénombré, lui, un nombre d'ondes

$$N' = \frac{\omega' t' - \boldsymbol{k'r'}}{2\pi}.$$

Comme le nombre d'ondes transmises ne peut dépendre de la personne qui les dénombre, on doit avoir

$$N = N', \quad \text{ou} \quad \omega t - \boldsymbol{kr} = \omega' t' - \boldsymbol{k'r'},$$

c.q.f.d.

Pour établir les formules des transformations relativistes de la fréquence et de la direction de propagation de l'onde, il suffit d'exprimer les variables $\boldsymbol{r}$ (x, y, z) et t figurant dans (107.1) en fonction des variables $\boldsymbol{r'}$ (x', y', z') et t' en utilisant pour cela les formules de transformation de Lorentz (105.14). Ayant réalisé cette transformation et identifié les coefficients des mêmes variables, on obtient

$$\omega' = \frac{\omega - k_x V}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{107.2}$$

$$k'_{x'} = \frac{k_x - \omega V/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad k'_{y'} = k_y, \quad k'_{z'} = k_z. \tag{107.3}$$

On trouve de la même façon pour la transformation réciproque:

$$\omega = \frac{\omega' + k'_{x'} V}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{107.4}$$

$$k_x = \frac{k'_{x'} + \omega V/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad k_y = k'_{y'}, \quad k_z = k'_{z'}. \tag{107.5}$$

Les formules (107.2) et (107.4) décrivent l'effet Doppler et les formules (107.3) et (107.5) l'aberration de la lumière.

2. Considérons le cas particulier où l'onde se propage le long de l'axe X. En posant $k_x = \omega/c$ dans (107.2) on trouve

$$\omega' = \omega \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}. \tag{107.6}$$

La variation de fréquence est désignée dans ce cas par le nom d'*effet Doppler longitudinal.* Il est clair que la formule (107.6) peut être déduite de la formule générale (107.4). Si l'observation se fait dans le référentiel S', on trouve que la fréquence de l'onde diminue lorsque ce référentiel se déplace dans le sens de propagation de l'onde, et augmente s'il se déplace à l'encontre de l'onde. Dans le cas d'un déplacement lent, on peut négliger les carrés du rapport $\beta \equiv V/c$

et la formule (107.6) s'écrit

$$\omega' \approx \omega\,(1 - \beta) = \omega\,(1 - V/c). \qquad (107.7)$$

3. Considérons maintenant un autre cas particulier, celui où l'observation se fait dans le référentiel S' perpendiculairement à la direction de l'onde qui s'y propage. Il est préférable d'utiliser ici la formule (107.4) en y posant $k'_{x'} = 0$, ce qui donne

$$\omega' = \omega\sqrt{1-\beta^2} \approx \omega\,(1-\beta^2/2). \qquad (107.8)$$

La fréquence est déplacée dans la *région des grandes longueurs d'onde* au second ordre en β. C'est un effet relativiste, inconnu en théorie classique prérelativiste, que l'on appelle *effet Doppler transversal.*

Pour préciser la nature physique de l'effet Doppler transversal, supposons qu'un train d'ondes composé de N ondes défile devant l'observateur. En se servant de son horloge, l'observateur mesure la durée de passage de ce train d'ondes et la note t'. On a évidemment $\omega' = 2\pi N/t'$. Mesurons la durée de passage de ce train d'ondes avec l'horloge du référentiel S. Pour cela il faut noter les indications de l'horloge aux instants où les extrémités du train passent devant l'observateur. La différence de ces indications détermine la durée t du train d'ondes déterminée par l'horloge du référentiel S. On aura $\omega = 2\pi N/t$ et par conséquent $\omega'/\omega = t/t'$. Le temps t' est mesuré par une *seule et même horloge* fixe par rapport à l'observateur, tandis que le temps t est mesuré par des *horloges différentes* et synchronisées dans le référentiel S. On admettra donc que l'horloge de l'observateur est « fixe » et que les horloges du référentiel S sont « mobiles » (cf. § 106, pt. 2). Or une horloge en mouvement marche plus lentement qu'une horloge fixe, avec $t/t' = \sqrt{1-\beta^2}$, et donc $\omega' = \omega\sqrt{1-\beta^2}$. Ainsi l'effet Doppler transversal est une manifestation de l'effet relativiste de *ralentissement de la marche d'une horloge en mouvement.* Le même effet est responsable de l'apparition du terme $\sqrt{1-\beta^2}$ dans les formules (107.2) et (107.4).

4. L'effet Doppler transversal a été observé pour la première fois en 1938 par Ives et Stillwell qui recommencèrent leurs expériences en 1941. En qualité de source lumineuse, ils utilisèrent un faisceau de rayons canaux composés d'atomes d'hydrogène, animés d'une grande vitesse $v \sim 10^8$ cm/s. Une construction spéciale du tube assurait une bonne uniformité de la vitesse v des rayons canaux, que l'on calculait d'après la différence de potentiel appliquée aux électrodes et la valeur de l'effet Doppler longitudinal. La lumière émise par les atomes perpendiculairement à leur direction de propagation tombait dans un spectrographe. Selon les estimations des expérimentateurs, le spectrographe permettait de mesurer la longueur d'onde à 0,00025 nm près. La principale difficulté de cette expérience résidait en ce qu'à la moindre déviation le faisceau de

rayons canaux ne serait plus perpendiculaire à la ligne d'observation. Le déplacement de fréquence de l'effet Doppler transversal, qui est proportionnel à $(v/c)^2$, serait caché alors par l'effet Doppler longitudinal qui est plus intense, étant de premier ordre en $(v \cos \vartheta)/c$ (ϑ est l'angle entre la vitesse de l'atome et la ligne d'observation). Pour une vitesse des atomes $v \approx 10^8$ cm/s, les deux effets sont comparables pour $\vartheta \sim 5'$. Cette difficulté fut surmontée en disposant l'axe du spectrographe perpendiculairement à un miroir. Dans le spectrographe tombait non seulement la lumière directement émise par les atomes, mais encore la lumière réfléchie par le miroir. Cette dernière peut être considérée comme la lumière émise par les images mouvantes des atomes. Si l'atome se meut suivant une direction faisant l'angle ϑ avec la ligne d'observation, l'image de l'atome se meut sous un angle $\pi - \vartheta$. Les déplacements Doppler de premier ordre dus à l'atome et à son image sont alors égaux et de signes contraires. S'il n'y avait pas de déplacement de second ordre, on observerait dans le spectrographe deux raies $\lambda_1 = \lambda - \Delta\lambda$ et $\lambda_2 = \lambda + \Delta\lambda$ symétriques par rapport à la raie initiale λ. Cette disposition symétrique est perturbée par le déplacement transversal $\delta\lambda$ qui se produit toujours vers les grandes longueurs d'onde. De ce fait $\lambda_1 = \lambda - \Delta\lambda + \delta\lambda$, $\lambda_2 = \lambda + \Delta\lambda + \delta\lambda$, d'où

$$\delta\lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} - \lambda.$$

On arrive à séparer ainsi l'effet Doppler quadratique (transversal) de l'effet Doppler linéaire (longitudinal). Selon (107.8) la variation de longueur d'onde dans l'effet Doppler transversal est déterminée par l'expression

$$\delta\lambda = \frac{1}{2} \lambda\beta^2. \qquad (107.9)$$

Dans l'une des expériences la valeur du déplacement calculée d'après la tension appliquée (6788 V) devait être égale à $\delta\lambda = 0{,}00116$ nm; le déplacement calculé d'après l'effet Doppler longitudinal devait être égal à 0,00109 nm. L'expérience directe fournit $\delta\lambda = 0{,}0011$ nm. Un accord aussi satisfaisant a été obtenu pour d'autres valeurs de la tension appliquée au tube.

Les résultats d'Ives et de Stillwell ont été confirmés par d'autres chercheurs, mais c'étaient les premières expériences où fut démontrée la *contraction relativiste du temps*, quoique Ives et Stillwell tentèrent, sans se référer à la théorie de la relativité, d'interpréter leurs résultats avec la théorie de l'éther universel.

5. Passons à l'étude de l'aberration de la lumière. Introduisons les vecteurs unitaires $\boldsymbol{N}$ et $\boldsymbol{N}'$ orientés suivant les directions de propagation de l'onde dans les référentiels S et S'. On a alors $\boldsymbol{k} =$

$= \omega N/c$, $k' = \omega' N'/c$ et on tire de (107.2) et (107.3)

$$N'_{x'} = \frac{N_x - \beta}{1 - \beta N_x}, \quad N'_{y'} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta N_x},$$

$$N'_{z'} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta N_x}. \qquad (107.10)$$

L'aberration de la lumière fut découverte en 1727 par l'astronome Bradley (1693-1762) lors de l'observation des étoiles au télescope. C'est pour cette raison qu'on l'appelle aussi *aberration astronomique*.

Pour décrire ce phénomène adoptons pour référentiel « fixe » S le référentiel de Copernic (où le Soleil est considéré comme fixe) et pour référentiel « mobile » S' le référentiel lié à la Terre. On négligera complètement la rotation de la Terre autour de son axe et on posera que cette rotation n'existe pas. Orientons les axes X et X' suivant le mouvement orbital de la Terre et notons V la vitesse de ce mouvement. Orientons l'axe Y perpendiculairement à la direction du mouvement orbital de la Terre, mais dans une direction arbitraire. Notons α l'angle que fait dans le référentiel S la direction pointant vers l'étoile (c'est la direction de l'axe du télescope) avec le sens positif de l'axe Y (fig. 334). On a alors $N_x = -\sin\alpha$, $N_y = -\cos\alpha$, $N_z = 0$. Dans le référentiel S' on notera ces quantités par les mêmes symboles accentués. En les portant dans la première formule (107.10) on obtient

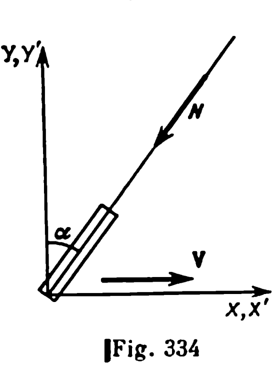


Fig. 334

$$\sin\alpha' = \frac{\sin\alpha + \beta}{1 + \beta\sin\alpha}, \qquad (107.11)$$

ou

$$\sin\alpha = \frac{\sin\alpha' - \beta}{1 - \beta\sin\alpha'}. \qquad (107.12)$$

Ces formules définissent la direction de propagation de l'onde dans un des référentiels lorsqu'on la connaît dans l'autre référentiel.

Considérons le cas particulier où la lumière se propage dans le référentiel S le long de l'axe Y. Dans ce cas $\alpha = 0$ et par suite

$$\sin\alpha' = \beta. \qquad (107.13)$$

Pour observer l'étoile dans le télescope on devra le faire pencher en avant d'un angle α' défini par (107.13) par rapport à la position perpendiculaire. L'angle α' est l'*angle d'aberration*. Si la lumière se propage le long de l'axe Y' dans le référentiel S', i.e. $\alpha' = 0$, on obtient

$$\sin\alpha = -\beta. \qquad (107.14)$$

On devra incliner le télescope du même angle mais en sens opposé. La vitesse du mouvement orbital de la Terre est $V \approx 30$ km/s, de sorte que $\alpha \approx V/c \approx 10^{-4}$ rad $\approx 20{,}5''$.

Si la vitesse V restait constante en grandeur et en direction, la position visible des étoiles sur la voûte du ciel serait invariable et on ne pourrait pas déceler l'aberration. Mais comme la direction du mouvement de la Terre sur l'orbite varie continuellement, la position visible des étoiles sur la voûte céleste sera modifiée par l'aberration. Puisque tous les six mois le sens du mouvement de la Terre s'inverse, le signe de l'angle d'aberration doit s'inverser aussi. Si l'étoile est située dans le plan de l'orbite terrestre, sa position visible exécutera dans ce plan des vibrations rectilignes d'amplitude angulaire $\alpha = V/c = 20{,}5''$ et de période égale à un an. Si la direction de l'étoile (dans le référentiel S) est perpendiculaire au plan de l'orbite terrestre, sa position visible sur la voûte céleste décrira une circonférence de rayon angulaire $20{,}5''$. Dans toutes les positions intermédiaires la trajectoire de la position visible de l'étoile sera une ellipse dont le demi-grand axe a la même dimension angulaire $20{,}5''$. Tel serait l'effet d'aberration de la lumière dans le cas idéal où le seul mouvement de la Terre serait son mouvement circulaire autour du Soleil. En réalité l'aberration est un effet très faible qui se superpose au déplacement des étoiles sur la voûte céleste, résultant de la rotation de la Terre autour de son propre axe. Il fallut faire preuve de beaucoup d'attention dans les observations et d'une parfaite technique expérimentale pour déceler et mesurer cet effet. C'est ce que fit Bradley.

Notons expressément que l'effet d'aberration de la lumière n'a aucun rapport avec la vitesse de déplacement des étoiles par rapport à la Terre, et ne fait que refléter la *variation de la vitesse* de ce mouvement relatif, déterminée par le mouvement de la Terre. C'est pour cela que l'aberration est la même *pour toutes les étoiles*, quoique leurs vitesses par rapport à la Terre soient très différentes.

6. Bradley estimait que le phénomène de l'aberration de la lumière démontrait que la vitesse de la lumière était finie. Ayant mesuré l'angle d'aberration α il calcula la vitesse de la lumière par la formule $\alpha = V/c$. C'était la deuxième détermination de la vitesse de la lumière (la première fut effectuée par Römer). Bradley interpréta le phénomène qu'il avait découvert en se plaçant au point de vue de la théorie corpusculaire de la lumière de Newton. En cinématique non relativiste, les vitesses $\mathbf{v}$ et $\mathbf{v}'$ des grains de lumière dans les référentiels S et S' sont liées par la relation $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}$. Considérons le cas particulier où le grain de lumière se déplace dans le référentiel S suivant l'axe Y avec la vitesse $v_y = -c$. Dans le référentiel S' apparaît une composante rectangulaire de la vitesse du grain de lumière $v'_x = v_x - V_x = -V$. De ce fait, dans le référentiel S' la trajectoire du grain de lumière fera avec l'axe Y' un

angle α' défini par la formule

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{v'_x}{v'_y} = \frac{V}{c} = \beta. \qquad (107.15)$$

Dans la théorie corpusculaire de Newton c'est cette formule qui définit l'angle d'aberration. Lorsque l'angle α' est petit, cette formule coïncide avec la formule relativiste (107.13) où on négligerait les termes quadratiques en β. Si on appliquait au mouvement du grain de lumière la loi relativiste de composition des vitesses (compte tenu de ce que la vitesse du grain de lumière est c), on aurait retrouvé les formules relativistes (107.10). L'observation de l'effet d'aberration ne permet donc pas de décider en faveur de la théorie ondulatoire ou de la théorie corpusculaire de la lumière.

7. L'interprétation de l'aberration par les théories ondulatoires, même sous la forme électromagnétique, se heurta à de grandes difficultés tant que ces théories étaient mécanistes. Elles étaient toutes déficientes parce qu'elles se fondaient sur des hypothèses mal fondées sur les propriétés mécaniques de l'éther et sur le mouvement de celui-ci par rapport à la Terre. Ce n'est que la théorie de la relativité qui fournit une interprétation correcte et simple de l'effet d'aberration (et de l'effet Doppler en optique).

A ce propos il est tout indiqué de faire quelques remarques au sujet d'une question posée par la théorie de l'éther appliquée à l'optique. L'angle d'aberration variera-t-il si on remplit d'eau le télescope qui sert aux mesures? Les théories de la lumière, fondées sur le concept de l'éther universel, donnaient à cette question des réponses variées, suivant les hypothèses concernant le mouvement de l'éther par rapport à la Terre. La vérification expérimentale fut réalisée en 1871 par Airy, qui constata que l'angle d'aberration ne changeait pas lorsqu'il remplissait d'eau le télescope. Pour la théorie de la relativité cette question est simple. Pour simplifier la discussion inversons le sens de propagation de la lumière en supposant que la source lumineuse est située au foyer principal de l'objectif du télescope. Comme l'éther n'existe pas, dans le référentiel par rapport auquel le télescope est au repos, l'eau ou l'air se trouvant dans le télescope ainsi que les verres de l'objectif sont des milieux isotropes. Dans ce référentiel les rayons lumineux émergent du télescope parallèlement à son axe optique principal, que le télescope soit rempli d'eau ou d'air. Pour déterminer l'angle d'aberration, il suffit de passer dans un référentiel mobile S'. On peut le faire pour une onde *qui a déjà quitté le télescope*. La direction de propagation de cette onde ne dépend absolument pas de la nature du milieu que contient le télescope. Ni l'existence du télescope ni celle du milieu n'affectent nullement le passage d'un référentiel à un autre. Il s'ensuit que l'angle d'aberration ne dépend pas du milieu contenu dans le télescope.

§ 108. Effet Doppler dans l'acoustique et la théorie de l'éther

Doppler découvrit l'effet qui porte son nom en 1842 pour les ondes acoustiques. Plus tard, la théorie de l'effet fut appliquée sans aucune modification à l'optique, en postulant que la théorie ondulatoire de l'éther était juste. A la place de l'air dans lequel se propagent les ondes acoustiques, on trouve en optique l'éther lumineux; par ailleurs tous les raisonnements sont identiques en acoustique et en optique. La théorie de l'éther universel n'est aujourd'hui qu'une réminiscence historique, mais l'effet Doppler acoustique a conservé toute sa valeur. Il est par suite utile d'en donner la théorie, mais comme ce volume est consacré à l'optique, nous parlerons d'ondes lumineuses se propageant dans l'éther. Pour passer à l'acoustique il suffira de remplacer le mot « éther » par le mot « air » et les ondes lumineuses par les ondes acoustiques.

Dans la théorie de l'éther le phénomène fait intervenir, en plus de la source et de l'observateur, un milieu intermédiaire — l'éther lumineux. La théorie correspondante de l'effet Doppler s'en trouve compliquée et présente un caractère indéterminé, puisqu'on ne peut préciser dans chaque cas concret comment se déplacent la source et l'observateur par rapport à cet éther insaisissable. Les différentes théories de l'éther se distinguaient les unes des autres surtout par le choix du référentiel dans lequel l'éther était au repos et se comportait donc comme un milieu optique isotrope. Soit une onde monochromatique plane se propageant dans l'éther. Dans un référentiel où l'éther est au repos, la fréquence de l'onde est ω et le vecteur d'onde est $\boldsymbol{k} = \omega \boldsymbol{N}/c$, où $\boldsymbol{N}$ est le vecteur unitaire le long duquel se propage l'onde. Dans ce référentiel la phase de l'onde est donnée par $\varphi = \omega t - \boldsymbol{kr}$. Posons que par rapport à l'éther la source soit animée d'un mouvement uniforme avec une vitesse $\boldsymbol{V}_s$ et l'observateur avec une vitesse $\boldsymbol{V}_0$. Les rayons vecteurs de la source et de l'observateur sont respectivement $\boldsymbol{r}_s = \boldsymbol{V}_s t$ et $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{V}_0 t$. Les phases des vibrations en ces points mobiles sont: $\varphi_s = (\omega - \boldsymbol{kV}_s)\, t$ et $\varphi_0 = (\omega - \boldsymbol{kV}_0)\, t$. Il s'ensuit que dans le référentiel par rapport auquel elle est au repos, la source émet des ondes de fréquences $\omega_s = \omega - \boldsymbol{kV}_s$, tandis que l'observateur perçoit la fréquence $\omega_0 = \omega - \boldsymbol{kV}_0$. En divisant membre à membre et en remarquant que $\boldsymbol{k} = \omega \boldsymbol{N}/c$ on élimine la fréquence intermédiaire ω et on obtient

$$\frac{\omega_0}{\omega_s} = \frac{1 - (\boldsymbol{NV}_0)/c}{1 - (\boldsymbol{NV}_s)/c}. \tag{108.1}$$

C'est la formule qui donne la variation de la fréquence par effet Doppler dans la théorie de l'éther et en acoustique. Nous voyons que dans cette théorie la fréquence ω_0 est déterminée par les mouvements de la source et de l'observateur *par rapport à l'éther* ainsi que par la direction de propagation $\boldsymbol{N}$ de l'onde dans l'éther au repos. C'est ce qui la distingue de la théorie de la relativité qui se passe du concept d'éther et où l'effet Doppler ne dépend que de la vitesse de la source *par rapport à l'observateur* $(\boldsymbol{V}_s - \boldsymbol{V}_0)$. Pour une même vitesse relative $(\boldsymbol{V}_s - \boldsymbol{V}_0)$ la formule (108.1) fournit des résultats différents suivant que c'est la source ou l'observateur qui est en mouvement. Lorsque la source est mobile et l'observateur fixe, on a

$$\omega_0 = \frac{\omega_s}{1 - \boldsymbol{NV}_s/c} \tag{108.2}$$

et dans le cas où l'observateur est mobile et la source fixe

$$\omega_0 = \omega_s\,(1 - \boldsymbol{NV}_0/c). \tag{108.3}$$

Dans l'approximation linéaire, lorsqu'on peut négliger dans (108.1) les carrés des rapports V_s/c et V_0/c, cette formule devient

$$\frac{\omega_0}{\omega_s} = 1 + \frac{\boldsymbol{N}}{c}(\boldsymbol{V}_s - \boldsymbol{V}_0). \tag{108.4}$$

Dans cette formule ne figure que la vitesse relative ($V_s - V_0$) et non pas les valeurs individuelles de V_s et V_0. Mais cette formule ne détermine pas encore la variation de la fréquence, puisqu'elle contient encore la direction N de propagation de l'onde dans l'éther au repos. En effet, quoique l'onde soit envoyée de la source vers l'observateur, du fait de l'aberration, sa direction varie avec la variation du mouvement de l'éther. Ce n'est que dans le cas particulier où la source ou l'observateur est au repos par rapport à l'éther que l'indétermination disparaît et la formule (108.4) coïncide avec la formule de première approximation de la théorie de la relativité. On peut l'écrire alors sous la forme

$$\omega_0 = (1 + V_N/c), \tag{108.5}$$

où V_N est la vitesse de la source par rapport à l'observateur suivant le rayon de vision. Cette vitesse est positive lorsque la source s'approche de l'observateur et négative lorsqu'elle s'en éloigne.

Cet exposé montre toutes les simplifications qu'apporte la relativité dans la théorie de l'effet Doppler et de l'aberration de la lumière.

PROBLÈME

La figure 335 représente un schéma de l'expérience de Foucault destinée à la mesure de la vitesse de la lumière dans un milieu matériel. Les rayons lumineux envoyés par la source S, après avoir traversé une lame de verre M et la lentille L, sont réfléchis par un miroir plan R pouvant tourner autour d'un

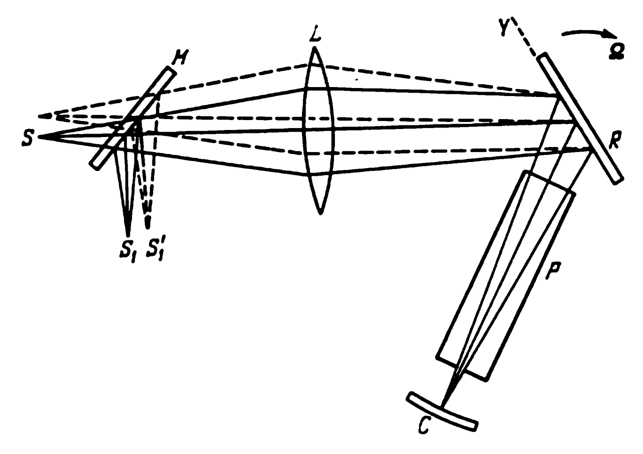


Fig. 335

axe perpendiculaire au plan de la figure. La lentille L forme une image de la source S sur la surface d'un miroir concave C dont le centre de courbure est confondu avec l'axe de rotation du miroir R. Le vase P est rempli de la substance dans laquelle on cherche à mesurer la vitesse de la lumière. Lorsque le miroir R est fixe, les rayons réfléchis par C et R se recoupent à nouveau au point S. Le miroir M dévie une partie des rayons et forme une image réelle de la source au point S_1. Lorsqu'on tourne le miroir R l'image S_1 se déplace en S_1'. La mesure du déplacement S_1S_1' permet de calculer la vitesse de la lumière dans la substance étudiée. Lorsque les rayons sont réfléchis par un miroir en mouvement, il se produit une variation de la fréquence de la lumière par effet Doppler.

En tenant compte de l'effet Doppler, démontrer que la méthode de Foucault fournit la *vitesse de groupe de la lumière.*

S o l u t i o n. Sans perte de généralité, on peut admettre que les lames d'air entre R et P ainsi qu'entre P et C sont infiniment minces, ce qui permet de négliger leur épaisseur dans tous les calculs.

Usuellement le calcul se fait de la manière suivante. Le front d'onde qui se propage avec la vitesse de phase v met un temps $T = 2D/v$ pour parcourir en aller et retour la distance D entre les miroirs R et C. Au cours de cet intervalle de temps le miroir R tourne d'un angle $\varphi = T\Omega$, où Ω est la vitesse angulaire de rotation du miroir. Le rayon réfléchi par le miroir R tourne avec une vitesse angulaire deux fois plus grande et pendant l'intervalle de temps T il tourne d'un angle $\alpha = 2\varphi = 2T\Omega = (4D/v)\,\Omega$. Connaissant le déplacement S_1S_1', on calcule l'angle α. Ainsi

$$v = 4D\Omega/\alpha. \tag{108.6}$$

Ce raisonnement ne tient pas compte de la variation par effet Doppler de la fréquence de la lumière réfléchie par le miroir tournant R et c'est pour cela qu'il ne permet pas de préciser de quelle vitesse il s'agit dans la formule (108.6).

Plaçons l'origine des coordonnées sur l'axe du miroir tournant R et dirigeons l'axe Y suivant la ligne d'intersection du plan de R avec le plan de la figure. Comme les vitesses linéaires des différents points du miroir R sont différentes, la variation de la fréquence de l'onde réfléchie dépend du point de réflexion. Il s'ensuit que différents points du front d'onde se propagent dans le milieu avec des vitesses de phase différentes, ce qui détermine la rotation du front d'onde dans le milieu. Si on prend pour sens positif de rotation le sens de rotation du miroir R, la vitesse angulaire de rotation du front d'onde dans le milieu sera

$$\Omega' = \frac{1}{\cos\varphi}\,\frac{dv}{dy} = \frac{1}{\cos\varphi}\,\frac{dv}{d\omega}\,\frac{d\omega}{dy},$$

où φ est l'angle d'incidence des rayons lumineux sur le miroir R. Comme $v = \omega/k$, on a

$$\frac{dv}{d\omega} = \frac{1}{k} - \frac{\omega}{k^2}\,\frac{dk}{d\omega} = \frac{v}{\omega} - \frac{v^2}{\omega u},$$

où u est la vitesse de groupe. Il reste à calculer $d\omega/dy$. En notant ω la fréquence de l'onde réfléchie en un point du miroir de coordonnée y et $\omega + d\omega$ la fréquence de l'onde réfléchie en un point de coordonnée $y + dy$, on a au premier ordre $d\omega/\omega = -\frac{2}{c}\,\Omega\cos\varphi\,dy$ d'où

$$\frac{1}{\cos\varphi}\,\frac{d\omega}{dy} = -2\Omega\frac{\omega}{c} = -2\Omega\frac{\omega}{nv},$$

où n est l'indice de réfraction. On obtient alors

$$\Omega' = \left(\frac{v^2}{\omega u} - \frac{v}{u}\right) 2\Omega\frac{\omega}{nv} = \frac{2\Omega}{n}\left(\frac{v}{u} - 1\right).$$

Le front d'onde réfléchi par le miroir C tournera lui aussi dans la substance où se propage l'onde avec la vitesse angulaire Ω' et dans le même sens que le front d'onde incident. D'autre part, le front d'onde met un temps $T = 2D/v$ pour traverser une couche de substance d'épaisseur $2D$. Au cours de ce temps le front d'onde tourne dans le milieu d'un angle $\Omega'T = \frac{4D\Omega}{nv}\left(\frac{v}{u} - 1\right)$. A l'émergence du vase P dans le vide le front d'onde subit une réfraction et l'angle de rotation augmente de n fois, i.e.

$$n\Omega'T = \frac{4D\Omega}{v}\left(\frac{v}{u} - 1\right) = \frac{4D\Omega}{u} - \frac{4D\Omega}{v}.$$

On doit ajouter cet angle de rotation à l'angle $4D\Omega/v$ qui avait été calculé sans tenir compte de l'effet Doppler. Par conséquent l'angle de rotation α mesuré est égal à

$$\alpha = \frac{4D\Omega}{v} + \left(\frac{4D\Omega}{u} - \frac{4D\Omega}{v}\right) = \frac{4D\Omega}{u},$$

et à la place de la formule (108.6) on trouve

$$u = 4D\Omega/\alpha. \qquad (108.7)$$

Il s'ensuit que la méthode de Foucault fournit la vitesse de groupe.

§ 109. Contraction du temps dans le champ de gravitation

1. Les questions de la théorie relativiste de la gravitation sont de la pertinence de la *théorie de la relativité générale* que nous n'exposons pas dans ce cours. Nous ne donnerons qu'un bref aperçu de l'influence du champ de gravitation sur le cours du temps. Nous fonderons nos raisonnements sur le *principe d'équivalence des forces de gravitation et des forces d'inertie*, qui a été traité en détail dans le t. I, § 71. Nous poserons que le champ de gravitation est faible (le critère de la petitesse du champ est donné ci-dessous).

Choisissons arbitrairement un référentiel d'inertie S en différents points duquel sont fixées des horloges qui ont été synchronisées conformément à la règle d'Einstein. Nous noterons t le temps mesuré par ces horloges synchronisées. Supposons qu'une horloge A se déplace avec accélération par rapport au référentiel S. Notons t_0 les temps que marque l'horloge A en différents points de son trajet. Comme on suppose que l'horloge A est parfaite, l'accélération à laquelle elle est soumise n'affecte pas les processus physiques qui déterminent son fonctionnement. Cette horloge marche à la même allure que les horloges des référentiels d'inertie associés. Les intervalles de temps mesurés par les horloges fixes et l'horloge mobile sont liés par la relation

$$dt = dt_0/\sqrt{1-(v/c)^2}, \qquad (109.1)$$

où v est la vitesse de l'horloge A par rapport au référentiel S. Comme dans ce dernier il n'y a aucun champ de gravitation, la seule cause de la contraction du temps t_0 par rapport au temps t est le *mouvement de l'horloge A* par rapport au référentiel d'inertie S.

2. On peut cependant se placer à un point de vue différent. Supposons d'abord que l'horloge A se meut avec l'accélération constante a par rapport au référentiel S. Repérons le temps t à partir de l'instant où la vitesse v est nulle. On a alors $v = \sqrt{2ax}$, où x est la distance que parcourt l'horloge A dans le temps t. Par conséquent

$$dt = dt_0/\sqrt{1-2ax/c^2}. \qquad (109.2)$$

Introduisons maintenant un référentiel accéléré S_0 qui se déplace avec l'horloge A. Par rapport à S_0 l'horloge A est fixe, mais elle y

est soumise à des forces d'inertie. Si on rapporte tous les phénomènes au référentiel S_0, la contraction du temps t_0 peut être attribuée aux *forces d'inertie*. La force d'inertie rapportée à l'unité de masse du corps en mouvement est égale à $-\boldsymbol{a}$. Or selon le principe d'équivalence, les actions physiques des forces d'inertie ne peuvent être discernées de l'action d'un champ gravitationnel dont l'intensité $\boldsymbol{g} = -\boldsymbol{a}$ dans le cas considéré. Introduisons le *potentiel de gravitation* $\varphi = -gx$. La formule (109.2) s'écrira alors

$$dt = dt_0/\sqrt{1-2\varphi/c^2} \approx dt_0\left(1-\frac{\varphi}{c^2}\right) \tag{109.3}$$

ou

$$\frac{dt-dt_0}{dt_0} = -\frac{\varphi}{c^2}. \tag{109.4}$$

On prend pour zéro du potentiel de gravitation le potentiel en un point où l'horloge fixe et l'horloge mobile marchent également vite. Au lieu de mesurer l'intervalle de temps dt figurant dans (109.3) et (109.4) avec l'horloge du référentiel d'inertie S, on le mesurera avec l'horloge qui est au repos dans le référentiel S_0 au point B de potentiel nul. On peut placer le zéro du potentiel de gravitation en un point arbitraire, à condition d'écrire la formule (109.4) sous la forme suivante:

$$\frac{dt_{0A}-dt_{0B}}{dt_{0A}} = \frac{\varphi_B-\varphi_A}{c^2}, \tag{109.5}$$

où les intervalles de temps dt_{0A} et dt_{0B} sont repérés sur deux horloges fixes situées aux points A et B de potentiels φ_A et φ_B du référentiel accéléré S_0. Ces potentiels doivent satisfaire au critère de « champ faible »:

$$\left|\frac{\varphi_B-\varphi_A}{c^2}\right| \ll 1, \tag{109.6}$$

qui exprime la condition de validité de la théorie de la gravitation de Newton; ce n'est qu'à cette condition que la notion de potentiel de gravitation a un sens. (A la surface de la Terre $\varphi/c^2 \approx 7\cdot10^{-10}$, à la surface du Soleil $\varphi/c^2 \approx 2{,}12\cdot10^{-6}$, à condition que le zéro de potentiel soit repoussé à l'infini.) On peut donc mettre en dénominateur de (109.5) soit dt_{0A} soit dt_{0B}.

La signification physique de la formule (109.5) est la suivante. Plaçons aux points A et B d'un champ de gravitation des horloges identiques qui sont au repos dans le référentiel S_0. Pour comparer la marche de ces horloges, envoyons à chaque battement de l'horloge A un signal lumineux vers l'horloge B. Soit N_A le nombre de signaux envoyés. Pendant le temps que met le signal pour arriver en B,

l'horloge B exécute N_B battements. N_A et N_B vérifient la relation

$$\frac{N_A - N_B}{N_A} = \frac{\varphi_B - \varphi_A}{c^2}. \qquad (109.7)$$

Si $\varphi_A < \varphi_B$ (le signal lumineux se propage à l'encontre du champ de gravitation), on a $N_A > N_B$, ce qui signifie que l'horloge B marchera plus lentement que l'horloge A. Dans le cas où $\varphi_B < \varphi_A$, c'est l'horloge A qui retarde. D'une façon générale, *une horloge soumise à l'action d'un champ de gravitation retarde d'autant plus que le potentiel de gravitation au point où elle se trouve est grand.* Cet effet, ainsi que l'effet de retard de marche d'une horloge en mouvement doivent être considérés comme une *propriété de l'espace-temps*, et non pas comme l'action qu'exerce le champ de gravitation sur l'évolution des processus physiques dans les horloges. Nous savons (§ 106) que s'il s'agit d'une horloge réelle, l'action du champ de gravitation existe sûrement, mais dépend de la nature du phénomène physique mis en œuvre pour repérer le temps. Si l'horloge est parfaite, cette action est nulle et l'effet gravitationnel de ralentissement de la marche se manifeste à l'état pur. Cette circonstance se retrouve dans la formule (109.5) en ce que le ralentissement gravitationnel du temps est une *propriété réciproque des deux horloges*, déterminée par la différence des potentiels de gravitation entre les points où se trouvent les horloges; quant aux processus physiques mis en œuvre dans l'horloge, ils sont affectés non par le potentiel, mais par l'intensité du champ de gravitation.

La formule (109.5) est vérifiée que le champ gravitationnel soit un champ « fictif » des forces d'inertie ou un champ de gravitation « véritable » créé par des masses de substance. Or cette formule a été établie pour un champ de gravitation uniforme. En utilisant le procédé usuel étendons cette formule à un *champ de gravitation non uniforme.* Imaginons que dans un référentiel S_0 on dispose le long de la courbe AB reliant entre elles les horloges A et B un grand nombre d'horloges identiques 1, 2, 3, . . ., n. On peut poser que le champ de gravitation est uniforme entre tout couple d'horloges voisines, ce qui permet d'appliquer à chacun de ces couples la formule (109.5). En multipliant membre à membre toutes ces formules et en remarquant qu'à la précision des calculs près on peut négliger les différences entre les dénominateurs on retrouve le résultat (109.5), ce qui prouve sa validité pour le cas d'un champ non uniforme.

Puisqu'en présence d'un champ de gravitation, des horloges identiques, placées en des points différents de l'espace, sont discordantes, les procédés de synchronisation et de repérage de la simultanéité d'événements se produisant en des lieux différents, que nous avons utilisés dans les référentiels d'inertie, où il n'y avait pas de

champ de gravitation, ne sont plus valables. N'a de sens que le *temps local* que l'on mesure en chaque point de l'espace à l'aide d'horloges identiques. Il s'agit alors non plus de la synchronisation d'horloges spatialement séparées, mais d'une comparaison de *leur marche*, comme décrit plus haut.

Compte tenu de ces développements, on peut interpréter différemment le paradoxe des jumeaux. L'horloge du jumeau A se trouve constamment dans un référentiel d'inertie, tandis que l'horloge du jumeau B est soumise à une accélération, ce qui équivaut à dire qu'elle est fixe mais se trouve dans un champ de gravitation qui la fait retarder. De ce fait lorsque B rejoint A, l'horloge de B marque un intervalle de temps plus court que l'horloge de A.

Récemment (1976) un groupe de physiciens de l'Université de Maryland (U.S.A.) ont confirmé expérimentalement l'effet de contraction du temps résultant de la gravitation. On mesurait la différence des indications d'horloges atomiques disposées à bord d'un avion en vol et dans un laboratoire terrestre. L'avion volait à 10 km d'altitude à petite vitesse, afin de réduire l'effet cinématique de contraction du temps. Le vol dura 15 heures. L'effet gravitationnel attendu était de +50 ns environ et l'effet cinématique de —7 ns. On comparait les horloges avant, pendant et après le vol, ce qui permettait de noter l'accroissement monotone de la différence de leurs indications. Les prévisions théoriques ont été confirmées à 1,6 % près.

3. Appliquons les résultats ci-dessus à l'émission de la lumière. Considérons deux atomes identiques occupant des positions fixes A et B dans un champ de gravitation et émettant chacun des radiations lumineuses de même fréquence ω_0. En assimilant ces atomes à des horloges on peut leur appliquer la formule (109.5) ou (109.7):

$$\frac{\omega_0-\omega}{\omega_0}=\frac{\varphi_B-\varphi_A}{c^2}, \qquad (109.8)$$

où ω est la fréquence de la lumière qui parvient au point d'observation B en venant de A. Si la lumière se propage en allant du potentiel inférieur φ_A vers le potentiel supérieur φ_B (i.e. à l'encontre du champ de gravitation), la fréquence se déplace *vers le rouge*. Pour une lumière venant de la surface du Soleil sur la Terre, cette variation de fréquence est égale à $(\omega_0 - \omega)/\omega_0 = 2{,}12\cdot 10^{-6}$. Dans le cas où la lumière se propage dans le sens allant d'un potentiel élevé vers un potentiel moindre (c'est le sens du champ de gravitation) la fréquence de la lumière observée *s'accroît*. C'est le *phénomène de déplacement gravitationnel des raies spectrales*, qui avait été prédit par Einstein et confirmé ensuite par l'expérience. Ce phénomène a été interprété d'une façon différente au § 72 du tome I.

§ 110. Composition des vitesses dans la théorie de la relativité

1. Le problème de la composition (physique) des vitesses s'énonce comme suit (cf. t. I, § 7). Soit v' la vitesse d'une particule mobile dans le référentiel S' et soit V la vitesse de translation uniforme de S' suivant l'axe X par rapport à un référentiel « fixe » S. Déterminer la vitesse v de la particule dans le référentiel S. Notons x, y, z les coordonnées de la particule à l'instant t dans le référentiel S, et t', x', y', z' les mêmes grandeurs dans le référentiel S'. Comme ces deux ensembles de variables caractérisent un *seul et même événement* (passage de la particule par un même point spatio-temporel), ils sont liés par les formules de transformation de Lorentz (105.12). Puisque V = const, le déplacement de la particule s'accompagne d'accroissements des coordonnées et de temps, égaux à

$$dx = \frac{dx' + V dt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt = \frac{dt' + Vx'/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

En divisant chacune des trois premières relations par la dernière et en remarquant que $dx/dt = v_x$, $dx'/dt' = v'_x$, on obtient

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V/c^2}, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 + v'_x V/c^2},$$

$$v_z = \frac{v'_z \sqrt{1-\beta^2}}{1 + v'_x V/c^2}. \qquad (110.1)$$

Ce sont les *formules de composition des vitesses de la cinématique relati viste*. Dans le cas de mouvements lents, on peut négliger les quantités V^2/c^2 et $v'_x V/c^2$ et ces formules se réduisent aux formules non relativistes

$$v_x = v'_x + V, \quad v_y = v'_y, \quad v_z = v'_z$$

qui résultent de la transformation de Galilée.

2. Pour faciliter la discussion des formules (110.1) on prendra pour unité de vitesse la vitesse de la lumière c en introduisant les quantités sans dimension $\beta_x = v_x/c$, $\beta'_x = v'_x/c$, . . . On trouve alors

$$\beta_x = \frac{\beta'_x + \beta}{1 + \beta\beta'_x}, \quad \beta_y = \frac{\beta'_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \beta\beta'_x}, \quad \beta_z = \frac{\beta'_z \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \beta\beta'_x}. \qquad (110.2)$$

Aucune vitesse ne peut être supérieure à c et aucune des quantités sans dimension β, β'_x, ... ne peut donc être supérieure à l'unité. On peut cependant se demander si à la suite d'une composition (physique) des vitesses il ne pourrait apparaître une vitesse supérieure à c. La réponse est naturellement négative.

Pour le démontrer considérons d'abord le cas de la composition de deux vitesses parallèles, les vecteurs v' et V étant de même sens ou de sens opposés. La vitesse résultante est donnée par la première

formule (110.1) ou par la première formule (110.2) qui lui est équivalente. Puisque ni β ni β'_x ne peuvent être plus grands que l'unité, on peut les représenter par $\beta = \mathrm{th}\,\vartheta$, $\beta'_x = \mathrm{th}\,\vartheta'_x$, où les arguments ϑ et ϑ'_x des tangentes hyperboliques peuvent prendre n'importe quelle valeur réelle. La première formule (110.2) s'écrira alors

$$\beta_x = \frac{\mathrm{th}\,\vartheta'_x + \mathrm{th}\,\vartheta}{1 + \mathrm{th}\,\vartheta\,\mathrm{th}\,\vartheta'_x}.$$

En l'identifiant avec la formule d'addition des tangentes hyperboliques

$$\mathrm{th}\,(\vartheta'_x + \vartheta) = \frac{\mathrm{th}\,\vartheta'_x + \mathrm{th}\,\vartheta}{1 + \mathrm{th}\,\vartheta + \mathrm{th}\,\vartheta'_x}$$

on voit que la vitesse résultante sans dimension peut également être représentée par $\beta_x = \mathrm{th}\,\vartheta_x$, avec

$$\vartheta_x = \vartheta'_x + \vartheta. \qquad (110.3)$$

Ainsi la composition (physique) de vitesses parallèles se réduit à l'addition algébrique des arguments des tangentes hyperboliques correspondantes. Mais comme la valeur absolue de la tangente hyperbolique ne peut être supérieure à l'unité, quelle que soit la valeur de son argument, la composition (physique) de deux vitesses parallèles ne peut produire une vitesse plus grande que c. Si l'une des vitesses est égale à c, l'addition de n'importe quelle autre vitesse ne peut donner qu'une résultante égale à c. C'est la manifestation de l'existence d'une vitesse limite égale à la vitesse de la lumière.

Considérons maintenant la composition de deux vitesses rectangulaires. Sans restreindre la généralité, on posera que la vitesse v' est dirigée suivant l'axe Y'. En posant $\beta'_x = \beta'_z = 0$ dans (110.2), on obtient

$$\beta_x = \beta, \quad \beta_y = \beta'_y \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \beta_z = 0.$$

Le carré de la vitesse (sans dimension) dans le référentiel S est

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \beta_x^2 + \beta_y^2 = \beta^2 + \beta_y'^2 (1 - \beta^2).$$

En attribuant à β une valeur arbitraire et constante, étudions la variation de $(v/c)^2$ en fonction de $\beta_y'^2$. La dérivée de cette quantité est $(1 - \beta^2) \geqslant 0$; il s'ensuit que $(v/c)^2$ croît avec $\beta_y'^2$ et atteint son maximum égal à l'unité pour $\beta_y'^2 = 1$. Pour toutes les autres valeurs de β'_y le rapport $(v/c)^2$ ne peut être supérieur à l'unité. Ainsi par composition de vitesses rectangulaires la vitesse résultante ne peut être supérieure à la vitesse de la lumière c.

3. Lorsqu'on additionne des vitesses parallèles, on peut omettre l'indice x et écrire

$$v = \frac{v' + V}{1 + v'V/c^2}. \tag{110.4}$$

Lorsque $V \ll c$, il suffit de conserver dans cette formule les termes de premier degré en V. Dans cette approximation

$$v \approx (v' + V)\left(1 - \frac{v'V}{c^2}\right) \approx v' + \left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)V. \tag{110.5}$$

Appliquons cette formule à la propagation de la lumière dans un liquide animé d'une vitesse constante V. La vitesse de la lumière par rapport au liquide immobile est $v' = c/n$, n étant l'indice de réfraction du liquide. En supposant que la lumière se propage dans le sens d'écoulement du liquide, calculons sa vitesse v par rapport à un référentiel « fixe ». En portant $v'/c = 1/n$ dans (110.5) on obtient

$$v = \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)V. \tag{110.6}$$

Cette formule avait déjà été établie par Fresnel en 1818, en partant de l'idée que l'éther serait partiellement entraîné par les corps en

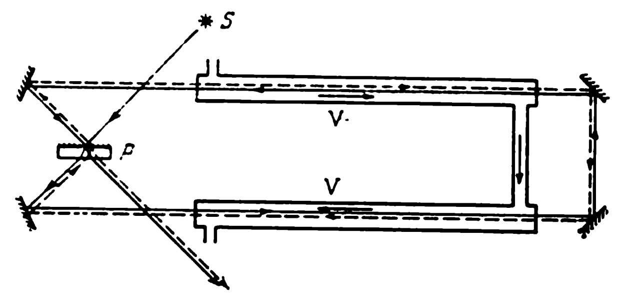


Fig. 336

mouvement. Lorentz retrouva cette formule dans sa théorie électronique, mais la vraie signification physique de la formule (110.6) n'a été élucidée que par la théorie de la relativité.

En 1851, Fizeau confirma expérimentalement la formule (110.6). La figure 336 représente le schéma de l'expérience sous la forme perfectionnée que lui conféra Michelson en 1886. Un rayon envoyé par la source S est divisé en deux par la lame P; sur la figure 336 un des rayons est représenté en trait continu et l'autre en pointillé. Les rayons traversent ensuite des tubes remplis d'eau courante; l'un des rayons se propage dans le sens du courant d'eau et l'autre se propage à l'encontre du courant. Comme les vitesses des rayons lumineux par rapport aux parois fixes des tubes sont différentes il apparaît à l'émergence une différence de marche qui varie en fonction de la vitesse d'écoulement V. On observe d'abord les interférences entre les rayons qui émergent de l'eau au repos, puis les inter-

férences entre les rayons ayant traversé l'eau courante. Par mesure du déplacement des franges d'interférences, on détermine la différence de marche des rayons due à l'écoulement de l'eau et la différence des vitesses $v - c/n$.

4. Dans sa théorie électronique Lorentz généralisa la formule (110.6) en tenant compte de la dispersion de la lumière. Il est facile d'établir la formule de Lorentz en théorie de la relativité ; il suffit de tenir compte de la variation de la longueur d'onde de la lumière par effet Doppler dans l'eau courante. Notons λ la longueur d'onde de la lumière dans le vide dans le référentiel « fixe » S et $\lambda + \delta\lambda$ sa valeur dans le référentiel S' par rapport auquel l'eau courante est fixe. La variation Doppler de la longueur d'onde $\delta\lambda$, au premier ordre en V, est définie par l'expression

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{V}{v'} = \frac{Vn}{c}.$$

Par suite

$$v'(\lambda + \delta\lambda) = v'(\lambda) + \frac{dv'}{d\lambda}\frac{Vn}{c}\lambda$$

ou

$$v'(\lambda + \delta\lambda) = v'(\lambda) + \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{c}{n}\right)\frac{Vn\lambda}{c} = \frac{c}{n(\lambda)} - \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}V.$$

Dans la formule (110.5) on doit entendre par v' non pas $v'(\lambda)$ mais $v'(\lambda + \delta\lambda)$. Dans l'approximation utilisée ici, le dernier terme du second membre de (110.5) ne doit pas être modifié. On obtient ainsi

$$v = \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2} - \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}\right)V. \quad (110.7)$$

La présence du terme supplémentaire dû à la dispersion a été expérimentalement justifiée par Zeeman en 1914.

A noter que la variation Doppler de la longueur d'onde concerne le référentiel S' par rapport auquel l'eau est fixe. Dans le référentiel « fixe » S l'écoulement de l'eau n'affecte pas la longueur d'onde, de sorte qu'à l'émergence deux rayons ont *même longueur d'onde* et peuvent donc interférer.

§ 111. Mécanique relativiste

1. Si une loi de la Nature s'exprime sous la forme $A = B$ et si les grandeurs A et B ne changent pas lorsqu'on passe d'un référentiel à un autre, on dit que ces grandeurs et la loi qui les lie sont *invariantes* par rapport à ce changement de référentiel. Une notion plus générale est la notion de *covariance*. Si lors d'un changement de référentiel les grandeurs A et B *se transforment également* sans rester invariables, la loi $A = B$ sera vérifiée dans le nouveau référentiel. On dira alors que la loi $A = B$ est *covariante* par rapport à la transformation des référentiels. Bien souvent l'expression « invariance d'une loi » sous-entend sa covariance.

Avant l'apparition de la théorie de la relativité on n'admettait que les *transformations des coordonnées de Galilée*. Les équations de la mécanique de Newton sont covariantes (invariantes) quand on passe d'un référentiel galiléen à un autre, mais les équations de

l'électrodynamique de Maxwell-Lorentz ne le sont pas. La théorie de la relativité démontre qu'il faut abandonner la transformation de Galilée au profit de la transformation de Lorentz. Le principe de relativité impose que *les lois de la Nature soient covariantes par rapport à la transformation de Lorentz.* Les équations de l'électrodynamique sont covariantes par rapport à cette transformation, mais les équations de la mécanique de Newton ne le sont pas. Il s'ensuit que la mécanique de Newton doit être révisée.

En mécanique newtonienne la force qui s'exerce sur un corps à un instant donné dépend des positions qu'occupent *au même instant* tous les corps qui sont en interactions. En théorie de la relativité la notion de simultanéité (« même instant ») *dépend du référentiel utilisé.* Il est impossible de transformer, sans autre forme de procès, n'importe quelle loi newtonienne pour la mettre sous une forme covariante par rapport aux transformations de Lorentz. On ne doit admettre que les théories d'où *le concept d'action à distance peut être éliminé sans dommage.* C'est le cas de la théorie des chocs qui se fonde sur la conception idéalisée suivante : l'interaction ne dure que le temps où la distance entre les corps ou les particules ponctuelles est infiniment petite devant leurs dimensions ou devant des longueurs caractéristiques du processus. Avant et après cet intervalle de temps infiniment court, les corps se meuvent librement. On peut appliquer aux chocs les lois de conservation de l'impulsion et de l'énergie, à condition de les utiliser sous la forme covariante de Lorentz. C'est ce que nous nous proposons de faire dans ce paragraphe. On peut éliminer le concept d'action à distance dans l'étude du mouvement des particules chargées dans les champs électromagnétiques, mais on devrait utiliser pour cela plusieurs questions d'électrodynamique que nous ne pouvons exposer ici par manque de place. Dans ce qui suit on ne considérera donc que les seuls processus de collision.

2. Pour traiter ce problème simplement, il convient d'utiliser la notion de *vecteur à quatre dimensions* (*ou quadrivecteur*) dans l'univers de Minkowski. Dans cet univers tout événement « ponctuel » est défini par un ensemble de quatre coordonnées x, y, z, $\tau \equiv ct$. Lorsqu'on passe du référentiel S au référentiel S' les différences des coordonnées de deux points se transforment par les formules

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - \beta \Delta \tau}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \Delta y' = \Delta y, \ \Delta z' = \Delta z, \qquad \Delta \tau' = \frac{\Delta \tau - \beta \Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{111.1}$$

qui se déduisent de (105.12). Rappelons que le carré de l'intervalle entre les points considérés est invariant :

$$\Delta \tau^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = \text{Inv.} \tag{111.2}$$

Nous venons d'utiliser la transformation particulière de Lorentz (105.12) qui implique que les axes de coordonnées X, Y, Z et X', Y', Z' sont mutuellement parallèles et que le référentiel S' se déplace le long de l'axe X par rapport à S. On pourrait orienter les axes de toute autre façon et prendre une autre direction de mouvement, mais on compliquerait les calculs sans rien changer au principe du calcul.

On appelle quadrivecteur un ensemble de quatre grandeurs A_x, A_y, A_z, A_τ *qui, lors du passage d'un référentiel à un autre, se transforment de la même façon qu'une différence entre les coordonnées de deux points de l'univers de Minkowski, i.e.*

$$A'_{x'}=\frac{A_x-\beta A_\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad A'_{y'}=A_y, \quad A'_{z'}=A_z, \quad A'_{\tau'}=\frac{A_\tau-\beta A_x}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (111.3)$$

Les grandeurs A_x, A_y, A_z sont les composantes *spatiales* et A_τ est la composante *temporelle* du quadrivecteur. Nous réunirons les trois composantes spatiales en un vecteur tridimensionnel ordinaire A et nous noterons (A, A_τ) le quadrivecteur. Il résulte de l'identité des formules de transformation (111.1) et (111.3) que le quadrivecteur (A, A_τ) est *invariant* :

$$A_\tau^2-A^2=\text{Inv}. \qquad (111.4)$$

Si une loi de la Nature s'exprime sous forme quadrivectorielle par $(A, A_\tau)=(B, B_\tau)$ *elle est covariante puisque les deux membres de l'égalité se transforment de la même façon lorsqu'on leur applique les formules de transformation de Lorentz.* Une formule quadrivectorielle équivaut à deux équations $A = B$, $A_\tau = B_\tau$. C'est cette remarque qui nous permettra de trouver la solution au problème suivant. Nous postulons notamment que *les lois de conservation de l'impulsion et de l'énergie se laissent exprimer sous forme de l'égalité de quadrivecteurs.* Le problème consiste à trouver la forme de ces vecteurs.

3. Considérons une particule qui se déplace avec la vitesse v par rapport à un référentiel fixe S. Soit dr la distance dont elle se déplace dans le temps $dt = d\tau/c$. Ces grandeurs définissent le quadrivecteur $(dr, c\,dt)$. Ce dernier restera évidemment quadrivecteur si on multiplie ses composantes par une seule et même quantité constante. Prenons pour quantité constante le rapport m_0/dt_0, où m_0 est une constante et $dt_0 = dt\sqrt{1-v^2/c^2}$ le temps propre qui est, on le sait déjà, invariant. On définit alors le quadrivecteur

$$m_0\left(\frac{dr}{dt_0},\ c\frac{dt}{dt_0}\right)=m\,(v,\ c), \qquad (111.5)$$

où on a utilisé la notation

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \qquad (111.6)$$

Supposons que la particule se meut *lentement*, ce qui permet de négliger la quantité v^2/c^2. Prenons pour valeur de la constante m_0 la masse de la particule telle qu'elle est définie en mécanique non relativiste. La composante spatiale du quadrivecteur (111.5) sera alors $m_0 \boldsymbol{v}$. En mécanique newtonienne le vecteur $m_0 \boldsymbol{v}$ est désigné sous le nom d'*impulsion*. Il est donc naturel qu'en mécanique relativiste on définisse l'impulsion par l'expression

$$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{v} = \frac{m_0 \boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{111.7}$$

puisque pour v petit elle se réduit à $m_0 \boldsymbol{v}$. La quantité m_0 est appelée *masse au repos* et la quantité m *masse relativiste*. Ainsi ($\boldsymbol{P}$, mc) est un quadrivecteur et la quantité $(mc)^2 - P^2$ est l'invariant correspondant. La valeur de cet invariant est facile à mettre en évidence: pour $v = 0$, il se réduit à $(m_0 c)^2$ et par suite

$$(mc)^2 - P^2 = (m_0 c)^2. \tag{111.8}$$

Il nous reste à dégager la signification physique de la composante temporelle du quadrivecteur (111.5). $d\boldsymbol{P}/dt$ est la force appliquée à la particule; le travail que produit cette force pour déplacer la particule de $\boldsymbol{v}\,dt$ est égal à $dA = \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}\, d\boldsymbol{P}/m$ et d'après (111.8) $dA = c^2\, dm$. En intégrant cette expression par rapport à m on obtient l'énergie de la particule. En posant que la constante d'intégration est égale à zéro, on obtient

$$\mathscr{E} = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{111.9}$$

La grandeur $\mathscr{E}$ est l'*énergie totale de la particule*. Pour une particule au repos $m = m_0$ et (111.9) se réduit à

$$\mathscr{E}_0 = m_0 c^2. \tag{111.10}$$

La grandeur $\mathscr{E}_0$ est l'*énergie de la particule au repos*.

La formule (111.9) qui a été obtenue par Einstein établit une *relation entre la masse et l'énergie*. L'énergie cinétique d'une particule est définie par

$$K = \mathscr{E} - \mathscr{E}_0 = (m - m_0)\, c^2. \tag{111.11}$$

Lorsque la vitesse de la particule est petite, cette formule se réduit à la formule usuelle $K = {}^1/_2 m_0 v^2$.

L'impulsion et l'énergie définissent maintenant le quadrivecteur

$$(\boldsymbol{P},\ mc) = (\boldsymbol{P},\ \mathscr{E}/c) \tag{111.12}$$

qu'on appelle *vecteur impulsion-énergie*. Son invariant par rapport à la transformation de Lorentz est la quantité

$$\left(\frac{\mathscr{E}}{c}\right)^2 - P^2 = (m_0 c)^2 = \text{Inv}. \tag{111.13}$$

Dans la théorie de la relativité les lois de conservation de l'impulsion et de l'énergie ne sont plus des lois indépendantes, mais sont associées en une *loi unique de conservation du quadrivecteur impulsion-énergie*, que l'on appelle aussi *loi de la conservation de l'impulsion-énergie*.

Il reste à élucider deux questions. La première est : pourquoi, dans le calcul du travail, a-t-on défini la force par la dérivée $d\boldsymbol{P}/dt$, i.e. comme en mécanique non relativiste ? La deuxième est : pourquoi a-t-on défini l'énergie de façon *univoque*, tandis qu'il est d'usage de la définir à une constante arbitraire non essentielle près ? A ces deux questions on peut donner une réponse *unique*. La grandeur $\mathscr{E}$ calculée ci-dessus et que nous avons appelée énergie totale, doit satisfaire à la condition qu'après division par c elle représente la *composante temporelle du quadrivecteur* (111.5). Pour cela l'énergie doit être définie de façon univoque.

Dans le cas d'un système de particules qui n'interagissent pas entre elles, ou n'interagissent que lors des chocs mutuels, le quadrivecteur impulsion-énergie est égal à la somme des quadrivecteurs impulsion-énergie des particules individuelles. De ce fait on arrive à traiter ensemble dans la théorie de la relativité les chocs élastiques et non élastiques. Quelle que soit la nature des chocs, il y a conservation du trivecteur impulsion du système, et par suite il y a conservation de l'énergie qui (multipliée par c) est la composante temporelle du quadrivecteur. Si l'énergie se conserve, la masse relativiste se conserve aussi, mais elle se répartit différemment entre la masse au repos et la masse cinétique du mouvement macroscopique. Lors du choc de deux billes non élastiques identiques avançant avec la même vitesse à l'encontre l'une de l'autre, la disparition de l'énergie cinétique du mouvement macroscopique (i.e. son transfert aux mouvements moléculaires) se manifeste par un accroissement équivalent de la masse au repos du système : la masse d'une bille chaude est plus grande que celle d'une bille froide. Dans le cas de chocs élastiques, les deux masses restent inchangées.

Il existe des particules (*photon*, *neutrino*) dont la masse au repos est nulle. Pour ces particules la relation (111.13) entre la masse et l'impulsion est de la forme

$$P = \mathscr{E}/c. \qquad (111.14)$$

Ces particules se meuvent toujours avec la vitesse c, car s'il n'en était pas ainsi, d'après les formules (111.7) et (111.9) leurs impulsions et leurs énergies deviendraient nulles.

PROBLÈMES

1. Deux particules identiques se meuvent avec la même vitesse v à l'encontre l'une de l'autre dans un référentiel de laboratoire. Calculer la vitesse relative V de chacune des particules par rapport à l'autre particule. Quelle énergie $\mathscr{E}'$ doit posséder la particule mobile dans ce référentiel pour que sa

vitesse relative reste la même si la deuxième particule est fixe (particule cible)? (C'est le principe de fonctionnement de l'*accélérateur à faisceaux opposés.*)

S o l u t i o n. D'après le théorème de composition des vitesses

$$V=\frac{2v}{1+v^2/c^2}.$$

L'énergie totale que l'on doit communiquer à la particule mobile est

$$\mathscr{E}'=\frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}},$$

où $\mathscr{E}_0$ est l'énergie de la particule au repos. L'énergie réelle que doit posséder la particule mobile est $\mathscr{E}=\mathscr{E}_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$. On en déduit

$$\mathscr{E}'=2\frac{\mathscr{E}^2}{\mathscr{E}_0}-\mathscr{E}_c \qquad (111.15)$$

et pour l'énergie cinétique

$$K'=2\left(\frac{\mathscr{E}^2}{\mathscr{E}_0}-\mathscr{E}_0\right). \qquad (111.16)$$

(Une autre solution est donnée t. I, § 28.)

2. Etablir une généralisation relativiste de la formule de Tsiolkovski (t. I, § 21) pour le mouvement des fusées. On admettra que les vitesses de la fusée et du jet de gaz sont dirigées suivant une même droite.

S o l u t i o n. En vertu des lois de conservation de l'impulsion et de l'énergie

$$mv+m_{\text{gaz}}v_{\text{gaz}}=\text{const}, \quad m+m_{\text{gaz}}=\text{const},$$

où m et m_{gaz} sont les masses relativistes de la fusée et des gaz, et v, v_{gaz} leurs vitesses à un instant quelconque. Puisque les gaz qui se sont échappés de la fusée n'affectent plus son mouvement, on peut poser qu'à l'instant considéré $m_{\text{gaz}}=0$. Ainsi se trouve levée l'indétermination sur ce que l'on doit entendre par v_{gaz}. Mais comme les gaz sont produits constamment, $dm_{\text{gaz}}\neq 0$. En différentiant les équations ci-dessus on trouve

$$m\,dv+(v-v_{\text{gaz}})\,dm=0.$$

D'après la loi relativiste de composition des vitesses

$$v_{\text{gaz}}=\frac{v-u}{1-vu/c^2},$$

où u est la vitesse du jet gazeux par rapport à la fusée. En éliminant v_{gaz} il vient

$$dv+u\frac{1-v^2/c^2}{1-vu/c^2}\frac{dm}{m}=0.$$

En appliquant la formule (111.6) on trouve

$$\frac{dv}{v^2-c^2}=\frac{u}{c^2}\frac{dm_0}{m_0}$$

En posant que la vitesse u du jet gazeux est constante on trouve après intégration

$$\frac{(m_0)_{\text{init}}}{m_0}=\left(\frac{1+v/c}{1-v/c}\right)^{c/2u}. \qquad (111.17)$$

CHAPITRE X

RAYONNEMENT THERMIQUE

§ 112. Rayonnement d'équilibre dans une cavité

1. L'émission de lumière résulte des transitions des atomes, des molécules ou d'autres systèmes atomiques d'états de plus grande énergie vers des états de moindre énergie. Le *rayonnement* dit *thermique* ne se distingue des autres types de rayonnement (luminescence) que par le procédé d'excitation des systèmes émetteurs. Dans les phénomènes de rayonnement thermique l'excitation résulte des mouvements thermiques des atomes et des molécules.

Dans l'étude du rayonnement thermique la notion de *rayonnement d'équilibre* joue un rôle particulièrement important. Pour définir cette notion considérons une cavité à parois fixes et opaques dont la température est maintenue constante. Les atomes et les molécules des parois sont excités aux dépens de l'énergie du mouvement thermique ; lors de la transition inverse à l'état non excité les particules émettent un rayonnement qui remplit la cavité. Une partie de l'énergie rayonnante tombant sur les parois s'y réfléchit et l'autre partie en est absorbée. Il en résulte des variations de la direction de propagation, de la composition spectrale, de la polarisation et de l'intensité du rayonnement. D'après les principes de la thermodynamique, le résultat de ces différents processus est l'établissement dans la cavité d'un état de rayonnement macroscopiquement déterminé. Cet état est tel que la quantité d'énergie rayonnante émise dans l'unité de temps, caractérisée par une certaine composition spectrale, une polarisation et une direction de propagation déterminées, est en moyenne égale à la quantité d'énergie absorbée des mêmes caractéristiques. Comme tout autre état d'équilibre, cet état d'équilibre est caractérisé par ce qu'à tout processus microscopique se produisant dans le système correspond un microprocessus inverse ayant même probabilité de se produire que le processus direct (*principe de la balance détaillée*). C'est pour cette raison que l'état du rayonnement contenu dans la cavité reste *macroscopiquement constant* dans le temps. Le passage à l'état d'équilibre étant un processus statistique, est régi par les *lois de probabilité*. Il s'établit dans la cavité un état de rayonnement chaotique dont la probabilité est

maximale. C'est cet état de rayonnement qu'on appelle rayonnement d'équilibre.

Les propriétés du rayonnement d'équilibre : la densité d'énergie rayonnante, sa répartition spectrale en fréquences et en directions, ainsi que la polarisation *ne dépendent pas de la forme de la cavité et de la nature de ses parois*. Tout comme pour un gaz contenu dans un vase, ces propriétés ne dépendent que de la *température des parois de la cavité*. Le rayonnement d'équilibre est *homogène*, en ce sens que sa densité est la même en tout point de la cavité. Il est *isotrope et n'est pas polarisé* : toutes les directions de propagation sont équiprobables et en tout point de l'espace les directions des vecteurs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ varient de façon aléatoire au cours du temps. Puisque le rayonnement est en équilibre thermique avec les parois de la cavité, on peut parler aussi bien de la température des parois que de la *température de rayonnement*, en posant que ces températures sont égales, par définition. Il importe cependant de noter que la température du rayonnement d'équilibre est une *propriété du rayonnement lui-même* et non celle des parois avec lesquelles il est en équilibre. On peut parler de la température d'un rayonnement même lorsqu'il n'y a pas de parois ; par exemple, la densité d'énergie du rayonnement d'équilibre définit univoquement sa température (cf. § 115).

Si les parois de la cavité ne sont pas absorbantes, par exemple, si elles sont parfaitement réfléchissantes, il ne se produira dans cette cavité ni absorption ni émission de lumière. On peut introduire dans une telle cavité un rayonnement de toute composition spectrale ; ce rayonnement change de direction à chaque réflexion, mais sa composition spectrale reste constante. Si la cavité à parois réfléchissantes possède une forme adéquate, la direction de propagation et la polarisation du rayonnement resteront également constantes ; c'est ce qui se produit, par exemple, dans une cavité cylindrique à bases parfaitement réfléchissantes. Dans cette cavité un rayon de toute fréquence et de tout état de polarisation peut aller et venir parallèlement à l'axe du cylindre en se réfléchissant successivement sur les bases spéculaires. Mais c'est là un cas *idéal* qui ne se réalise jamais exactement dans la pratique. Dans les cas réels le rayonnement contenu dans une cavité est *hors d'équilibre* et *instable*. Même si la déviation par rapport au cas idéal est infiniment petite, il s'établira dans la cavité, au bout d'un certain temps, un rayonnement d'équilibre. Les systèmes parfaits présentent cependant une grande importance pour les recherches théoriques. On peut considérer que les parois sont réfléchissantes et poser cependant qu'il s'établira dans la cavité un rayonnement d'équilibre. Il suffit pour cela d'introduire dans la cavité un corps absorbant et rayonnant infiniment petit, un *grain de poussière* par exemple. Ce grain de poussière, quoique ne participant pas au bilan énergétique du système, suffit pour faire passer le système d'un état hors d'équilibre dans un état d'équilibre.

2. Introduisons maintenant quelques grandeurs caractérisant l'état du rayonnement dans l'espace. Ces grandeurs s'appliquent autant au rayonnement d'équilibre qu'à un rayonnement quelconque.

Notons u la densité d'énergie du rayonnement qui est la quantité de cette énergie contenue dans l'unité de volume de l'espace. On peut décomposer cette densité d'énergie suivant les fréquences ou les longueurs d'onde et la représenter par

$$u = \int_0^\infty u_\omega \, d\omega = \int_0^\infty u_\lambda \, d\lambda. \tag{112.1}$$

Les quantités $u_\omega \, d\omega$ et $u_\lambda \, d\lambda$ représentent la densité volumique d'énergie radiante revenant à un intervalle de fréquences ω, $\omega + d\omega$ où à un intervalle de longueurs d'ondes λ, $\lambda + d\lambda$. Les coefficients u_ω et u_λ sont appelés *densités spectrales de l'énergie radiante*. S'il s'agit d'un même intervalle spectral exprimé sous des formes différentes on a $u_\omega \, d\omega = u_\lambda \, d\lambda$. Comme $\lambda = 2\pi c/\omega$, $d\lambda/\lambda = -d\omega/\omega$. Nous omettrons le signe moins puisqu'il ne sert qu'à indiquer que la longueur d'onde diminue lorsque la fréquence augmente. En admettant que $d\omega$ et $d\lambda$ sont des quantités essentiellement positives, on écrira

$$u_\lambda = \frac{\omega}{\lambda} u_\omega, \quad u_\omega = \frac{\lambda}{\omega} u_\lambda. \tag{112.2}$$

En physique théorique on utilise généralement la quantité u_ω et en physique expérimentale on donne la préférence à u_λ. Pour un rayonnement d'équilibre, les fonctions u_ω et u_λ ne dépendent que de la fréquence ω (ou de la longueur d'onde λ) et de la température T du rayonnement, mais ne dépendent ni de la forme de la cavité ni du matériau des parois. Ces fonctions dépendent aussi du milieu se trouvant dans la cavité mais nous n'établirons cette dépendance qu'au § 114. Pour l'instant nous poserons que dans la cavité règne le vide: dans ce cas u_ω sera une *fonction universelle de* ω *et de* T, et u *une fonction universelle de la seule température* T. Le *principal objet* de la théorie du rayonnement thermique consiste à trouver la fonction $u_\omega(\omega, T)$.

Le flux d'énergie radiante passant dans le temps dt à travers un élément de surface ds, dans les limites de l'angle solide $d\Omega$ dont l'axe est perpendiculaire à ds, est donné par l'expression

$$d\Phi = I \, ds \, d\Omega \, dt. \tag{112.3}$$

La grandeur I est l'*intensité énergétique du rayonnement* dont la décomposition spectrale est donnée par l'intégrale

$$I = \int_0^\infty I_\omega \, d\omega. \tag{112.4}$$

La grandeur I_ω est la *luminance monochromatique du rayonnement de fréquence* ω.

Etablissons une relation entre u et I (ainsi qu'entre u_ω et I_ω) pour le champ de rayonnement dans le vide. Délimitons dans l'espace un parallélépipède droit infiniment petit, de base ds et de hauteur dl (fig. 337). Isolons par la pensée le pinceau de rayons pénétrant dans le parallélépipède à travers sa base ds et contenus dans l'angle solide $d\Omega$ dont l'axe est normal à ds. Chacun de ces rayons parvient à l'autre base du parallélépipède au bout du temps $dt = dl/c$. L'énergie radiante qui pénètre dans le parallélépipède à travers la base ds au cours du temps dt est $I\, ds\, d\Omega\, dt = (I/c)\, d\Omega\, dV$, où $dV = dl\, ds$ est le volume du parallélépipède. En divisant par dV il reste $(I/c)\, d\Omega$, qui est la densité du d'énergie radiante se propageant dans l'angle solide $d\Omega$. De par son sens physique, du peut être fonction d'un point dans l'espace, mais ne peut dépendre de la forme du parallélépipède. Il s'ensuit que pour trouver la densité totale u d'énergie radiante en un point donné, il suffit d'intégrer l'expression de du sur toutes les directions spatiales. Dans le cas général, on doit tenir compte de ce que I dépend de la direction du rayonnement, mais pour un rayonnement isotrope, ce qui est le cas du rayonnement d'équilibre, I ne dépend pas de la direction. L'intégration se réduit alors à remplacer l'angle solide élémentaire $d\Omega$ par l'angle solide total $\Omega = 4\pi$. On obtient ainsi

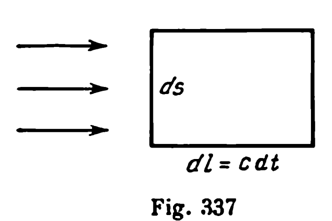


Fig. 337

$$u = \frac{4\pi}{c} I \qquad (112.5)$$

et de même

$$u_\omega = \frac{4\pi}{c} I_\omega. \qquad (112.6)$$

Ces relations sont vérifiées aussi dans le cas où la cavité est remplie d'un milieu homogène, isotrope et non absorbant. On doit alors remplacer c par la vitesse de groupe de la lumière dans le milieu considéré.

§ 113. Loi de Kirchhoff

1. Passons à l'étude des *lois d'émission et d'absorption thermiques des corps*. Nous ne considérerons que le cas où le corps émetteur et le corps absorbant sont *opaques*. Cette condition est vérifiée si l'épaisseur des corps est suffisamment grande pour que tout rayon qui y pénètre soit absorbé avant d'arriver à la surface d'émergence du corps. Le flux d'énergie radiante de fréquences comprises entre ω

et $\omega + d\omega$ qui est émis dans le temps dt par une aire ds de la surface du corps dans un angle solide $d\Omega$ est

$$d\Phi = E_\omega \, ds \cos \varphi \, d\Omega \, d\omega \, dt, \tag{113.1}$$

où φ est l'angle que fait la direction du rayonnement avec la normale à l'aire ds. Le facteur $\cos \varphi$ apparaît parce qu'il est préférable de rapporter le rayonnement à la projection de l'aire ds sur un plan perpendiculaire à la direction du rayonnement (cf. § 22). La grandeur E_ω est le *pouvoir émissif* de la surface du corps dans la direction définie par l'angle φ *).

Le *pouvoir absorbant* A_ω d'une surface pour un rayonnement de même fréquence, de même direction de propagation et de même polarisation est une quantité sans dimension indiquant la part de l'énergie incidente qui est absorbée par la surface considérée.

Il ne s'agit dans ces définitions que de *rayonnements purement thermiques* lorsque toutes les propriétés du corps émetteur et du corps absorbant ne dépendent que de la *température de ces corps*. En sont exclus tous les cas de rayonnement « froid » ou « hors d'équilibre » lorsque le corps rayonnant émet des radiations non pas parce qu'il a été échauffé, mais parce que certains de ses niveaux d'énergie ont été excités et que le corps émet un rayonnement tant que s'effectuent les transitions sur les niveaux normaux.

En ce qui concerne l'influence que le milieu ambiant homogène exerce sur le pouvoir émissif d'un corps, on peut analyser cette question en se plaçant à deux points de vue différents. D'une part, on peut définir E_ω par le *flux total* d'énergie radiante de fréquence et de direction données, envoyé par la surface du corps dans le *milieu ambiant*. Dans ce cas le pouvoir émissif caractérise les propriétés des *deux milieux* qui se touchent à la surface du corps rayonnant. Selon un autre point de vue, qui a été développé par Prévost (1751-1839) au début du XIXe siècle, le flux résultant d'énergie radiante à travers la surface du corps est la *différence de deux flux* envoyés dans le vide : le flux *émis par le corps* dans le milieu ambiant et le flux *envoyé par le milieu* dans l'espace occupé par le corps. Le premier flux caractérise le pouvoir émissif du *corps* et le second le pouvoir émissif du *milieu*. C'est cette seconde approche que nous adopterons, puisque dans ce cas les grandeurs E_ω et A_ω caractérisant le *corps émetteur* ne dépendent pas du milieu ambiant. Toutes choses égales d'ailleurs, ces grandeurs ne dépendent que de la *température du corps*.

---

*) Ici nous rompons avec la tradition. Pour des raisons historiques on définit usuellement le pouvoir émissif d'un corps par le *flux total* d'énergie radiante que l'aire ds envoie dans *toutes les directions* extérieures au corps, i. e. dans l'angle solide 2π. Pour en faire une étude détaillée, on doit décomposer ce pouvoir émissif suivant les fréquences et les directions. C'est ce que nous faisons ici d'emblée.

2. Etablissons une relation entre le pouvoir émissif et le pouvoir absorbant. Comme ces grandeurs ne caractérisent que la surface du corps et ne dépendent pas des rayonnements ambiants, on peut émettre n'importe quelle hypothèse concernant ces rayonnements ambiants. Supposons que le corps qui émet le rayonnement est entouré de toutes parts d'un rayonnement d'équilibre ayant même température que le corps émetteur. C'est le cas où la surface émettrice du corps est constituée par une partie de la surface interne d'une cavité fermée, dont les parois sont maintenues à température constante. Considérons dans le rayonnement les radiations de fréquences comprises entre ω et $\omega + d\omega$ et étudions leurs modifications lors de l'émission et de la réflexion par les parois de la cavité. Le flux incident compris dans l'angle solide $d\Omega$ qui tombe dans le temps dt sur une aire ds de la paroi (fig. 338) est égal à

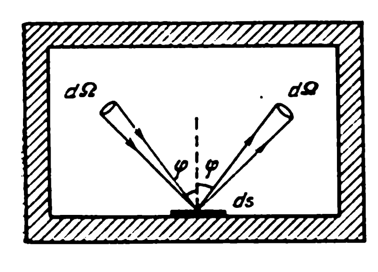


Fig. 338

$$I_\omega \, ds \cos \varphi \, d\omega \, d\Omega \, dt.$$

La partie de ce flux

$$(1 - A_\omega) \, I_\omega \, ds \cos \varphi \, d\omega \, d\Omega \, dt$$

est réfléchie et la partie restante est absorbée. Au flux réfléchi vient se superposer le flux d'émission propre de l'aire ds

$$E_\omega \, ds \cos \varphi \, d\omega \, d\Omega \, dt.$$

Par conséquent l'aire ds de la paroi envoie dans la cavité un flux égal à

$$[(1 - A_\omega) \, I_\omega + E_\omega] \, ds \cos \varphi \, d\omega \, d\Omega \, dt.$$

Mais à l'état d'équilibre ce même flux est donné par l'expression

$$I_\omega \, ds \cos \varphi \, d\omega \, d\Omega \, dt.$$

En égalant ces deux expressions on trouve

$$\frac{E_\omega}{A_\omega} = I_\omega. \tag{113.2}$$

Cette démonstration implique que la réflexion est *spéculaire*, quoique cette hypothèse ne soit pas essentielle. Si la réflexion est *diffuse*, le flux incident est diffusé dans toutes les directions. A l'état d'équilibre cela se réduit simplement à remplacer certains rayons par d'autres. Le flux total d'énergie diffusée, envoyée par l'aire ds dans n'importe quel angle solide $d\Omega$ fixé dans l'espace reste cons-

tant. Toutes les relations quantitatives utilisées dans la démonstration restent valables, ainsi que le résultat final (113.2).

La grandeur I_ω ne dépend pas du matériau des parois de la cavité, mais c'est une fonction universelle de la fréquence ω et de la température T du corps. *Le rapport du pouvoir émissif au pouvoir absorbant est le même pour tous les corps et est une fonction universelle de la fréquence et de la température.* C'est la loi de Kirchhoff, établie en 1859. Cette loi est la généralisation quantitative exacte de la règle qui fut établie empiriquement par Prévost en 1809. Cette règle s'énonce comme suit : *si les pouvoirs absorbants des corps sont différents, leurs pouvoirs émissifs le seront aussi.*

3. On appelle *corps noir* un corps dont le pouvoir absorbant A_ω est égal à l'unité pour les radiations de toutes les fréquences. Nous noterons e_ω le pouvoir émissif du corps noir. Il est évident que $e_\omega = I_\omega$. C'est pourquoi le rayonnement d'équilibre est appelé aussi *rayonnement du corps noir.* On peut maintenant énoncer la loi de Kirchhoff de la façon suivante : *le rapport entre le pouvoir émissif et le pouvoir absorbant est une fonction universelle de la fréquence et de la température du corps ; ce rapport est égal au pouvoir émissif du corps noir.* Le pouvoir émissif d'un corps est d'autant plus grand que son pouvoir absorbant est grand. Comme A_ω ne peut être plus grand que l'unité, *de tous les corps se trouvant à une même température c'est le corps noir qui possède le plus grand pouvoir émissif.* Il résulte aussi de la loi de Kirchhoff qu'*à une température donnée tout corps émet de préférence des radiations de mêmes longueurs d'onde que celles qu'il absorbe le plus fortement à la même température.*

Il n'existe pas dans la nature de corps absolument noirs, comme il n'existe aucun autre objet idéalisé. On réalise un corps approximativement noir en prenant un corps creux présentant une petite ouverture, à travers laquelle le rayonnement peut s'échapper de la cavité. Si les parois sont opaques et l'ouverture petite, il s'établira dans la cavité un état de rayonnement infiniment proche de l'état d'équilibre. Le rayonnement qui sort par l'ouverture est pratiquement le même que celui qui serait émis par la surface d'un corps noir de même aire et de même forme.

On peut le démontrer d'une façon différente. Un rayon lumineux qui pénètre dans la cavité à travers l'ouverture y subit de nombreuses réflexions sur les parois, chacune d'elles accompagnée d'une absorption (fig. 339). Après toutes ces réflexions, le rayon ne sortira plus de la cavité, ou bien il ne s'en échappera qu'une partie infime de l'énergie radiante qui pénétra dans la cavité ; en principe, toute l'énergie introduite est absorbée par les parois. Cela signifie qu'une cavité munie d'une petite ouverture se comporte au point de vue de l'absorption *comme un corps noir* ; en vertu de la loi de Kirchhoff, il en est de même au point de vue de l'émission. Ce procédé est utilisé dans toutes les mesures précises du rayonnement du corps noir.

Illustrons ces considérations par un exemple. Si on éclaire fortement les parois extérieures d'une cavité comportant une petite ouverture, l'ouverture apparaîtra en noir sur le fond clair des parois. C'est l'aspect que présente sur une façade une fenêtre ouverte. L'ouverture paraîtra noire même si la surface extérieure des parois éclairées est elle-même peinte en noir. Si on porte à incandescence les parois d'une cavité fabriquée en un matériau peu absorbant (porcelaine blanche par exemple) l'ouverture se détache brillante sur le fond sombre du rayonnement direct des parois. Si on peint en noir la surface extérieure des parois, et qu'on porte le dispositif à incandescence, les parois deviennent plus brillantes mais le sont moins que l'ouverture. Si on passe au noir la surface interne de la cavité, cela n'aura aucun effet extérieur.

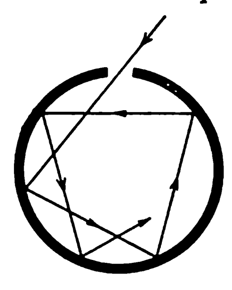


Fig. 339

4. Puisque pour un corps noir $e_\omega = I_\omega$ et puisque le rayonnement d'équilibre est isotrope, le pouvoir émissif du corps noir est le même suivant toutes les directions. Lorsqu'il s'agit d'un rayonnement thermique (i.e. par incandescence) le pouvoir émissif coïncide avec la luminance énergétique du corps noir (cf. § 22). Il s'ensuit que *le pouvoir émissif du corps noir suit la loi de Lambert* (§ 22).

Il est évident que l'inverse n'est pas vrai. La loi de Lambert peut être valable pour des corps qui ne sont pas absolument noirs. La loi de Kirchhoff permet de préciser cette question. Selon cette loi, $E_\omega = A_\omega e_\omega$; il s'ensuit que le corps suivra la loi de Lambert si son pouvoir absorbant ne dépend pas de la direction des radiations qu'il absorbe. Comme pour un corps opaque l'énergie de la lumière incidente est égale à la somme des énergies de la lumière absorbée et de la lumière diffusée, la loi de Lambert reste applicable aux rayonnements émis par tous les corps qui diffusent uniformément la lumière incidente suivant toutes les directions. Ce sont des corps *absolument mats. Le rayonnement thermique d'un corps absolument mat suit la loi de Lambert*. Dès 1897 V. A. Oulianine (1863-1930) nota le lien existant entre les lois de Lambert et de Kirchhoff quoiqu'il se fonde sur un raisonnement plus compliqué que celui que nous avons utilisé.

§ 114. Formule de Kirchhoff-Clausius

Il s'agit maintenant de calculer la densité d'énergie et la luminance énergétique d'un rayonnement d'équilibre dans un milieu transparent homogène et isotrope, d'indice de réfraction n. Ce rayonnement d'équilibre s'établit dans une cavité fermée entièrement occupée par le milieu considéré et dont les parois sont maintenues

à température constante. Exactement le même rayonnement existera dans le milieu qui n'occupe qu'une partie de la cavité. Considérons une cavité dont une partie est occupée par un milieu donné et dans la partie restante règne le vide. Le rayonnement d'équilibre dans le milieu et dans le vide ne dépend ni de la forme ni des propriétés de la surface de séparation entre le milieu et le vide. On peut admettre que cette surface de séparation est plane et parfaitement lisse.

Le rayonnement dans le milieu ne dépend pas des dimensions de celui-ci. On peut donc admettre que l'étendue du milieu est juste suffisante pour que tout rayon lumineux qui y pénètre y soit entièrement absorbé et n'atteigne pas la paroi de la cavité, aussi faible que soit le facteur d'absorption du milieu. Dans ces conditions l'échange d'énergie entre le milieu et le vide résultera uniquement des réflexions et des réfractions du rayonnement sur la surface de séparation. A cet échange d'énergie s'applique le *principe de la balance détaillée* et cet échange ne peut altérer l'état d'équilibre entre le rayonnement dans le milieu et dans le vide. Partant de là, on peut établir une relation, d'une part, entre la densité d'énergie u^0 et l'intensité I^0 du rayonnement dans le vide et, d'autre part, entre les mêmes grandeurs u et I dans le milieu. (Dans ce paragraphe toutes les grandeurs se rapportant au vide sont affectées de l'indice zéro et toutes les grandeurs relatives au milieu ne comportent aucun indice.)

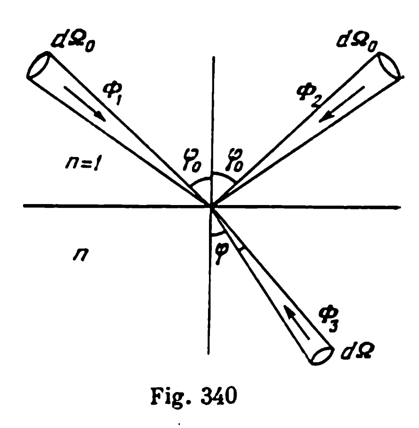


Fig. 340

Comme le principe de la balance détaillée est vérifié, il suffit de considérer une partie seulement du rayonnement total, celle qui comporte les radiations de fréquences comprises entre ω et $\omega + d\omega$. Le flux venant du vide, tombant sur l'unité d'aire de la surface de séparation, par unité de temps, et contenu dans le cône d'angle solide $d\Omega_0$ est $\Phi_1 = I^0_\omega \, d\Omega_0 \, d\omega \cos \varphi_0$, où φ_0 est l'angle d'incidence (fig. 340). Selon le principe de la balance détaillée, un flux d'énergie égal doit se propager en sens inverse. Celui-ci se compose de deux flux : le premier flux résulte de la réflexion du flux Φ_2 et a pour valeur $(1 - A_\omega) I^0_\omega \, d\Omega_0 \, d\omega \cos \varphi_0$ et le second résulte de la réfraction du flux Φ_3 venant du milieu. D'après les formules de Fresnel, les coefficients de réflexion sur la surface de séparation des rayons se propageant en sens inverses sont égaux ; le deuxième flux est donc égal à $A_\omega I_\omega \, d\Omega \, d\omega \cos \varphi$, φ étant l'angle de réfraction et $d\Omega$ l'angle solide dans le milieu qui, après réfraction, devient égal à $d\Omega_0$.

Après division par $d\omega$, la condition de la balance détaillée s'écrit

$$(1 - A_\omega) I^0_\omega \cos \varphi_0 \, d\Omega_0 + A_\omega I_\omega \cos \varphi \, d\Omega = I^0_\omega \cos \varphi_0 \, d\Omega_0$$

ou

$$I_\omega \cos \varphi \, d\Omega = I^0_\omega \cos \varphi_0 \, d\Omega_0.$$

Prenons pour $d\Omega_0$ l'angle solide (non représenté sur la figure 340) délimité par les cônes dont les génératrices font avec la normale à la surface de séparation les angles φ_0 et $\varphi_0 + d\varphi_0$, i. e. $d\Omega_0 = 2\pi \sin \varphi_0 \, d\varphi_0$. De même $d\Omega = 2\pi \sin \varphi \, d\varphi$. L'égalité précédente s'écrit maintenant

$$I_\omega \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi = I^0_\omega \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 \, d\varphi_0.$$

Selon la loi de réfraction, $\sin \varphi_0 = n \sin \varphi$, et par suite $\cos \varphi_0 \, d\varphi_0 = n \cos \varphi \, d\varphi$. Par conséquent

$$I_\omega \sin \varphi = n I^0_\omega \sin \varphi_0,$$

d'où, en vertu de la même loi de réfraction,

$$I_\omega = n^2 I^0_\omega. \tag{114.1}$$

C'est la solution qui a été trouvée, en 1860, par Kirchhoff, et indépendamment par Clausius, en 1864. On l'appelle *formule de Kirchhoff-Clausius.*

Dans le vide I^0_ω et u^0_ω sont liés par la relation (112.6), i. e. $cu^0_\omega = 4\pi I^0_\omega$. Dans le milieu la relation correspondante est $v_{gr} u_\omega = 4\pi I_\omega$, v_{gr} étant la vitesse de groupe. De là

$$u_\omega = u^0_\omega n^2 \frac{c}{v_{gr}}. \tag{114.2}$$

Pour les milieux non dispersifs

$$u_\omega = n^3 u^0_\omega. \tag{114.3}$$

On peut mettre les formules (114.1) et (114.3) sous une forme plus facile à retenir et dont la profonde signification physique apparaît lorsqu'on traite le problème par les méthodes de la physique statistique (cf. § 117). En remarquant que $n = \lambda_0/\lambda$, les formules (114.1) et (114.3) s'écrivent

$$\lambda^2 I_\omega = \lambda_0^2 I^0_\omega, \tag{114.4}$$

$$\lambda^3 u_\omega = \lambda_0^3 u^0_\omega. \tag{114.5}$$

La relation (114.4) signifie que *dans un rayonnement d'équilibre les flux d'énergie passant par une aire rectangulaire de côté égal à la longueur d'onde λ (dans le milieu considéré) et rapportés à l'unité d'angle solide, dans le sens de la normale à la surface sont les mêmes pour tous les milieux et ne dépendent que de leur température.* Cette assertion est valable tant pour le flux total que pour ses composantes monochromatiques. De même, la relation (114.5) affirme que *l'énergie d'un rayonnement d'équilibre localisée dans un cube d'arête égale à la*

longueur d'onde λ, est la même dans tous les milieux isotropes non dispersifs et ne dépend que de la température du milieu. Cette assertion s'applique à la densité totale d'énergie et à ses composantes monochromatiques.

§ 115. Loi de Stefan-Boltzmann

1. Au XIXe siècle, on entreprit de nombreuses études de la dépendance de l'*émittance énergétique intégrale* des corps incandescents avec la température ; il s'agit là de la grandeur qui caractérise l'*énergie totale* de toutes les longueurs d'ondes émises par les corps. Les résultats obtenus étaient contradictoires. La principale cause des divergences ne fut élucidée qu'après que Kirchhoff eut établi sa loi car le rayonnement dépend non seulement de la température, mais aussi de la composition des corps et des propriétés physiques de la surface rayonnante. Or c'est cet aspect de la question que négligèrent les chercheurs. La seule loi empirique qui mérite d'être mentionnée est la loi qu'établit Stefan (1835-1893) en 1879: l'*émittance énergétique du corps noir est proportionnelle à la quatrième puissance de sa température absolue.* Cinq ans plus tard, Boltzmann retrouva ce résultat en partant de considérations thermodynamiques et démontra qu'il est *rigoureusement vrai pour les corps noirs.* Ce résultat connu sous le nom de *loi de Stefan-Boltzmann* a reçu de nombreuses vérifications expérimentales.

La démonstration de la loi de Stefan donnée par Boltzmann, ainsi que toutes les recherches ultérieures sur la théorie du rayonnement thermique, sont fondées sur les résultats de Maxwell qui prédit et calcula la *pression lumineuse* (cf. t. II, § 61 ; t. III, § 145 et problème n° 2 au § 84 de ce tome). Pour un rayonnement isotrope cette pression est $\mathcal{P} = {}^1/_3 u$, où u est la densité intégrale de l'énergie rayonnante. C'est cette expression que doit établir toute *théorie relativiste de la lumière*, qu'elle soit corpusculaire ou ondulatoire. Avant que la théorie de la relativité ait été créée, ce résultat ne pouvait être connu et les résultats de Maxwell n'étaient pas toujours tenus pour vrais. C'est ainsi que selon la théorie corpusculaire non relativiste, on devrait obtenir $\mathcal{P} = {}^2/_3 u$, conformément à la théorie cinétique des gaz (cf. t. II, § 59). C'est pour cela que les recherches expérimentales de P. N. Lébédev, qui mesura, en 1900, la pression de la lumière et confirma les prévisions de Maxwell, ont joué un rôle déterminant pour la thermodynamique de l'énergie radiante.

2. Nous baserons la démonstration de la loi de Stefan-Boltzmann sur la *méthode des cycles*, afin d'obtenir plusieurs relations importantes que nous aurons à utiliser plus tard. Supposons qu'un rayonnement isotrope de composition spectrale quelconque soit enfermé dans une enceinte adiabatique à parois parfaitement réfléchissantes. Soumettons ce rayonnement à une transformation adiabatique quasi

statique lors de laquelle la variation du volume V délimité par l'enceinte est infiniment lente. Afin d'être certain que, lors de cette transformation, le rayonnement restera isotrope, on peut prendre une enceinte sphérique (nous montrerons au paragraphe suivant que cette précaution est inutile). L'énergie interne du rayonnement contenu dans l'enceinte est égale à uV. Lorsque le volume augmente de dV, une partie de cette énergie est utilisée pour produire le travail $\mathcal{P}\, dV$, de sorte que $\mathcal{P}\, dV = -\, d\,(uV)$. Comme pour un rayonnement isotrope $\mathcal{P} = {}^1/_3 u$, cette équation peut s'écrire ${}^4/_3 u\, dV + V\, du = 0$. Il s'ensuit que lors de la transformation

$$uV^{4/3} = \text{const} \tag{115.1}$$

ou

$$\mathcal{P}V^{4/3} = \text{const}. \tag{115.2}$$

C'est l'*équation de l'adiabatique* du rayonnement isotrope; elle est analogue à l'équation de Poisson pour un gaz parfait. La constante adiabatique $\gamma = {}^4/_3$.

Lors d'une compression ou d'une détente adiabatique du rayonnement, sa composition spectrale doit varier par effet Doppler. Si, par exemple, le rayonnement isotrope occupe l'intervalle spectral ω, $\omega + d\omega$, à la suite des réflexions par la paroi mobile, la fréquence ω et la largeur $d\omega$ de l'intervalle spectral varieront et deviendront égales à ω' et $d\omega'$. La relation suivante sera vérifiée:

$$u_\omega\, d\omega \cdot V^{4/3} = u'_{\omega'}\, d\omega' \cdot V'^{4/3} = \text{const}, \tag{115.3}$$

où V' et $u'_{\omega'}$ sont le volume et la densité spectrale de l'énergie de rayonnement de fréquence ω' après la transformation.

3. Démontrons maintenant la loi de Stefan-Boltzmann. Soumettons le rayonnement du corps noir à un *cycle de Carnot*, en supposant que le rayonnement est contenu dans un cylindre dont les parois latérales et le piston sont parfaitement réfléchissants et dont le fond est noirci et peut être amené en contact thermique avec une source chaude de température T_1 ou avec une source froide de température T_2. On peut rendre adiabatique l'enceinte contenant le rayonnement en recouvrant le fond noirci du cylindre d'un couvercle mobile parfaitement réfléchissant. Tant que le couvercle n'est pas en place et que le fond noirci du cylindre est en contact thermique avec la source chaude ou froide, le rayonnement contenu dans le cylindre est d'équilibre. Pour nous assurer que le rayonnement sera toujours d'équilibre au cours de la transformation adiabatique, le couvercle isolant le fond noirci étant en place, introduisons dans le cylindre un grain de poussière noir dont le rôle a été précisé au § 112, pt. 1. Le long de l'isotherme *1—2* (fig. 341) le fond du cylindre est en contact avec la source chaude. La quantité de chaleur cédée par la source

chaude le long de l'isotherme est

$$Q_1 = u_1 (V_2 - V_1) + \mathscr{P}_1 (V_2 - V_1) = \frac{4}{3} u_1 (V_2 - V_1).$$

La quantité de chaleur fournie par le cylindre à la source froide le long de l'isotherme *3—4* est $Q_2 = {}^4/_3 u_2 (V_3 - V_4)$. Selon le théorème de Carnot

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{u_1 (V_2 - V_1)}{u_2 (V_3 - V_4)} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Le long des courbes adiabatiques *2—3* et *4—1*, en vertu de (115.1)

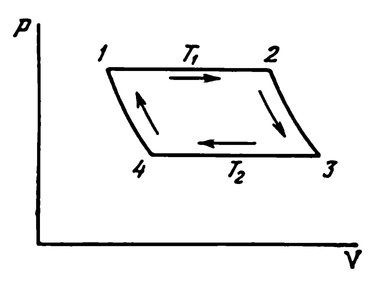


Fig. 341

sont vérifiées les relations suivantes:

$$u_1^{3/4} V_2 = u_2^{3/4} V_3, \quad u_1^{3/4} V_1 = u_2^{3/4} V_4,$$

d'où

$$\frac{V_2 - V_1}{V_3 - V_4} = \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^{3/4}$$

et par suite $u_1/T_1^4 = u_2/T_2^4 =$ const. Par conséquent

$$u = aT^4, \tag{115.4}$$

où a est une constante universelle. Or c'est la loi de Stefan-Boltzmann écrite sous une forme différente.

On peut arriver au résultat (115.4) plus simplement en appliquant au rayonnement d'équilibre la formule thermodynamique générale

$$\left(\frac{\partial u}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial T}\right)_V - \mathscr{P}. \tag{115.5}$$

En y portant $U = Vu(T)$, $\mathscr{P} = {}^1/_3 u(T)$, on aboutit à l'équation différentielle dont l'intégration fournit la formule (115.4). Mais c'est sciemment que nous n'avons pas utilisé la formule (115.5).

§ 116. Théorème et loi du déplacement de Wien

1. Les recherches en thermodynamique des rayonnements que W. Wien (1864-1928) entreprit en 1893-1894 permirent à celui-ci de démontrer qu'*un rayonnement d'équilibre contenu dans une enceinte*

à parois parfaitement réfléchissantes reste d'équilibre lors d'une compression ou d'une détente quasi statique de l'enceinte.

Pour faire la démonstration de ce théorème nous nous limiterons à une enceinte de forme sphérique, puisque dans ce cas, vu la symétrie sphérique du système, il est superflu de démontrer que le rayonnement reste isotrope au cours de la transformation. Comprimons le rayonnement de façon quasi statique du volume initial V_1 au volume final V_2. On exécute alors un travail à l'encontre des forces de la pression lumineuse et l'énergie du rayonnement contenu dans l'enceinte s'en trouve accrue. Du fait de l'effet Doppler, la composition spectrale du rayonnement est également modifiée. Supposons qu'à la suite de cette transformation le rayonnement ne serait plus d'équilibre. Introduisons dans l'enceinte, aussitôt après la transformation, un grain de poussière noir infiniment petit émettant et absorbant de la lumière. Au bout d'un temps suffisamment long, ce grain rétablira le rayonnement d'équilibre par un processus irréversible et spontané. Il est évident que le processus inverse faisant passer le rayonnement dans un état hors d'équilibre ne peut être spontané.

Lorsque le rayonnement dans l'enceinte aura atteint à l'équilibre, et en laissant le grain de poussière en place, commençons à augmenter adiabatiquement le volume de l'enceinte de façon infiniment lente jusqu'à ce qu'il reprenne sa valeur initiale V_1. A ce moment on retire le grain de poussière de l'enceinte. Comme son énergie est infiniment petite, sa présence ne modifie l'énergie du rayonnement contenu dans l'enceinte que d'une quantité infiniment petite. D'autre part, la pression lumineuse qu'exerce un rayonnement isotrope ne dépend que de la densité intégrale u de l'énergie de rayonnement et ne dépend pas de sa composition spectrale. Il s'ensuit que le travail produit par la pression lumineuse lors de la détente doit être égal, à une quantité infinitésimale près, au travail extérieur accompli lors de la compression du rayonnement. Par conséquent, ni l'énergie ni la température du rayonnement ne doivent changer à la suite d'une compression suivie d'une détente.

Le système a exécuté ainsi un cycle de transformations au cours duquel il n'a ni cédé ni reçu aucune chaleur, le travail résultant étant nul. Il en résulte que les corps environnants n'ont subi aucun changement, ce qui implique que le cycle est réversible. Or puisque nous avons admis que l'une des étapes du cycle était irréversible, le cycle ne peut être réversible. Cette hypothèse étant fausse, le théorème de Wien se trouve démontré.

2. Le théorème de Wien a une grande valeur méthodique. En effet, si on fait varier de façon adiabatique et quasi statique le volume d'un rayonnement d'équilibre contenu dans une enceinte à parois parfaitement réfléchissantes, on peut produire un rayonnement d'équilibre de n'importe quelle densité et donc de n'importe quelle

température. On peut calculer l'énergie et la température de ce rayonnement en calculant le travail qui a été dépensé au cours de la transformation qui a amené le rayonnement à l'état considéré. La composition spectrale du rayonnement s'obtient en calculant la variation de sa fréquence par effet Doppler lors de la réflexion du rayonnement sur la paroi mobile de l'enceinte. On établit ainsi une relation bien déterminée entre les paramètres du rayonnement d'équilibre au début de la transformation et à une étape quelconque de celle-ci.

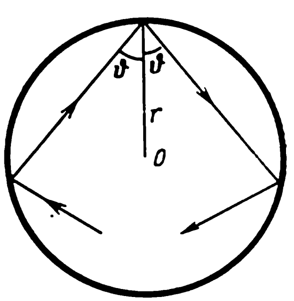


Fig. 342

Appliquons cette méthode au rayonnement d'équilibre contenu dans une enceinte sphérique à parois parfaitement réfléchissantes. Lors d'une compression ou d'une détente adiabatique infiniment lente de l'enceinte, le rayonnement qui y est contenu sera d'équilibre à tout instant et on pourra donc le caractériser par une température T bien déterminée. Considérons un rayon contenu dans l'enceinte qui tombe sur la paroi sous un angle ϑ (fig. 342). Le temps qui s'écoule entre deux réflexions successives de ce rayon est $\Delta t = (2r/c) \cos \vartheta$. Au cours de cet intervalle de temps le rayon r de l'enceinte s'accroît de $\Delta r = \dot{r}\, \Delta t$. A chaque réflexion il se produit une variation de fréquence par effet Doppler définie par la formule

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{2\dot{r}\cos\vartheta}{c} = -\frac{2\Delta r\cos\vartheta}{c\Delta t} = -\frac{\Delta r}{r},$$

où on a rejeté le carré de la vitesse radiale $\dot{r}$ de dilatation de l'enceinte, vu qu'elle est infiniment petite. La variation relative de la fréquence $\Delta\omega/\omega$ ne dépend que de la variation relative $\Delta r/r$ du rayon de l'enceinte. La même formule reste valable si pendant la variation Δr du rayon il se produit plusieurs réflexions successives du rayon lumineux, à condition que $\Delta r \ll r$. Si la détente est infiniment lente, on peut remplacer les quantités Δr et $\Delta\omega$ par les différentielles correspondantes, ce qui conduit à la formule

$$\frac{d\omega}{\omega} + \frac{dr}{r} = 0. \qquad (116.1)$$

Cette équation signifie que le processus réel où les réflexions successives se suivent à des intervalles de temps petits mais finis, est remplacé dans les calculs par un processus idéalisé où les réflexions se succèdent *de façon continue dans le temps*. En intégrant (116.1) on trouve

$$\omega r = \text{const.} \qquad (116.2)$$

Comme $r \sim V^{1/3}$ ce résultat peut s'écrire

$$\omega^3 V = \text{const.} \tag{116.3}$$

Sous cette forme la formule s'applique aux cavités de forme arbitraire et comme elle a été obtenue pour une transformation infiniment lente, la quantité $\omega^3 V$ en est l'*invariant adiabatique*. En le combinant avec les invariants adiabatiques (115.1) et (115.3) on obtient de nouveaux invariants adiabatiques. Des formules (115.1) et (116.3) on tire par exemple

$$\frac{\omega^4}{u} = \text{const,} \tag{116.4}$$

et en vertu de la loi de Stefan-Boltzmann

$$\frac{\omega}{T} = \text{const.} \tag{116.5}$$

On déduit des formules (115.3) et (116.3) le résultat suivant:

$$\frac{u_\omega \, d\omega}{\omega^4} = \text{const.} \tag{116.6}$$

Cela signifie que lors d'une compression ou d'une détente quasi statique d'un rayonnement d'équilibre contenu dans une enceinte à parois parfaitement réfléchissantes, chaque composante quasi monochromatique du rayonnement se comporte *indépendamment de toutes les autres composantes* et varie de manière que les quantités $\omega^3 V$, u/ω^4 et $u_\omega \, d\omega/\omega^4$ restent constantes, i.e. soient des invariants adiabatiques. Selon le théorème de Wien, le rayonnement reste d'équilibre pendant ces transformations. On pourrait obtenir le même état du rayonnement contenu dans une cavité indéformable en échauffant ou en refroidissant ses parois. Il s'ensuit que les résultats obtenus peuvent être considérés comme des *propriétés du rayonnement d'équilibre* ne dépendant pas de la nature de la transformation mise en œuvre. On peut formuler ces résultats de la façon suivante. *Faisons varier la température d'un rayonnement d'équilibre de T à T' de manière qu'il soit toujours d'équilibre. Faisons correspondre à chaque fréquence ω du rayonnement à l'état initial une fréquence ω' du rayonnement à l'état final telle que $\omega/T = \omega'/T'$ et donc $d\omega/T = d\omega'/T'$. Les densités d'énergie radiante dans ces deux états sont alors liées par les relations*

$$\frac{u}{\omega^4} = \frac{u'}{\omega'^4}, \tag{116.7}$$

$$\frac{u_\omega \, d\omega}{\omega^4} = \frac{u'_{\omega'} \, d\omega'}{\omega'^4}. \tag{116.8}$$

Ces résultats expriment la *loi de déplacement de Wien sous la forme la plus générale.*

3. On déduit de (116.8) le résultat suivant:

$$u_\omega(\omega, T) = \frac{\omega^4}{\omega'^4}\frac{d\omega'}{d\omega}u'_{\omega'}(\omega', T') = \frac{T^3}{T'^3}u'_{\omega'}\left(\frac{T'}{T}\omega, T'\right).$$

Comme cette relation est vérifiée pour n'importe quelle température T', la quantité figurant dans le second membre ne dépend pas de T'. On peut attribuer à T' *n'importe quelle valeur* en représentant la relation ci-dessus sous la forme

$$u_\omega(\omega, T) = T^3\varphi\left(\frac{\omega}{T}\right), \tag{116.9}$$

où $\varphi(\omega/T)$ est une *fonction universelle* de l'argument ω/T. En remarquant que $\omega/T = \omega'/T'$ on peut écrire (116.9) sous la forme

$$u_\omega(\omega, T) = \omega^3 f\left(\frac{\omega}{T}\right), \tag{116.10}$$

où $f(\omega/T) \equiv (T'/\omega')^3\varphi(\omega/T)$ est une nouvelle *fonction universelle* du même argument ω/T. Ainsi la recherche de la fonction universelle de *deux arguments* $u_\omega(\omega, T)$ est ramenée à la recherche de la fonction universelle $\varphi(\omega/T)$ ou $f(\omega/T)$ d'un *seul argument* ω/T. Il s'ensuit que *si on connaît la répartition spectrale des fréquences dans un rayonnement d'équilibre à une température donnée T', les formules* (116.9) *et* (116.10) *permettent de calculer cette répartition spectrale à toute autre température T.*

Si on utilise les variables λ et T, la relation (112.2) permet de mettre les formules (116.9) et (116.10) sous la forme

$$u_\lambda = T^5\varphi_1(\lambda T), \tag{116.11}$$

$$u_\lambda = \frac{1}{\lambda^5}f_1(\lambda T), \tag{116.12}$$

où $\varphi_1(\lambda T)$ et $f_1(\lambda T)$ sont de nouvelles *fonctions universelles.* A température T constante, la grandeur u_λ ne dépend que de la longueur d'onde λ. Cette fonction ne peut croître de façon monotone et doit présenter un maximum, car autrement la densité intégrale d'énergie

$$u = \int_0^\infty (u_\lambda)_{T=\mathrm{const}}\, d\lambda \tag{116.13}$$

ne pourrait rester finie. La longueur d'onde correspondant au maximum est notée λ_m. En utilisant la notation $x = \lambda T$, la position du maximum est définie par l'équation

$$d\varphi_1/d\lambda = T\, d\varphi_1/dx = 0, \quad \text{i.e.} \quad d\varphi_1/dx = 0.$$

Ainsi, à toutes les températures, le maximum correspond à une même valeur de l'argument x. Il en résulte que *lorsque la température s'élève, le maximum de la fonction $u_{\lambda,\, T=\mathrm{const}}$ se déplace vers les ondes courtes de façon que soit vérifiée la relation*

$$\lambda_m T = b = \mathrm{const.} \tag{116.14}$$

Les mesures fournissent: $b = 0{,}2898$ cm·K. Ce résultat qui caractérise le déplacement du maximum de rayonnement lorsque la température T varie, est une *forme particulière de la loi de Wien*. Aux points correspondant aux maximums les fonctions $u_\lambda(T)$ et $u_{\lambda'}(T')$ sont entre elles comme les températures absolues T et T' élevées à la *puissance cinq*.

A température T constante, la fonction $u_\omega(\omega, T)$ est maximale pour une certaine fréquence $\omega = \omega_m$. La fréquence ω_m n'est pas égale à $2\pi c/\lambda_m$ puisqu'il s'agit des maximums de deux *fonctions différentes* $u_\omega(\omega)$ et $u_\lambda(\lambda)$. Lorsque la température du rayonnement varie, le maximum se déplace, mais la relation

$$\frac{\omega_m}{T} = \text{const} \qquad (116.15)$$

reste vérifiée. C'est encore une *autre forme de la loi du déplacement de Wien* (116.14).

4. La loi de Stefan-Boltzmann est une conséquence de la formule générale (116.9). En effet, avec la notation $x = \omega/T$, à température T constante, on tire de (116.9)

$$u = \int_0^\infty u_\omega \, d\omega = T^3 \int_0^\infty \varphi\left(\frac{\omega}{T}\right) d\omega = T^4 \int_0^\infty \varphi(x)\, dx = aT^4,$$

où $a \equiv \int_0^\infty \varphi(x)\, dx$ est une constante universelle.

§ 117. Formule de Rayleigh-Jeans

1. Les résultats qui ont été présentés dans les paragraphes précédents, c'est tout ce que l'on a pu tirer de la thermodynamique phénoménologique pour traiter le problème du rayonnement thermique. Mais la thermodynamique ne peut résoudre le principal problème de la théorie du rayonnement thermique: trouver la forme de la fonction $u_\omega(\omega, T)$ ou de la fonction $I_\omega(\omega, T)$ qui est liée à la précédente par la relation (112.6). Pour y arriver il fallut faire appel aux *méthodes statistiques* et tenir compte des *propriétés quantiques des substances et des rayonnements*. La première tentative de résoudre ce problème a été entreprise en 1887 par V. A. Michelson (1860-1927). Quoique cette entreprise ait été irrémédiablement vouée à l'échec, comme le démontra le développement ultérieur de la physique, Michelson attira l'attention des physiciens sur ce problème crucial dont la solution marqua l'avènement de la *physique quantique*.

La méthode générale de détermination théorique de la fonction $u_\omega(\omega, T)$ basée sur les conceptions de la physique classique et n'utilisant aucun modèle, a été suggérée, en 1900, par Rayleigh et

élaborée cinq ans plus tard par Jeans (1877-1946). Rayleigh et Jeans appliquèrent au rayonnement d'équilibre contenu dans une cavité le théorème de la mécanique statistique classique sur l'*équipartition de l'énergie cinétique entre les degrés de liberté* du système. Selon ce théorème, *à l'état d'équilibre statistique, à chaque degré de liberté revient en moyenne une énergie égale à* $^1/_2kT$, où $k = 1{,}38\cdot10^{-16}$ erg/K est la constante de Boltzmann.

Lorsqu'il s'agit d'un degré de liberté vibratoire on doit encore tenir compte de l'*énergie potentielle.* Dans le cas de *vibrations harmoniques* la valeur moyenne de l'énergie potentielle est égale à $^1/_2kT$ (cf. t. II, § 63). Ainsi *dans un état d'équilibre statistique chaque degré de liberté vibratoire possède une énergie moyenne égale à kT.*

L'application de ce théorème ramène le problème de la détermination de la fonction u_ω (ω, T) au calcul du *nombre de degrés de liberté existant dans la cavité.* Comme le rayonnement d'équilibre contenu dans une cavité ne dépend ni de la forme ni du matériau de cette dernière, on peut admettre que la cavité est de forme cubique et que ses parois sont parfaitement réfléchissantes. Pour que le rayonnement soit d'équilibre, on peut introduire dans la cavité un grain de poussière noir infiniment petit, comme nous l'avons fait dans la démonstration du théorème de Wien.

2. Pour mieux faire comprendre la méthode de détermination du nombre de degrés de liberté, appliquons-la d'abord à un *champ d'onde scalaire*, par exemple aux ondes acoustiques longitudinales. Ce problème présente d'ailleurs son intérêt propre, par exemple pour la théorie de la capacité calorifique des solides de Debye. Caractérisons le champ d'onde par une fonction V ($\boldsymbol{r}$, t) vérifiant l'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=0. \tag{117.1}$$

En supposant que la fonction V s'annule sur les parois de la cavité (ou en adoptant d'autres conditions aux limites), selon le théorème de Fourier la fonction V ($\boldsymbol{r}$, t) peut être représentée par une superposition d'ondes stationnaires. Dirigeons les axes de coordonnées X, Y, Z parallèlement aux arêtes de la cavité cubique. Comme les conditions aux limites doivent être vérifiées sur les faces $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ et sur les faces qui leur sont parallèles, chacune des ondes stationnaires doit être représentée par une fonction à *variables séparables*, i.e.

$$V = X(x)\,Y(y)\,Z(z)\exp(i\omega t).$$

D'où

$$\frac{1}{V}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2},\ \ldots,\ \frac{1}{V}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=\frac{\omega^2}{c^2}.$$

En portant ces expressions dans (117.1) on obtient

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}+\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=\frac{\omega^2}{c^2}.$$

Le premier membre de cette équation est la somme des fonctions de x, y, z respectivement, donc des fonctions de variables différentes. Il est égal à la constante ω^2/c^2. Or cela est possible si et seulement si chacune de ces fonctions est constante, i.e.

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=q_x^2,\quad \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=q_y^2,\quad \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=q_z^2,$$

où q_x, q_y, q_z sont des constantes vérifiant la condition

$$q_x^2+q_y^2+q_z^2=q^2\equiv\frac{\omega^2}{c^2}. \tag{117.2}$$

Ecrivons la solution de la première équation sous la forme $X =$ $= \sin(q_x x + \delta_x)$, où δ_x est la constante d'intégration. La deuxième constante d'intégration est l'amplitude que l'on peut cependant négliger sans porter atteinte à la généralité des résultats. Sur la face $x = 0$ de la cavité cubique la fonction X doit s'annuler, i.e. $\sin\delta_x =$ $= 0$. On peut poser aussi $\delta_x = 0$ sans porter préjudice à la généralité des développements. Sur la face opposée $x = l$, où l est la longueur de l'arête de la cavité cubique, la fonction X doit s'annuler aussi, ce qui implique que $\sin k_x l = 0$. On trouve des résultats analogues pour les coordonnées y et z. Par conséquent

$$V = \sin q_x x \sin q_y y \sin q_z z e^{i\omega t}, \tag{117.3}$$

où

$$q_x l = m_x\pi,\quad q_y l = m_y\pi,\quad q_z l = m_z\pi, \tag{117.4}$$

où m_x, m_y, m_z sont des nombres entiers que l'on admet être positifs, puisqu'avec des nombres négatifs on n'obtient pas de nouvelles solutions qui soient linéairement indépendantes. On pourrait introduire dans (117.3) une amplitude constante qui dépendrait de m_x, m_y, m_z mais on n'en a pas besoin ici. L'expression (117.3) est la représentation générale d'une *onde stationnaire* dans la cavité. A chaque triade des entiers positifs m_x, m_y, m_z vérifiant les conditions (117.4), correspond une onde stationnaire. Le nombre d'ondes stationnaires possibles est illimité.

Prenons q_x, q_y, q_z pour les coordonnées rectangulaires d'un point de l'espace tridimensionnel des vecteurs d'onde $\boldsymbol{q}$. Ces points figuratifs se situent aux nœuds d'un réseau cubique dont la maille élémentaire est un cube d'arête $\Delta q_x = (\pi/l)\,\Delta m_x = \pi/l$ et de volume $(\pi/l)^3$. Le réseau n'occupe que l'octant positif de l'espace des vecteurs d'onde, puisque toutes les coordonnées q_x, q_y, q_z sont positives. Le volume de la portion d'une sphère de rayon q contenue dans cet octant est égal à $^1/_8\,(4\pi/3)\,q^3 = (\pi/6)\,q^3$. Le nombre de points figuratifs contenus dans cette portion de la sphère est égal au nombre Z

d'ondes stationnaires dont les nombres d'onde sont égaux ou inférieurs à $q = 2\pi/\lambda$. La majeure partie de ces ondes sont très courtes et leurs q sont très grands devant la longueur π/l de l'arête du cube élémentaire. Il s'ensuit que le nombre d'ondes stationnaires contenues dans cet octant de sphère s'obtient en divisant le volume de cet octant de sphère par le volume de la maille élémentaire. On aboutit ainsi à la formule asymptotique

$$Z = \frac{(\pi/6)\, q^3}{\pi^3/l^3} = \frac{V}{6\pi^2}\, q^3 = \frac{V}{6\pi^2}\, \frac{\omega^3}{c^3}, \tag{117.5}$$

où $V = l^3$ est le volume de la cavité. Cette formule est vérifiée lorsque l'arête de la cavité cubique est très grande devant la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/q$. On démontre que la formule (117.5) est vérifiée pour une cavité de forme arbitraire, quoique dans ce cas les ondes stationnaires ne seront plus décrites par les expressions de la forme (117.3). En différentiant (117.5) on obtient

$$dZ = \frac{V}{2\pi^2}\, q^2\, dq = \frac{V}{2\pi^2 c^3}\, \omega^2\, d\omega. \tag{117.6}$$

Cette formule asymptotique donne le nombre d'ondes stationnaires dont les fréquences sont comprises dans l'intervalle ω, $\omega + d\omega$. Elle n'est vérifiée que si l'intervalle $d\omega$ est assez large, i.e. lorsque $dZ \gg 1$.

3. Les développements ci-dessus ne changent pas essentiellement lorsqu'on passe à l'étude d'un champ vectoriel (électromagnétique). Dans ce cas le vecteur $\boldsymbol{E}$ et ses composantes rectangulaires E_x, E_y, E_z vérifient l'équation d'onde (117.1). Pour une cavité à parois parfaitement réfléchissantes, les conditions aux limites imposent que les composantes tangentielles du vecteur $\boldsymbol{E}$ soient nulles sur les parois de la cavité. Pour que cette condition soit satisfaite, il faut et il suffit que soient vérifiées les conditions suivantes:

$$\begin{aligned} E_y &= E_z = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0 \quad \text{et} \quad x = l, \\ E_z &= E_x = 0 \quad \text{pour} \quad y = 0 \quad \text{et} \quad y = l, \\ E_x &= E_y = 0 \quad \text{pour} \quad z = 0 \quad \text{et} \quad z = l. \end{aligned}$$

L'onde stationnaire satisfaisant à ces conditions est de la forme

$$\begin{aligned} E_x &= \sin\,(q_x x + \varphi_x)\, \sin q_y y\, \sin q_z z e^{i\omega t}, \\ E_y &= \sin q_x x\, \sin\,(q_y y + \varphi_y)\, \sin q_z z e^{i\omega t}, \\ E_z &= \sin q_x x\, \sin q_y y\, \sin\,(q_z z + \varphi_z)\, e^{i\omega t}, \end{aligned}$$

où q_x, q_y, q_z sont définis par les formules (117.4). En ce qui concerne les phases φ_x, φ_y, φ_z on peut les calculer à l'aide des conditions aux limites que vérifient les composantes normales du vecteur électrique $\boldsymbol{E}$ sur les parois de la cavité. Mais ici ce calcul est inutile puisque pour trouver Z et dZ il suffit de connaître les valeurs que peuvent

prendre les composantes q_x, q_y et q_z. Comme les ondes électromagnétiques sont des ondes *vectorielles* et *transversales*, on doit multiplier par deux les expressions (117.5) et (117.6). A chaque direction de propagation correspondent *deux ondes* polarisées dans des plans rectangulaires; leur superposition peut produire une onde de n'importe quelle polarisation se propageant suivant cette même direction. Ainsi pour un champ électromagnétique

$$dZ = \frac{V}{\pi^2 c^3}\,\omega^2\,d\omega. \tag{117.7}$$

Chaque onde se trouvant dans un état d'équilibre statistique possède en moyenne une énergie $\overline{\mathscr{E}} = kT$: la moitié de cette énergie est électrique et l'autre moitié est magnétique. En écrivant l'énergie du rayonnement d'équilibre contenu dans la cavité et revenant à l'intervalle spectral $d\omega$ sous la forme $Vu_\omega\,d\omega$, on tire de (117.7)

$$u_\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}\,\overline{\mathscr{E}} = \frac{kT}{\pi^2 c^3}\,\omega^2. \tag{117.8}$$

C'est la *formule* dite *de Rayleigh-Jeans*, quoique ce même résultat fût obtenu de façon indépendante par Planck, qui se fondait sur des considérations différentes mais tout aussi générales (cf. pt. 6 ci-dessous).

4. Avant de discuter la formule de Rayleigh-Jeans, il importe de noter que si la cavité est occupée par un milieu isotrope, le nombre d'ondes stationnaires qui s'y trouvent sera donné par les formules (117.5) et (117.6), à condition d'y remplacer c par la vitesse de la lumière v dans le milieu considéré (supposé isotrope). Il en résulte que dans un intervalle de fréquences donné les nombres Z et dZ et donc la fonction u_ω sont proportionnels à c^3/v^3, i.e. au cube de l'indice de réfraction du milieu n. Or c'est la *loi de Kirchhoff-Clausius* que nous avons établie au § 114. La démonstration resterait valable si on avait fait des hypothèses plus générales que celles qu'on a utilisées. Il n'est pas nécessaire de se référer au théorème sur l'équipartition de l'énergie entre les degrés de liberté, car il suffit que l'énergie moyenne de l'oscillateur harmonique ne soit fonction que de la fréquence ω, comme c'est le cas en théorie quantique.

5. La formule de Rayleigh-Jeans non seulement s'accorde avec la formule thermodynamique de Wien (116.9) ou (116.10), mais elle peut être déduite de la formule de Wien dans le cas limite des fréquences basses. Il suffit de remarquer que dans la formule (116.10) la fonction $f(\omega/T)$ doit croître avec la température T et s'annuler pour $T = 0$. Il est préférable de la considérer comme fonction de l'argument T/ω et de la développer en série de puissances de cet argument. En ne gardant que le premier terme de ce développement, on trouve

$$u_\omega(\omega,\ T) = CT\omega^2. \tag{117.9}$$

De par sa forme, ce résultat coïncide avec la formule (117.8), excepté que le coefficient C reste indéterminé. Mais la formule (117.9) est fondée sur des hypothèses plus générales que la formule (117.8). Dans le cas limite des *fréquences basses*, on peut être certain que la forme de (117.9) est correcte. En effet, pour des ondes suffisamment longues (le critère en est donné au paragraphe suivant) la formule de Rayleigh-Jeans est en excellent accord avec les résultats expérimentaux et peut être utilisée avec succès dans l'infrarouge et dans la gamme des ondes radio.

La statistique classique impose que la formule de Rayleigh-Jeans (117.8) soit vérifiée *à toutes les fréquences*. Or cela est impossible, puisqu'alors la densité intégrale d'énergie serait infinie :

$$u = \frac{kT}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \omega^2 \, d\omega = \infty .$$

Il s'ensuit que *selon la théorie de Rayleigh-Jeans il ne peut y avoir d'équilibre thermique entre la matière et le rayonnement*. Or cette conclusion est infirmée par l'expérience et c'est pour cela que P. S. Ehrenfest parla de *catastrophe dans l'ultraviolet*. La raison en est que dans la théorie de Rayleigh-Jeans le rayonnement contenu dans la cavité possède un nombre *infini* de degrés de liberté, tandis que les substances n'en possèdent qu'un nombre fini. Ainsi, si la loi de l'équipartition de l'énergie entre les degrés de liberté était juste, à l'équilibre thermique toute l'énergie se serait concentrée dans le rayonnement.

6. On pourrait arguer que la mécanique statistique classique dont le théorème de l'équipartition de l'énergie cinétique entre les degrés de liberté est une conséquence, ne peut être appliquée à un système possédant une infinité de degrés de liberté. Mais cette argumentation n'est pas juste. La mécanique statistique classique se fonde sur les équations de la mécanique classique sous la forme que leur donna Hamilton (1805-1865). Quoique ces équations aient été établies pour les systèmes mécaniques, ayant un nombre fini de degrés de liberté, on démontre que *le rayonnement contenu dans une cavité peut être décrit par un nombre infini, mais dénombrable de coordonnées généralisées, qui vérifient les équations de Hamilton*. Il en résulte que le système composé de substances et de rayonnements peut être décrit par les équations de Hamilton.

On peut se demander pourquoi le théorème de l'équipartition de l'énergie est vérifié pour certains degrés de liberté et ne l'est pas pour d'autres.

D'autre part, Planck établit indépendamment la formule de Rayleigh-Jeans en appliquant ce théorème *à la substance seulement*. Planck étudia un oscillateur harmonique unidimensionnel, tel qu'un électron lié de manière quasi élastique et placé dans une cavité

contenant un rayonnement d'équilibre. Sous l'action des variations désordonnées du champ électromagnétique de rayonnement, l'oscillateur exécute des vibrations d'amplitudes et de phases variables, en émettant et en absorbant des ondes électromagnétiques. Dans ces conditions l'énergie de l'oscillateur subit des fluctuations autour de l'énergie moyenne $\mathscr{E}$. A la suite de calculs simples en principe, mais assez laborieux, Planck établit la formule

$$u_\omega = \frac{\overline{\mathscr{E}}}{\pi^2 c^3}\,\omega^2. \qquad (117.10)$$

Si on applique à l'oscillateur (i.e. à la substance) le théorème de l'équipartition de l'énergie cinétique entre les degrés de liberté, cette formule sera ramenée à la formule de Rayleigh-Jeans.

§ 118. Formule de Planck

1. C'est Planck qui réussit à établir par un procédé semi-empirique une formule de la densité spectrale de l'énergie d'un rayonnement d'équilibre qui donnait des résultats conformes à tous les résultats expérimentaux connus. Peu de temps après, il présenta, le 14 décembre 1900, une communication à la Société de Physique d'Allemagne où était exposée la démonstration théorique de la formule. Cette date marque la naissance d'une nouvelle physique, la physique *quantique*. La notion de quanta, que Planck introduisit avec beaucoup de précautions, se développa par la suite et constitua une théorie qui conquit toute la Physique. Planck n'aurait certainement pas réussi à résoudre le problème du rayonnement d'équilibre s'il n'avait pas été en contact étroit avec des expérimentateurs. Parmi les recherches consacrées au rayonnement du corps noir, on doit citer les recherches de Langley (1834-1906), Rubens (1865-1922), Paschen (1865-1947), Wien, Lummer (1860-1925), E. Pringsheim (1859-1917), Kurlbaum.

2. Planck émit l'hypothèse que la substance émettait et absorbait la lumière non pas de façon continue, mais par portions finies, appelées *quanta de lumière* ou *quanta d'énergie*. Nous allons établir la formule de Planck par la même méthode que celle que nous avons utilisée pour établir la formule de Rayleigh-Jeans. Il est alors commode de formuler l'hypothèse de Planck de la façon suivante: l'énergie d'un oscillateur harmonique ne peut varier que par multiples entiers d'une certaine quantité élémentaire ou quantum: 0, $\mathscr{E}_0$, $2\mathscr{E}_0$, $3\mathscr{E}_0$, . . ., et cette quantité $\mathscr{E}_0$ ne dépend que de la fréquence propre ω de l'oscillateur. On entend ici par oscillateur non seulement une particule pouvant exécuter des vibrations harmoniques libres, mais aussi bien une onde stationnaire de fréquence donnée contenue dans une cavité.

Si l'oscillateur est isolé, au bout d'un certain temps il perdra en rayonnement toute son énergie et viendra occuper le niveau le plus bas d'énergie $\mathscr{E} = 0$. Mais si l'oscillateur se trouve dans une cavité dont les parois sont maintenues à température constante, à ses actes d'émission se superposent des actes d'absorption, qui excitent ses niveaux d'énergie supérieurs. Il s'établit ainsi un état d'équilibre détaillé bien déterminé, où le nombre d'actes d'émission est en moyenne égal au nombre d'actes d'absorption. Dans cet état tous les niveaux d'énergie de l'oscillateur sont excités, mais avec des probabilités différentes. Pour trouver la fonction $u_\omega(\omega, T)$ il suffit de calculer l'énergie moyenne $\overline{\mathscr{E}}$ de l'oscillateur dans cet état d'équilibre statistique. Nous avons déjà traité ce problème dans le t. II, § 85, mais nous donnerons ici une autre solution de ce problème. Selon le théorème de Boltzmann les probabilités d'excitation des niveaux énergétiques d'un oscillateur sont proportionnelles aux quantités

$$1,\ e^{-\mathscr{E}_0/kT},\ e^{-2\mathscr{E}_0/kT},\ \ldots$$

Par conséquent

$$\overline{\mathscr{E}} = \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\mathscr{E}_0 e^{-n\mathscr{E}_0/kT}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-n\mathscr{E}_0/kT}} = \mathscr{E}_0 \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-nx}},$$

où $x = \mathscr{E}_0/kT$. Le dénominateur a pour valeur

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}}.$$

En différentiant cette expression par rapport à x on trouve la valeur du nominateur:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx} = \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}.$$

Il en résulte que

$$\overline{\mathscr{E}} = \frac{\mathscr{E}_0}{e^x - 1} = \frac{\mathscr{E}_0}{e^{\mathscr{E}_0/kT} - 1}. \tag{118.1}$$

En portant (118.1) dans (117.8) on obtient

$$u_\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{\mathscr{E}_0}{e^{\mathscr{E}_0/kT} - 1}. \tag{118.2}$$

Passons à la limite $\mathscr{E}_0 \to 0$, on a $e^{\mathscr{E}_0/kT} \approx 1 + \mathscr{E}_0/kT$ et par suite $\overline{\mathscr{E}} = kT$. On retrouve l'expression classique de l'énergie moyenne de l'oscillateur. Ainsi dans ce cas limite la formule (118.2) se

ramène à la formule de Rayleigh-Jeans. On pouvait s'y attendre, puisque le passage à la limite $\mathcal{E}_0 \to 0$ correspond en fait à un retour à la mécanique classique où l'énergie de l'oscillateur varie de façon continue et non par portions. Planck se demanda ce qui adviendrait si on ne passait pas à la limite $\mathcal{E}_0 \to 0$ et c'est ce qui le conduisit à une grande découverte. Il définit la grandeur $\mathcal{E}_0$ par la condition que l'expression (118.2) vérifie la formule thermodynamique générale de Wien (116.10). En identifiant (118.2) et (116.10) on constate que cette condition est vérifiée si

$$\frac{1}{\pi^2 c^3} \frac{\mathcal{E}_0/\omega}{e^{\mathcal{E}_0/kT}-1} = f\left(\frac{\omega}{T}\right). \tag{118.3}$$

Comme $\mathcal{E}_0$ est une caractéristique *de l'oscillateur*, il ne peut dépendre de la température T qui est un paramètre macroscopique déterminant l'état des substances et du rayonnement. L'énergie $\mathcal{E}_0$ ne peut dépendre que *de la fréquence propre* ω *de l'oscillateur*. Dans ce cas, pour que le premier membre de (118.3) soit fonction du seul argument ω/T il faut et il suffit que

$$\mathcal{E}_0 = \hbar\omega. \tag{118.4}$$

où $\hbar$ est une constante qui est *universelle*, puisque dans le second membre de (118.3) figure la fonction universelle $f(\omega/T)$ de l'argument ω/T. $\hbar$ est la *constante de Planck* dont la valeur numérique est, selon les données modernes,

$$\hbar = (1{,}0545887 \pm 0{,}0000057)\cdot 10^{-27}\ \text{erg}\cdot\text{s} = \\ = (1{,}0545887 \pm 0{,}0000057)\cdot 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}. \tag{118.5}$$

Planck lui-même utilisait la constante

$$h \equiv 2\pi\hbar = (6{,}626176 \pm 0{,}000036)\cdot 10^{-27}\ \text{erg}\cdot\text{s} = \\ = (6{,}626176 \pm 0{,}000036)\cdot 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}. \tag{118.5a}$$

En portant (118.4) dans (118.2) on obtient la formule de Planck

$$u_\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT}-1}. \tag{118.6}$$

On l'écrit généralement en fonction des variables ν et T:

$$u_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}, \tag{118.7}$$

ou encore en fonction de λ, T:

$$u_\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1}. \tag{118.8}$$

A basse fréquence où

$$\hbar\omega/kT \ll 1, \tag{118.9}$$

la formule (118.6) se réduit à la formule de Rayleigh-Jeans (117.8). Aux hautes fréquences où

$$\hbar\omega/kT \gg 1, \tag{118.10}$$

on obtient la formule

$$u_\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} e^{-\hbar\omega/kT}. \qquad (118.11)$$

Wien établit en 1896 une formule de cette forme en se fondant sur des hypothèses arbitraires.

Aux fréquences élevées (ultraviolet) la formule de Wien est en bon accord avec les données expérimentales, mais elle est fausse aux basses fréquences (infrarouge) : aux basses fréquences c'est la formule de Rayleigh-Jeans qui cadre avec l'expérience. Au début, Planck cherchait à établir une formule empirique qui, aux basses fréquences, coïnciderait avec la formule de Rayleigh-Jeans, et aux fréquences élevées avec la formule de Wien.

En introduisant la variable sans dimension $x = \hbar\omega/kT$, la formule (118.6) s'écrit

$$u_\omega = \frac{k^3T^3}{\pi^2 c^3 \hbar^2} \frac{x^3}{e^x - 1}. \qquad (118.6a)$$

Avec la variable sans dimension $x = \lambda kT/hc$ on obtient

$$u_\lambda = \frac{8\pi k^5 T^5}{h^4 c^4} \frac{1/x^5}{e^{1/x} - 1}. \qquad (118.8a)$$

Les courbes des fonctions

$$y_\omega = \frac{x^3}{e^x - 1} \quad \text{et} \quad y_\lambda = \frac{1/x^5}{e^{1/x} - 1}$$

sont représentées sur les figures 343 et 344. En pointillé on a indiqué les mêmes fonctions définies par les formules de Rayleigh-Jeans et de Wien.

3. A l'aide de la formule de Planck on peut préciser les valeurs des constantes figurant dans les lois de Stefan-Boltzmann (115.4), de Wien (116.14) et dans la formule (116.15). Il est évident que ces lois doivent pouvoir se déduire de la formule de Planck, puisque celle-ci est un cas particulier de la formule thermodynamique générale de Wien (116.9). Selon la formule de Planck, la densité intégrale d'énergie du rayonnement d'équilibre dans le vide est

$$u = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\omega^3 \, d\omega}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1} = \frac{k^4 T^4}{\pi^2 c^3 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{x^3 e^{-x} \, dx}{1 - e^{-x}}$$

($x = \hbar\omega/kT$ est la variable d'intégration sans dimension). En développant en série le dénominateur $1 - e^{-x}$ et en intégrant, on trouve pour la dernière intégrale

$$\int_0^\infty x^3 e^{-x} (1 + e^{-x} + e^{-2x} + \ldots) \, dx = 6\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots\right) = \frac{\pi^4}{15},$$

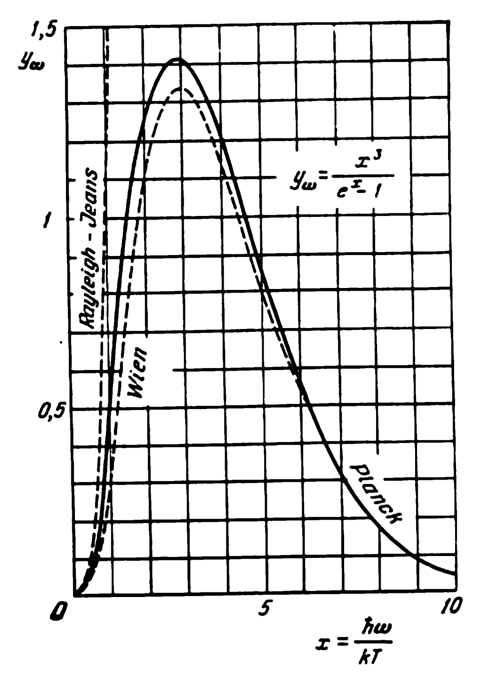


Fig. 343

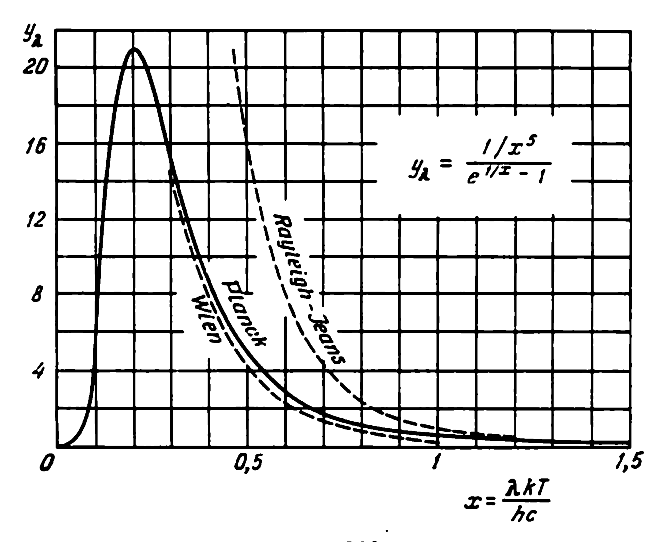


Fig. 344

puisque, selon une formule connue, la somme de la dernière série entre parenthèses est égale à $\pi^4/90$. On obtient ainsi

$$u = \frac{\pi^2 k^4}{15 c^3 \hbar^3} T^4 = \frac{8}{15} \frac{\pi^5 k^4}{c^3 h^3} T^4, \qquad (118.12)$$

qui exprime la loi de Stefan-Boltzmann (115.4) où la constante a est exprimée uniquement en termes des constantes fondamentales c, h et k.

Pour les besoins pratiques, il est préférable d'utiliser la formule de la radiance énergétique S d'une surface noire. C'est le flux intégral qu'émet dans toutes les directions (i. e. dans un angle solide égal à 2π) et par unité de temps l'unité de la surface noire. La radiance énergétique est liée à la luminance B de la surface rayonnante par la relation $S = \pi B = \pi I$ (cf. § 22) ou encore d'après (112.5) $S = cu/4$. (Cette dernière formule est en tout point analogue à la formule donnant le nombre moyen de molécules gazeuses tombant par unité de temps sur l'unité d'aire de la paroi du vase contenant le gaz, cf. t. II, § 75.) En portant (118.12) dans cette formule on trouve

$$S = \sigma T^4, \qquad (118.13)$$

avec

$$\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60 c^2 \hbar^3} = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3} = (5{,}67032 \pm 0{,}00071) \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}}. \qquad (118.14)$$

σ est la *constante de Stefan-Boltzmann.*

4. Calculons la constante b de la loi de déplacement de Wien (116.14). On doit calculer d'abord la valeur $\lambda = \lambda_m$ pour laquelle la fonction (118.8) présente un maximum à $T =$ const. Introduisons la variable sans dimension $\beta = hc/\lambda kT$ dans (118.8). Il suffit alors de trouver le minimum de la fonction $(e^\beta - 1)/\beta^5$. En égalant à zéro la dérivée première de cette fonction par rapport à β on obtient l'équation

$$e^{-\beta} + \frac{\beta}{5} - 1 = 0, \qquad (118.15)$$

dont la racine est $\beta = 4{,}9651142$. De là

$$b = \lambda_m T = hc/(k\beta) = (2{,}897790 \pm 0{,}000090) \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m \cdot K}. \qquad (118.16)$$

Si on remplace λ par la fréquence ω, la loi de Wien doit s'écrire sous la forme (116.15). La position du maximum est alors définie par l'équation

$$(3 - \beta)\, e^\beta - 3 = 0, \qquad (118.17)$$

où $\beta = \hbar\omega/kT = hc/\lambda kT$; c'est donc le même β que ci-dessus. La racine de cette équation est $\beta' = 2{,}8214393$. Si on revient aux longueurs d'onde, le maximum de u_ω correspond à la longueur d'onde λ'_m définie par

$$\lambda'_m T = hc/(k\beta'). \qquad (118.18)$$

Ainsi le maximum de la courbe de fréquence est déplacé vers les grandes longueurs d'onde par rapport au maximum de la courbe des longueurs d'onde, de sorte que $\lambda'_m/\lambda_m = \beta/\beta' \approx 1{,}76$.

Notons encore qu'après avoir mesuré les quantités c, σ et b on peut calculer par les formules (118.14) et (118.16) les constantes universelles k et h ; c'est ce que fit Planck. On peut calculer ensuite le nombre d'Avogadro $N = R/k$ et la charge élémentaire $e = F/N$, où R est la constante universelle des gaz et F est le nombre de Faraday. Lorsque Planck fit ces calculs, les valeurs de k, N et e étaient connues avec une précision insuffisante, mais les valeurs qu'il trouva pour k, N, e et h sont peu différentes de celles qui sont connues aujourd'hui.

5. On peut établir la formule de Planck en assimilant le rayonnement d'équilibre contenu dans une cavité à un *gaz de photons* auquel s'applique la *statistique de Bose-Einstein* (cf. t. II, § 82). Ce gaz présente la particularité suivante : par interaction avec la matière, des photons peuvent être créés ou annihilés. Le nombre N de photons contenus dans la cavité n'est donc pas constant. A l'équilibre le nombre N est tel que pour T et V donnés l'énergie libre $F(T, V, N)$ est minimale et par suite $\partial F/\partial N = 0$. Or $\partial F/\partial N$ est le *potentiel chimique* μ du gaz. Par conséquent on doit avoir pour les photons $\mu = 0$, et la formule générale de Bose-Einstein

$$\bar{n}_i = \frac{1}{\exp[(\mathscr{E}_i - \mu)/kT] - 1}, \qquad (118.19)$$

qui détermine le nombre moyen de particules se trouvant dans un état quantique i donné, s'écrit pour les photons

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}. \qquad (118.20)$$

Le nombre d'états quantiques contenus dans l'intervalle des fréquences $(\omega, \omega + d\omega)$ est donné par (117.7). En multipliant $\bar{n}$ par ce nombre et par l'énergie $\hbar\omega$ du photon et en divisant le résultat par le volume V de la cavité, on retrouve la formule de Planck (118.6).

§ 119. Rayonnement spontané et rayonnement induit

1. En 1916, Einstein donna une nouvelle démonstration de la formule de Planck en se fondant sur les conceptions de Bohr sur le mécanisme de l'émission. C'est dans ce travail que fut introduite la notion d'*émission induite*; c'est sur cette notion qu'est fondé le fonctionnement des lasers.

Soient $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \mathscr{E}_3, \ldots$ les valeurs de l'énergie que peut posséder un atome ou plus généralement tout système d'atomes. L'atome peut passer spontanément d'un niveau d'énergie supérieur $\mathscr{E}_n$ sur un niveau de plus faible énergie $\mathscr{E}_m$, avec émission de la lumière, qui

s'appelle *émission spontanée*. Si l'atome se trouve dans un champ lumineux, ce dernier peut provoquer des passages d'un niveau d'énergie supérieur $\mathscr{E}_n$ sur un niveau de plus faible énergie $\mathscr{E}_m$ ainsi que du niveau $\mathscr{E}_m$ sur le niveau $\mathscr{E}_n$. Les transitions $\mathscr{E}_n \rightarrow \mathscr{E}_m$ s'accompagnent d'une émission de lumière ; cette émission est appelée *émission induite* ou *stimulée*. Les transitions inverses s'accompagnent d'une absorption de lumière par l'atome.

En physique classique on connaît des phénomènes analogues. Si on assimile l'atome à un système oscillant, il effectuera des oscillations forcées dans le champ de l'onde lumineuse. Suivant le rapport des phases des vibrations de ce système et de celles du champ lumineux, l'amplitude des vibrations de l'atome peut augmenter (absorption de lumière) ou diminuer (émission stimulée).

Einstein appliqua les *méthodes probabilistes* à la description des processus d'émission spontanée et stimulée. Pour le problème du rayonnement d'équilibre peu importe que les probabilités concernent l'ensemble des objets physiques ou les lois élémentaires régissant le comportement de ces objets.

Considérons une multitude d'atomes identiques soumis à l'action d'un champ lumineux que nous poserons isotrope et non polarisé. Dans ces conditions nous n'aurons pas à nous inquiéter de la dépendance des coefficients que nous aurons à introduire avec l'état de polarisation et la direction du rayonnement. Notons N_m et N_n les nombres d'atomes se trouvant dans les états $\mathscr{E}_m$ et $\mathscr{E}_n$, ces derniers étant des états quelconques pris parmi la suite des états permis $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, $\mathscr{E}_3$, . . . Par unité de temps, le nombre moyen de transitions de l'état $\mathscr{E}_n$ dans l'état $\mathscr{E}_m$ dues à l'émission spontanée est proportionnel au nombre initial N_n d'atomes. Représentons ce nombre de transitions par $A_n^m N_n$. Einstein postula que dans le cas de l'émission stimulée le nombre moyen de transitions entre les mêmes niveaux serait proportionnel à N_n et à la densité spectrale $u(\omega_{mn})$ du rayonnement à la fréquence du rayonnement émis lors de la transition considérée. Notons $B_n^m N_n u(\omega_{mn})$ ce nombre de transitions. Notons $B_m^n N_m u(\omega_{mn})$ le nombre moyen de transitions du niveau $\mathscr{E}_m$ sur le niveau $\mathscr{E}_n$ résultant de l'absorption de la lumière. Les quantités A_n^m, B_n^m, B_m^n sont appelées *coefficients d'Einstein*. Ce sont des caractéristiques de l'atome considéré et ne dépendant que de la fréquence ω_{mn}.

2. Considérons le cas où les atomes se trouvent dans un champ de rayonnement d'équilibre de température T. Comme on se trouve alors dans les conditions d'un équilibre détaillé, on a

$$A_n^m N_n + B_n^m N_n u(\omega_{mn}) = B_m^n N_m u(\omega_{mn}). \qquad (119.1)$$

Si les niveaux $\mathscr{E}_m$ et $\mathscr{E}_n$ sont *simples*, les coefficients d'Einstein sont liés par la relation

$$B_m^n = B_n^m. \qquad (119.2)$$

Si on élève la température du système, les coefficients d'Einstein ne varieront pas, puisqu'ils ne dépendent pas de la température. La proportion d'émission spontanée diminue et celle de l'émission stimulée augmente. Si on néglige l'émission spontanée, la condition d'équilibre détaillé s'écrira $B_n^m N_n = B_m^n N_m$. Or selon la formule de Boltzmann, lorsque $T \to \infty$ les populations des niveaux N_n et N_m s'égalisent, et par suite $B_m^n = B_n^m$.

Supposons maintenant que le niveau $\mathscr{E}_m$ se compose de g_m sous-niveaux simples superposés et le niveau $\mathscr{E}_n$ se compose de g_n niveaux simples. Ces niveaux composés sont des *multiplets*, les nombres entiers g_m et g_n caractérisent la *multiplicité* des niveaux. La probabilité de transition du niveau $\mathscr{E}_m$ sur chacun des sous-niveaux $\mathscr{E}_n$ est plus petite de g_n fois que la probabilité de transition sur le niveau multiplet $\mathscr{E}_n$, i.e. elle est égale à uB_m^n/g_n. De même la probabilité de transition du niveau $\mathscr{E}_n$ sur un des sous-niveaux simples $\mathscr{E}_m$ est uB_n^m/g_m. Or nous avons démontré ci-dessus que ces probabilités étaient égales. Il s'ensuit que pour des niveaux multiplets la relation (119.2) doit être remplacée par la relation $B_m^n/g_n = B_n^m/g_m$ ou

$$g_m B_m^n = g_n B_n^m. \qquad (119.3)$$

Comme la densité spectrale d'énergie $u(\omega)$ ne dépend pas des atomes que l'on fait intervenir, on posera pour simplifier que les niveaux $\mathscr{E}_n$ et $\mathscr{E}_m$ sont simples. Compte tenu de la formule de Boltzmann

$$\frac{N_m}{N_n} = \exp\left(\frac{\mathscr{E}_n - \mathscr{E}_m}{kT}\right),$$

on tire de (119.1)

$$u(\omega_{mn}) = \frac{\alpha(\omega_{mn})}{\exp[(\mathscr{E}_n - \mathscr{E}_m)/(kT)] - 1}, \qquad (119.4)$$

où $\alpha(\omega_{mn}) = A_n^m/B_n^m$. En identifiant cette expression avec la formule de Wien (116.10) on constate que la différence $\mathscr{E}_n - \mathscr{E}_m$ doit être une fonction linéaire de la fréquence, i.e.

$$\mathscr{E}_n - \mathscr{E}_m = \hbar\omega_{mn}. \qquad (119.5)$$

A la limite des fréquences basses (ou des températures élevées)

$$u(\omega_{mn}) = \frac{\alpha(\omega_{mn})\, kT}{\hbar\omega_{mn}},$$

mais comme la formule de Rayleigh-Jeans est alors vérifiée

$$\alpha(\omega_{mn}) = \frac{\hbar\omega_{mn}^3}{\pi^2 c^3}. \qquad (119.6)$$

Portons maintenant (119.5) et (119.6) dans la formule (119.4). Comme les niveaux $\mathscr{E}_m$ et $\mathscr{E}_n$ sont arbitraires, on peut supprimer les indices m et n et on retrouve ainsi la formule de Planck (118.6).

Puisque la fonction (118.6) est universelle, la constante $\hbar$ définie par la relation (119.5) est universelle. La formule (119.5), qui déter-

mine la fréquence de la lumière émise lors des transitions quantiques entre des niveaux d'énergie, est appelée *règle de sélection des fréquences de Bohr.*

Notons que si on n'avait pas tenu compte de l'émission stimulée, ce qui impliquerait $B_n^m u(\omega_{mn}) = 0$, on aurait obtenu, à la place de la formule de Planck, son cas limite — la formule de Wien (118.11). Il en résulte que *la formule de Planck démontre l'existence de l'émission stimulée de rayonnements.* Aux basses températures où l'émission stimulée est petite devant l'émission spontanée, $\hbar\omega/kT \gg$ $\gg 1$, et c'est la formule de Wien qui est vérifiée.

PROBLÈMES

1. Calculer le nombre moyen n de photons contenus dans l'unité de volume d'une cavité occupée par un rayonnement d'équilibre (noir) à la température T.

Réponse.

$$n = \frac{k^3T^3}{\hbar^3\pi^2c^3} \int_0^\infty \frac{x^2e^{-x}}{1-e^{-x}}\,dx =$$

$$= \frac{2k^3T^3}{\hbar^3\pi^2c^3}\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots\right) \approx 1{,}202\,\frac{2k^3T^3}{\hbar^3\pi^2c^3} = 20{,}5T^3,$$

où T est la température en degrés Kelvin.

2. Une cavité à parois parfaitement réfléchissantes contient un rayonnement isotrope dont la densité moyenne de photons est égale à n par unité de volume. Calculer le nombre moyen z de photons tombant par seconde sur l'unité de surface de la paroi.

Réponse. $z = \frac{1}{4} nc.$

3. Reprendre le problème précédent en supposant que le rayonnement est d'équilibre et que la température des parois est T. Calculer le nombre moyen N de photons s'échappant par seconde de la cavité à travers une ouverture d'aire $s = 1$ cm², si la température des parois est $T = 1000$ K.

Réponse. $n \approx 2{,}404\,\frac{k^3T^3}{\hbar^3\pi^2c^3}$, $N = 0{,}6\,\frac{k^3T^3}{\hbar^3\pi^2c^2} \approx 1{,}5\cdot10^{20}$.

4. Dans quelle partie du spectre d'un rayonnement d'équilibre (du corps noir), à la température $T = 300$ K, l'intensité du rayonnement stimulé est supérieure à celle du rayonnement spontané?

Réponse. L'intensité du rayonnement stimulé devient égale ou supérieure à celle du rayonnement spontané lorsque $\lambda \geqslant hc/(kT \ln 2)$. Avec $T =$ $= 300$ K, on obtient $\lambda \geqslant 692$ µm.

5. Quelle doit être la température d'un rayonnement d'équilibre (noir) pour que, dans le spectre visible ($\lambda = 550$ nm), l'émission stimulée soit plus grande que l'émission spontanée?

Réponse. $T > hc/(k\lambda \ln 2) \approx 3{,}8\cdot10^4$ K.

6. Le nombre moyen de photons par unité de volume d'un rayonnement d'équilibre (noir) correspondant à un intervalle de fréquence $(\omega, \omega + d\omega)$ ou à un intervalle de longueurs d'onde correspondant $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ peut être représenté sous la forme $dN = f(\omega, T)\,d\omega = \varphi(\lambda, T)\,d\lambda$, où T est la température du rayonnement. Déterminer les positions des maximums des fonctions $f(\omega, T)$ et $\varphi(\lambda, T)$ pour une température T donnée.

Réponse. Le maximum de la fonction $f(\omega, T)$ est obtenu pour $\hbar\omega/(kT) = x$, où x est la racine de l'équation $(x-2)e^x + 2 = 0$, i.e. $x = 1{,}593624$. La longueur d'onde correspondante λ_1 est donnée par la relation

$$\lambda_1 T = \frac{2\pi\hbar c}{kx} = \frac{hc}{kx} = 0{,}902867 \text{ cm}\cdot\text{K}.$$

Le maximum de la fonction $\varphi(\lambda, T)$ est obtenu pour $\lambda = \lambda_2$ avec $\frac{hc}{\lambda kT} = \xi$, ξ étant la racine de l'équation $(\xi - 4)e^{\xi} + 4 = 0$, i.e. $\xi = 3{,}920690$. D'où $\lambda_2 T = 0{,}368967$ cm·K. Par conséquent $\lambda_2 < \lambda_1$.

7. Un rayonnement d'équilibre est contenu dans une cavité dont les parois sont maintenues à une température constante T (température absolue). Calculer les fluctuations de l'énergie $\mathscr{E}$ de ce rayonnement dans un volume V et dans un intervalle de fréquence $(\omega, \omega + d\omega)$ en utilisant les formules de 1) Wien, 2) Rayleigh-Jeans, 3) Planck. Interpréter les résultats en se plaçant aux points de vue des conceptions corpusculaire et ondulatoire sur la nature de la lumière.

Solution. En appliquant à (97.15) les formules de Wien, de Rayleigh-Jeans et de Planck, on obtient

$$\overline{\Delta\mathscr{E}^2} = \overline{\mathscr{E}}\hbar\omega \qquad \text{(Wien)}, \quad (119.7)$$

$$\overline{\Delta\mathscr{E}^2} = \overline{\mathscr{E}}kT = \frac{\pi^2 c^3}{V\omega^2\, d\omega}\,\overline{\mathscr{E}}^2 \qquad \text{(Rayleigh-Jeans)}, \quad (119.8)$$

$$\overline{\Delta\mathscr{E}^2} = \overline{\mathscr{E}}\hbar\omega + \frac{\pi^2 c^3}{V\omega^2\, d\omega}\,\overline{\mathscr{E}}^2 \qquad \text{(Planck)}. \quad (119.9)$$

La formule (119.7) est de la même forme que la formule (97.7) exprimant les fluctuations du nombre de particules d'un gaz parfait. Cette formule peut être établie sur la base des conceptions corpusculaires en assimilant le rayonnement à un gaz de particules indépendantes. La formule (119.8) correspond aux conceptions ondulatoires et les fluctuations résultent de la superposition d'ondes de fréquences différentes. La formule (119.9) fait la synthèse de ces deux conceptions.

8. L'éclairement E que produit une étoile de première grandeur sur la surface terrestre sous incidence normale est de 10^{-6} lux environ. Peut-on expliquer les scintillations des étoiles par les fluctuations quantiques de la lumière?

Solution. Le nombre moyen de photons que l'étoile envoie par seconde dans la pupille de l'œil est

$$\overline{N} = \frac{EAs}{h\lambda/c} \approx 6\cdot 10^{31} \sim 10^{31},$$

où A est l'équivalent mécanique de la lumière; l'aire s de la pupille de l'œil est posée égale à $0{,}5$ cm², et la longueur d'onde $\lambda = 550$ nm. Dans cette partie du spectre on peut utiliser la formule de Wien, ce qui conduit à

$$\overline{\Delta N^2} = \overline{N}, \quad \frac{1}{\overline{N}}\sqrt{\overline{\Delta N^2}} \sim 10^{-17}.$$

Ce résultat montre que les fluctuations quantiques de la lumière ne peuvent produire des scintillations des étoiles.

CHAPITRE XI

LASERS ET OPTIQUE NON LINÉAIRE

§ 120. Principes de fonctionnement des lasers

1. L'émission spontanée est incohérente car les atomes de la source émettent des radiations indépendamment les uns des autres. Les phases des ondes émises par des atomes différents, leurs polarisations et leurs directions de propagation sont indépendantes. Les sources lumineuses ordinaires telles que les flammes, les lampes à incandescence, les tubes à décharge, les tubes luminescents, etc., émettent une lumière incohérente. L'émission de la lumière résulte dans tous les cas cités soit des chocs entre des atomes animés de mouvements d'agitation thermique, soit de l'impact d'électrons. Dans ces sources, à côté de l'émission spontanée, il se produit bien une émission stimulée de rayonnement, mais comme celle-ci est excitée par le rayonnement spontané qui est incohérent, le rayonnement stimulé est également incohérent. La lumière émise est plus ou moins désordonnée. L'état le plus désordonné règne dans le rayonnement d'équilibre contenu dans une cavité. On y trouve n'importe quelles phases, fréquences, directions des vibrations et directions de propagation de la lumière. Par analogie avec l'acoustique et la radiotechnique, on pourrait dire que ces sources émettent non pas des ondes régulières, mais des bruits et ne conviennent qu'à l'éclairage, à une signalisation rudimentaire, à la production d'images et de photographie, etc. Ces ondes désordonnées ne peuvent être utilisées ni pour la transmission de la parole, ni pour la télévision.

On peut cependant réaliser des sources lumineuses qui émettent des rayonnements cohérents; dans ces sources les atomes émettent des ondes comme le font les postes d'émission radio, i.e. des ondes ayant même fréquence, même phase, même polarisation et même direction de propagation. L'invention de ces sources de lumière cohérente a permis le développement de nombreuses applications scientifiques et techniques. Ces sources sont appelées *générateurs quantiques de lumière* ou *lasers*. Le mot « laser » est un sigle de l'appellation anglaise « Light amplification by stimulated emission of radiation ». L'invention des lasers vint aussitôt après celle des *masers* qui sont des amplificateurs d'ondes radio de très courtes

longueurs d'ondes, fondés sur le principe d'émission stimulée. C'est pour cela qu'au début on utilisait pour les lasers la dénomination *masers optiques*. Une étude détaillée de la conception et du fonctionnement des lasers et des masers est donnée dans les ouvrages d'électronique quantique. Dans notre cours d'optique nous ne donnerons qu'un bref exposé des principes de fonctionnement des lasers.

Le fonctionnement des lasers est fondé sur le principe de l'*émission stimulée* d'un rayonnement. Considérons un photon d'énergie $\hbar\omega = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1$ tombant sur un atome; $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont deux niveaux énergétiques quelconques de l'atome. Si l'atome occupe le niveau inférieur $\mathcal{E}_1$, le photon peut être absorbé par l'atome et s'il occupe le niveau supérieur $\mathcal{E}_2$, l'impact du photon peut déterminer sa transition stimulée sur le niveau inférieur $\mathcal{E}_1$ avec émission d'un autre photon; ce dernier photon possède *la même fréquence* ω (que dans une émission spontanée), *la même phase*, *la même polarisation et la même direction de propagation* que le photon incident. A la place d'un seul photon incident on obtient *deux photons identiques*. C'est cette particularité de l'émission stimulée qui est mise à profit dans les lasers.

2. Considérons maintenant un *milieu composé d'atomes*. Notons N_1 et N_2 les nombres d'atomes par unité de volume occupant les niveaux $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ respectivement. Une onde monochromatique plane de fréquence définie par $\hbar\omega = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1$ se propage dans le milieu. Au cours du temps $dt = dx/v$, où v est la vitesse de propagation et dx la distance parcourue par l'onde, un nombre moyen d'atomes égal à $u(\omega)\, B_1^2 N_1\, dt$ passe du niveau d'énergie inférieur sur le niveau supérieur et le même nombre de photons est absorbé par les atomes. L'émission stimulée détermine la transition de $u(\omega)\, B_2^1 N_2\, dt$ atomes du niveau supérieur sur le niveau inférieur et la naissance du même nombre de photons de même polarisation et de même direction de propagation que dans l'onde considérée. Les photons émis spontanément ainsi que les photons induits par d'autres ondes peuvent être négligés, car parmi ces photons un nombre infime se propagent dans la bonne direction et possèdent la polarisation requise. L'accroissement du nombre de photons dans l'unité de volume résultant du parcours par l'onde d'une distance $dx = v\, dt$ est donné par l'expression

$$dN_{\text{ph}} = (B_2^1 N_2 - B_1^2 N_1)\, u(\omega) \frac{dx}{v}.$$

Les coefficients d'Einstein B_2^1 et B_1^2 sont liés par la relation $g_2 B_2^1 = g_1 B_1^2$, où g_1 et g_2 sont les multiplicités des niveaux $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$. En utilisant cette relation, l'expression ci-dessus s'écrit

$$dN_{\text{ph}} = \left(\frac{N_2}{g_2} - \frac{N_1}{g_1}\right) g_1 B_1^2 u(\omega) \frac{dx}{v}. \tag{120.1}$$

Pour que l'onde puisse s'amplifier lors de sa propagation, il faut que soit vérifiée la condition

$$\frac{N_2}{g_2} > \frac{N_1}{g_1} \qquad (120.2)$$

que l'on peut exprimer aussi par

$$n_2 > n_1, \qquad (120.3)$$

où $n_1 = N_1/g_1$ et $n_2 = N_2/g_2$ sont les nombres d'atomes occupant les niveaux simples formant les niveaux composés $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$.

Dans les conditions ordinaires, lorsque le milieu est dans un *état d'équilibre thermodynamique*, $n_2 < n_1$, i.e. *chacun des niveaux simples supérieurs est occupé par un nombre d'atomes plus petit que le nombre d'atomes se trouvant sur les niveaux simples inférieurs.* Ce résultat découle directement de la formule de Boltzmann

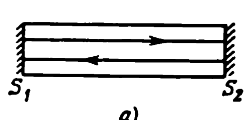
$$n = n_0 e^{-\mathscr{E}/kT}.$$

On peut réaliser artificiellement un milieu se trouvant *hors de l'équilibre thermodynamique* pour lequel les inégalités (120.3) et (120.2) sont inversées. Un tel milieu est appelé *milieu actif* ou *milieu à population inversée des niveaux* $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$. Il s'ensuit qu'*une onde lumineuse ne peut être amplifiée que si le milieu où elle se propage est actif*. L'idée de la mise à profit de l'émission stimulée pour l'amplification des ondes a été formulée pour la première fois en 1939 dans la thèse de doctorat de V. A. Fabrikant (né en 1907) qui obtint en 1951 un brevet d'invention. Mais à l'époque on ne prit pas au sérieux cette idée de Fabrikant, car on estimait que l'élaboration de systèmes à population inversée ne présentait aucun intérêt.

3. On compare souvent l'amplification de la lumière dans un milieu actif à une avalanche où les photons sont assimilés à des billes. Un photon-bille incident fait apparaître un second photon-bille et fait passer l'atome de son niveau d'énergie supérieur sur un niveau de plus petite énergie. On dispose ainsi de deux photons-billes qui poursuivent leur vol dans la même direction ; ces deux photons en produisent deux autres, ce qui en fait quatre et ainsi de suite. Mais cette analogie grossière ne peut expliquer comment l'ensemble de tous ces photons fait apparaître une onde monochromatique se propageant dans une direction bien déterminée. Cet aspect du problème s'éclaircit si on compare ces phénomènes à l'interprétation classique de la propagation d'une onde monochromatique plane dans un milieu homogène. L'onde met les atomes et les molécules en vibrations cohérentes entre elles et avec l'onde incidente. Les interférences des ondes sphériques reconstituent le front d'onde plan qui se propage dans le milieu. Ces ondes sphériques n'affectent que la vitesse de phase de l'onde. Si le milieu est parfaitement transparent, l'amplitude de l'onde ne change pas, conformément à la loi de la conservation

de l'énergie. Dans les milieux absorbants une partie de l'énergie de l'onde est dissipée en chaleur et l'amplitude de l'onde décroît. Dans un milieu actif les atomes et les molécules se trouvent dans des états excités. Les ondes secondaires émises par les atomes et les molécules se trouvent amplifiées aux dépens de l'énergie d'excitation, mais leurs phases et leur état de polarisation restent les mêmes. De ce fait la phase et la polarisation de l'onde résultant des interférences des ondes secondaires ne changent pas. Seule l'amplitude de l'onde est amplifiée.

4. Le rayonnement stimulé a été utilisé pour *générer des ondes lumineuses cohérentes*. Le principe de cet effet a été suggéré en 1957



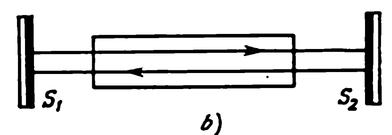


Fig. 345

par A. M. Prokhorov (né en 1916) et N. G. Bassov (né en 1922) et indépendamment d'eux par Ch. Townes (né en 1915). Pour qu'une substance active puisse se comporter en générateur, il faut assurer un *couplage à réaction*. Il faut pour cela qu'une partie de la lumière émise se trouve constamment dans la substance active pour provoquer le rayonnement stimulé de nouveaux atomes. On y arrive en disposant la substance active entre deux miroirs parallèles. Supposons que la substance active se présente sous forme d'un cylindre et que les plans des miroirs S_1 et S_2 soient perpendiculaires à l'axe du cylindre (fig. 345). Un rayon lumineux qui subit de nombreuses réflexions successives sur les miroirs S_1 et S_2 traverse alors maintes fois la substance active et s'amplifie à chaque passage du fait des transitions stimulées des atomes du niveau supérieur $\mathcal{E}_2$ sur le niveau inférieur $\mathcal{E}_1$. On réalise ainsi un *résonateur ouvert* (cavité résonnante) que l'on peut assimiler à un interféromètre Fabry-Pérot rempli de substance active.

Ce résonateur assure *non seulement l'amplification de la lumière*, mais aussi sa *collimation* et sa *monochromatisation*. Supposons pour simplifier que les miroirs S_1 et S_2 sont parfaits. Les rayons parallèles à l'axe du cylindre pourront traverser alors la substance active un nombre quelconque de fois. Les rayons qui sont inclinés sur l'axe du cylindre tombent finalement sur la paroi latérale du cylindre, y sont diffusés ou s'échappent du milieu actif. Il s'ensuit que ce sont les rayons parallèles à l'axe optique qui sont le plus fortement amplifiés. C'est ce qui explique l'action de collimateur du système. De toute évidence on ne peut produire un faisceau de rayons rigoureusement parallèles, puisque la diffraction de la lumière s'y oppose. L'angle de divergence des rayons ne peut être inférieur à la *limite de*

diffraction $\delta\vartheta \approx \lambda/D$, où D est la largeur du faisceau. Dans les meilleurs lasers à gaz on réalise pratiquement cette divergence minimale.

5. Examinons maintenant comment se réalise la *monochromatisation de la lumière*. Pour simplifier, considérons le système illustré par la figure 345, *a*, où ce sont les bases polies et argentées du cylindre droit en substance active qui font fonction des miroirs S_1 et S_2. Soit L la longueur du cylindre ; si $2L = m\lambda$, i.e. si la longueur L du cylindre est égale à un nombre entier de demi-ondes m, l'onde lumineuse qui part de S_1, après un trajet aller et retour dans la substance active, revient en S_1 avec la même phase. Dans ces conditions l'onde sera amplifiée à chaque traversée (en commençant par la seconde) de la substance active. Les longueurs d'onde $\lambda \pm \Delta\lambda$ pour lesquelles on obtiendra la même amplification sont données par $2L = (m \pm 1)(\lambda \mp \Delta\lambda)$. On en tire $\Delta\lambda = \lambda/m$, ce qui signifie que $\Delta\lambda$ coïncide avec l'étendue spectrale de l'interféromètre de Fabry-Pérot.

Tenons compte maintenant de ce que les niveaux énergétiques $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ ainsi que les raies spectrales correspondant aux transitions entre ces niveaux ont une *largeur finie*. Supposons d'abord que la largeur de la raie spectrale émise par les atomes est inférieure à la région de dispersion de l'appareil. Parmi toutes les longueurs d'onde émises par les atomes, une seule longueur d'onde λ peut vérifier la condition $2L = m\lambda$. L'amplification de cette onde sera maximale et c'est ce qui détermine la diminution de la largeur de la raie générée par le laser, donc l'émission d'une radiation monochromatique.

Le degré de monochromaticité est facile à calculer. Posons que la lumière fait N trajets aller et retour dans la substance active. Pour une longueur d'onde λ on a $2LN = Nm\lambda$. Considérons une longueur d'onde voisine λ' vérifiant la relation $2LN = (Nm \pm 1)\lambda'$. Pour cette longueur d'onde chaque train d'ondes qui s'est formé au cours d'un trajet aller et retour à travers la substance active aura une phase différente des trains d'onde précédents et suivants; cette différence de phase est égale à $\pm 2\pi/N$. Dans ces conditions tous les N trains d'onde se détruisent mutuellement et l'intensité lumineuse sera minimale pour λ'. La largeur de la raie spectrale qui se trouve amplifiée par le laser est $\delta\lambda = |\lambda - \lambda'| \sim \lambda/(Nm)$, ce qui signifie qu'elle dépend du pouvoir de résolution de l'appareil. Pour $N \to \infty$ on obtient $\delta\lambda \to 0$, i.e. la raie sera infiniment étroite. En réalité les surfaces réfléchissantes étant imparfaites, $\delta\lambda$ reste finie. Si les surfaces réfléchissantes sont de bonne qualité, le laser génère une raie spectrale fine, c'est-à-dire une radiation pratiquement monochromatique. D'autre part, si la largeur de la raie spectrale émise par les atomes du milieu actif est plus grande que la région de dispersion spectrale $\Delta\lambda$ de l'appareil, plusieurs raies spectrales seront amplifiées et la lumière émise par le laser sera composée de plusieurs raies rapprochées pratiquement monochromatiques.

6. Nous n'avons pas tenu compte ci-dessus de ce que dans les résonateurs Fabry-Pérot sont amplifiées non seulement les ondes qui se propagent parallèlement à son axe, mais aussi les ondes qui se propagent *sous un petit angle* φ par rapport à cet axe. La condition d'amplification s'écrit $2L \cos \varphi = m\lambda$. Comme dans toute cavité résonnante, il apparaît ici un système d'ondes stationnaires avec des ventres et des nœuds. A chacune de ces ondes correspond un *mode de vibrations* déterminé. Comme les modes sont différents, la répartition de l'intensité dans la section droite du pinceau des rayons émis par le laser n'est pas uniforme. On y observe un système de taches brillantes séparées par des lignes nodales sombres, ce qui fait apparaître des complications que nous n'avons pas à considérer ici. Notons seulement que pour réaliser les résonateurs on utilise, à côté des miroirs plans, des *miroirs sphériques* à foyers longs, par exemple des miroirs concaves dont les foyers sont confondus au milieu du système. L'expérience et le calcul montrent que l'utilisation des miroirs sphériques permet de réduire notablement les pertes de lumière et de rendre plus aisé le réglage des lasers.

7. Pour pouvoir utiliser les lasers on doit laisser s'échapper une partie de la lumière générée dans le milieu actif vers l'extérieur. Pour cela un des miroirs, le miroir S_2 par exemple, est *semi-transparent*. Le miroir S_1 ne réfléchit qu'une partie de la lumière, quoique son coefficient de réflexion soit voisin de 100 %. Le pinceau lumineux s'en trouve affaibli. Pour que le laser soit un générateur de lumière, il faut que l'amplification du faisceau dans le milieu actif dépasse une valeur *seuil*. Pour cela la condition suivante doit être vérifiée. Le faisceau lumineux issu de S_1, après un trajet aller et retour à travers le milieu actif et une réflexion sur S_1, doit revenir dans la position initiale avec une intensité au moins égale, sinon la répétition de ces processus donnera lieu à une diminution continue de l'intensité lumineuse et le laser cessera de générer de la lumière. Il en résulte que pour que le laser génère de la lumière il ne suffit pas que la condition (120.3) soit exactement assurée, il faut disposer d'une certaine marge de dépassement, i.e. le nombre N_2 d'atomes par unité de volume occupant le niveau supérieur $\mathscr{E}_2$ du milieu actif doit être supérieur à une certaine valeur minimale.

Il est évident que l'intensité de l'onde ne peut croître indéfiniment dans le milieu actif, puisque la population du niveau supérieur est limitée. A mesure que le niveau supérieur $\mathscr{E}_2$ se dépeuple, le taux d'accroissement de l'intensité lumineuse diminue et l'onde commencera à s'atténuer avant que la condition (120.3) cesse d'être vérifiée.

§ 121. Laser à rubis

1. Il existe beaucoup de matériaux pouvant servir de milieu actif dans les lasers : cristaux diélectriques, verres, gaz, semiconducteurs et même le plasma. La question des matériaux fait l'objet

d'études spéciales en électronique quantique. Nous n'examinerons ici que l'aménagement et le fonctionnement de deux types de lasers: le *laser à rubis* et le *laser à hélium-néon*.

Le premier générateur quantique a été réalisé en 1961 par Maiman (né en 1927) et c'était un laser à rubis. Le rubis est un cristal d'oxyde d'aluminium (Al_2O_3), où une petite partie d'aluminium (près de 0,05 %) a été remplacée par des ions Cr^{+++}. Les ions Cr^{+++} sont essentiels pour l'effet de génération. Le corindon (cristal de Al_2O_3) est une substance diélectrique à grande largeur de bande interdite (cf. t. III, § 100) se trouvant entre la bande de valence et la bande de conduction. Les niveaux énergétiques des ions Cr^{+++} incorporés au corindon se situent dans cette bande interdite. Ces niveaux étaient connus bien avant l'invention des lasers. $\mathscr{E}_1$ est le niveau fondamental non excité (fig. 346); il possède une structure compliquée qui n'intervient cependant pas dans le fonctionnement du générateur quantique. Au-dessus de $\mathscr{E}_1$ on trouve deux niveaux excités rapprochés $\mathscr{E}_{2a}$ et $\mathscr{E}_{2b}$. Ce sont des niveaux étroits et lors de la transition de ces niveaux sur le niveau fondamental $\mathscr{E}_1$ on obtient des radiations rouges de longueurs d'onde $\lambda = 694{,}3$ et $692{,}9$ nm. Ce sont ces transitions qui confèrent au rubis sa coloration rose ou rouge (suivant la teneur en ions chrome). La raie $\lambda = 694{,}3$ nm est la plus intense, et c'est cette raie qui est amplifiée; l'autre raie ne joue aucun rôle. Au-dessus des niveaux $\mathscr{E}_{2a}$ et $\mathscr{E}_{2b}$ on trouve deux bandes d'énergie $\mathscr{E}_3$ et $\mathscr{E}_4$ relativement larges. Les transitions entre ces bandes et le niveau fondamental $\mathscr{E}_1$ donnent lieu respectivement à l'émission de lumière verte et bleue.

2. L'inversion de population est créée entre les niveaux $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ au moyen du procédé de *pompage optique* qui consiste à éclairer le cristal de rubis avec un éclair de lumière puissant. Le rubis est taillé en forme de cylindre de 0,1 à 2 cm de diamètre et de 2 à 20 cm de longueur. Les bases du cylindre sont soigneusement polies et peuvent servir de miroirs après argenture (fig. 345, *a*). On peut utiliser également des miroirs extérieurs (fig. 345, *b*) et dans ce cas les bases du cylindre n'ont plus besoin d'être argentées. Pour l'éclairement du cristal on utilise des lampes à décharge à impulsion au xénon (lampes flash) que l'on excite en y déchargeant une batterie de condensateurs haute tension (2 à 3 kV). La durée de l'impulsion lumineuse est de l'ordre d'une milliseconde. Ces lampes se présentent généralement sous forme de tubes enroulés en hélice autour de la tige de rubis (fig. 347). On utilise aussi des lampes flash rectilignes complétées par des réflecteurs ayant la forme de cylindres elliptiques à parois internes réfléchissantes; la lampe flash est disposée le long de l'une des lignes focales du cylindre et la lumière réfléchie est concentrée sur le cylindre de rubis disposé suivant une autre ligne focale.

Si le spectre énergétique du rubis ne comportait que les niveaux

$\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ le procédé de pompage optique ne pourrait réaliser l'inversion des populations. En effet selon (119.2) les vitesses des transitions stimulées entre un niveau inférieur et un niveau supérieur sont égales dans les deux sens. Il s'ensuit que la mise en action de la lampe flash ne pourrait à la rigueur qu'égaliser les populations des deux niveaux et l'émission spontanée aurait réduit aussitôt la population du niveau supérieur.

C'est l'existence d'un troisième niveau d'énergie de grande largeur composé des bandes d'énergie $\mathscr{E}_3$ et $\mathscr{E}_4$ qui permet d'utiliser le rubis comme corps de travail du laser. La lampe flash excite les

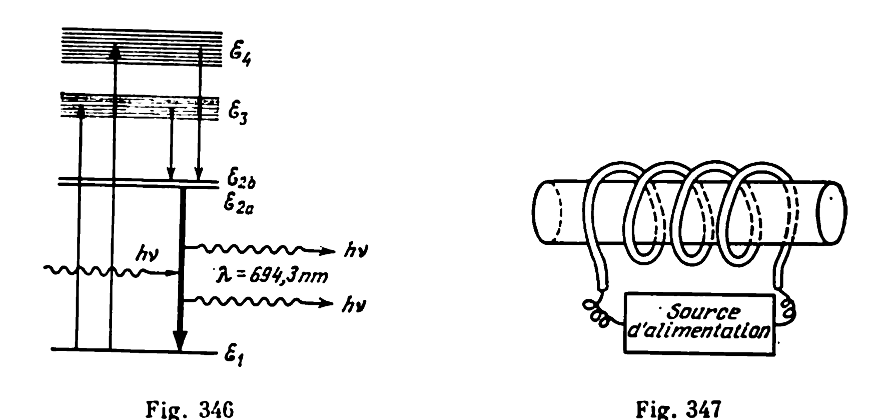


Fig. 346 Fig. 347

atomes de chrome qui viennent occuper les niveaux $\mathscr{E}_3$ et $\mathscr{E}_4$. Le fait que ce sont des bandes d'énergie assez larges présente une grande importance pour la pratique. La lampe flash produit une lumière presque blanche. Si les niveaux $\mathscr{E}_3$ et $\mathscr{E}_4$ étaient très fins, seule une partie infime de l'énergie de la lampe flash pourrait être utilisée pour leur excitation. Mais comme ce sont des bandes d'énergie larges, 10 à 15 % de l'énergie radiante de la lampe flash sont utilisés pour l'excitation de ces niveaux. Les atomes de chrome excités sur les niveaux $\mathscr{E}_3$ et $\mathscr{E}_4$ ont une vie très brève ($\sim 10^{-8}$ s) au cours de laquelle les atomes transitent sur l'un des niveaux $\mathscr{E}_2$. Lors de ces transitions les atomes de chrome ne rayonnent pas et dissipent leur énergie pour mettre en vibration le réseau cristallin. L'éventualité d'une transition de niveaux $\mathscr{E}_3$ et $\mathscr{E}_4$ sur le niveau $\mathscr{E}_1$ est négligeable devant la probabilité de transition sur les niveaux $\mathscr{E}_2$. Les niveaux $\mathscr{E}_2$ sont métastables et la durée de vie de l'atome y est de l'ordre de 10^{-3} s, ce qui est une durée longue à l'échelle atomique. De ce fait les atomes peuvent s'y accumuler en grand nombre; si on assure rapidement la transition des atomes du niveau $\mathscr{E}_1$ sur les niveaux $\mathscr{E}_3$ et $\mathscr{E}_4$, on peut faire passer plus de la moitié de ces atomes sur

les niveaux $\mathscr{E}_2$ qui auront alors une plus grande population que le niveau $\mathscr{E}_1$, ce qui correspond à une inversion des populations.

3. Calculons la puissance que doit posséder la lampe flash pour réaliser une inversion des populations sur les niveaux $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$. La longueur d'onde moyenne de l'onde émise lors de la transition des bandes $\mathscr{E}_3$ et $\mathscr{E}_4$ sur le niveau $\mathscr{E}_1$ est de 450 nm environ. Il s'ensuit que pour faire passer un atome de chrome du niveau $\mathscr{E}_1$ sur les niveaux $\mathscr{E}_3$ et $\mathscr{E}_4$ il faut dépenser une énergie moyenne égale à $h\nu = hc/\lambda \approx 4{,}4\cdot10^{-12}$ erg. Les cristaux de rubis utilisés dans les lasers contiennent environ 10^{19} atomes de chrome par cm³. On doit faire passer la moitié environ de ce nombre d'atomes dans les bandes $\mathscr{E}_3$ et $\mathscr{E}_4$, ce qui exige une énergie $\approx 2{,}2\cdot10^7$ ergs $= 2{,}2$ J. Ce nombre d'atomes doit être transféré sur les niveaux excités $\mathscr{E}_3$ et $\mathscr{E}_4$ en un espace de temps inférieur à la durée de vie des atomes de chrome sur le niveau $\mathscr{E}_2$ ($\sim 2\cdot10^{-3}$ s) sinon on n'obtiendrait pas l'inversion des populations. Ainsi la puissance minimale requise pour exciter les atomes doit être de l'ordre de $2{,}2/10^{-3} = 2200$ W/cm³ $= 2{,}2$ kW/cm³. En posant que le rendement lumineux du flash est égal à 10-15 % sa puissance d'alimentation doit être ~ 20 kW/cm³. Pour un cristal de rubis de 10 cm³ la puissance à fournir est ~ 200 kW. On réalise cette puissance sans difficulté. Sous une tension de 2000 V la capacité de la batterie des condensateurs doit être supérieure à 100 µF. Généralement la capacité est ~ 1000 µF.

Plus de la moitié de l'énergie rayonnante absorbée par le cristal de rubis y est dissipée en chaleur. A une température supérieure à 1000 K le laser à rubis cesse de générer, ce qui implique parfois le refroidissement du cristal par de l'eau courante ou par de l'azote liquide.

4. Le rubis est un *cristal uniaxe*. Les indices ordinaire et extraordinaire du rubis rose utilisé dans les lasers sont respectivement: $n_o = 1{,}7653$, $n_e = 1{,}7573$ (pour $\lambda = 656$ nm). Le laser à rubis peut fournir une *lumière polarisée* sans aucun dispositif polariseur. Il suffit pour cela que l'axe optique de la tige de rubis ne coïncide pas avec son axe géométrique. La polarisation rectiligne obtenue ne peut résulter de la différence entre les coefficients de réflexion des rayons ordinaire et extraordinaire, car la différence $(n_o - n_e)$ est trop petite pour cela. La polarisation de la lumière résulte de ce que la direction de la normale à l'onde ordinaire coïncide avec la direction du rayon et que ces directions ne coïncident pas dans le cas de l'onde extraordinaire. Pour que les miroirs du laser se comportent efficacement en qualité de résonateur il faut que les normales d'onde leur soient orthogonales. Mais dans le rubis seul le rayon ordinaire se propage parallèlement à l'axe géométrique de la tige, tandis que le rayon extraordinaire est incliné sur cet axe et tombe sur la surface latérale de la tige. Le résonateur amplifie plus efficacement les rayons ordinaires que les rayons extraordinaires, et du laser émergent surtout

les rayons ordinaires dont le vecteur électrique est perpendiculaire aux axes optique et géométrique du cristal. Si ces axes sont confondus, la lumière ne sera pas polarisée, mais s'ils font entre eux un angle compris entre 60 et 90°, la lumière est entièrement polarisée rectilignement.

5. On utilise les lasers à rubis surtout en *régime d'impulsion.* La lampe flash produit un éclair d'une durée $\sim 10^{-3}$ s. La durée de l'impulsion cohérente générée par le laser est un peu plus courte. Cela tient, d'une part, à ce qu'il faut un certain temps pour que la population du niveau $\mathcal{E}_2$ atteigne sa valeur de seuil à partir de laquelle le laser se met à générer, et d'autre part, à ce que la génération du laser cesse lorsque l'intensité de l'éclair tombe à une valeur insuffisante pour maintenir une population supérieure au seuil de génération. L'impulsion laser a une structure compliquée et se compose d'un grand nombre d'impulsions isolées d'une durée de $\sim 10^{-6}$ s qui se succèdent avec un intervalle $\sim 3 \cdot 10^{-6}$ à 10^{-5} s. La puissance de l'impulsion émise par un laser à rubis peut atteindre plusieurs dizaines de kW pour une tige de rubis de 1,5 cm de diamètre et de 20 à 30 cm de longueur.

Si on réduit la durée de l'impulsion générée, la puissance en impulsion peut être portée à plusieurs dizaines de mégawatts. Pour cela il faut que la population du niveau $\mathcal{E}_2$ comporte la presque totalité des atomes de chrome, le niveau $\mathcal{E}_1$ étant presque dépeuplé. Pour une longueur du cristal égale à 10-20 cm l'impulsion de lumière peut se former selon les calculs en $\sim 10^{-8}$ s. La lampe flash pourrait assurer une telle transition s'il ne se produisait pas dans le rubis de génération de lumière qui retourne les atomes excités sur le niveau $\mathcal{E}_1$. Or le laser commence à générer dès que la population du niveau $\mathcal{E}_2$ atteint sa valeur de seuil. On peut cependant arriver au résultat cherché si on supprime pour un temps court le couplage à réaction assuré par les miroirs. Pendant cet intervalle de temps on fait passer tous les atomes de chrome sur le niveau excité $\mathcal{E}_2$. Les miroirs étant éliminés, la durée de vie moyenne des atomes sur le niveau $\mathcal{E}_2$ est de 0,002 s environ. Si pendant cet intervalle de temps on met les miroirs momentanément en circuit, il se produit presque instantanément une transition stimulée des atomes excités sur le niveau non excité $\mathcal{E}_1$ accompagnée de l'émission d'une impulsion puissante de rayonnement laser.

6. Pour pouvoir brancher et débrancher rapidement les miroirs ou pour modifier le facteur de qualité du résonateur, on remplace l'un des miroirs par un prisme à réflexion totale *P* tournant avec une vitesse angulaire ~ 500 tours/s (fig. 348). Le laser ne peut générer que lorsque le prisme occupe la position illustrée par la figure 348 (ou une position très voisine). Dans toutes les autres positions le couplage à réaction est supprimé et le laser ne génère pas. Pendant cet intervalle de temps se réalise le pompage optique du cristal *R*.

Lorsque le prisme se trouve dans la position indiquée sur la figure 348, une puissante impulsion de rayonnement laser est émise. Quoique le prisme continue à tourner rapidement, sa position ne change pas sensiblement au cours de $\sim 10^{-8}$ s qui est le temps de formation de l'impulsion laser. Lorsque l'énergie accumulée aura été dissipée, le prisme continuant à tourner, le pompage du cristal

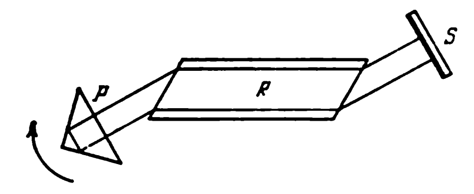


Fig. 348

recommence et lorsque le prisme aura tourné de 360° une nouvelle impulsion sera émise. Cependant lorsque le cristal est traversé par une impulsion de lumière puissante, la mise hors d'action du prisme ne suffit pas toujours pour supprimer le couplage à réaction, qui peut être maintenu par suite de la réflexion de la lumière sur les bases

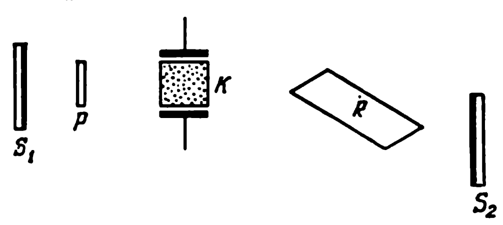


Fig. 349

du cylindre cristallin (pour le rubis le coefficient de réflexion $(n-1)^2/(n+1)^2 \approx 7{,}6$ %). Pour obvier à cet inconvénient on taille en biais les extrémités du cylindre; l'angle d'incidence est généralement rendu égal à l'*angle limite de Brewster* (à l'interface rubis-air $\varphi_B \approx 30°$). Dans ces conditions la lumière générée est polarisée rectilignement et son vecteur électrique est situé dans le plan d'incidence.

7. On peut assurer un branchement et une mise hors circuit du couplage à réaction au moyen d'une valve optique: une *cellule de Kerr* au nitrobenzène ou une *cellule de Pockels* à cristal anisotrope (fig. 349). La cellule avec son condensateur fait un angle de 45° avec l'axe du dispositif laser. Le polariseur P (polaroïd ou prisme polariseur) est orienté de façon à transmettre intégralement le rayonnement laser polarisé rectilignement. Avant la mise en action de la lampe flash on applique à la cellule K une tension suffisante pour

qu'elle puisse tourner de 90° le plan de polarisation du rayonnement laser. Dans ces conditions le polariseur P ne transmet aucune lumière et le couplage à réaction est supprimé. Pendant la durée de l'éclair lumineux le cristal de rubis subit un pompage optique et si on enlève rapidement la tension appliquée au condensateur, le rayonnement polarisé rectilignement du laser commencera à se propager librement entre les miroirs S_1 et S_2 et produira une puissante impulsion de rayonnement stimulée d'une durée de l'ordre de 10^{-8} s.

8. On remplace souvent les cellules de Kerr et de Pockels par des *filtres saturables* (le polariseur P devient dans ce cas superflu). Le principe de fonctionnement de ces filtres consiste en ce que leur transparence augmente lorsque l'intensité de la lumière atteint les très grandes valeurs caractéristiques pour le rayonnement laser (cf. § 89, pt. 6). Lorsque l'intensité lumineuse est petite, le filtre absorbe presque complètement la lumière incidente et élimine dans une très large mesure le couplage à réaction. A mesure que l'occupation du niveau supérieur augmente, le rubis commence à générer, l'absorption du filtre diminue, le couplage à réaction augmente et provoque une avalanche de rayonnement laser. A mesure que l'intensité du rayonnement généré augmente, le filtre devient de plus en plus transparent. Lorsque l'intensité du rayonnement commence à diminuer, la transparence du filtre diminue rapidement et le couplage devient de plus en plus lâche. Comme ce système fonctionne de façon automatique, le laser peut générer une succession d'impulsions de lumière.

9. La mise en action rapide du couplage à réaction permet de réduire la durée des impulsions de lumière jusqu'à 10^{-7}-10^{-8} s. Comme l'énergie de l'impulsion fournie par un cristal de rubis de 20 cm de long et de 1,5 cm de diamètre est égale à 1-2 J, la puissance développée est de 10 à 200 MW. Un accroissement ultérieur de la puissance des impulsions laser peut être assuré par amplification de la lumière par une batterie de plusieurs lasers disposés les uns à la suite des autres. Le premier laser fonctionne en *générateur* et tous les autres en *amplificateurs de lumière*. Si la puissance de l'impulsion générée est suffisamment grande, une petite fraction de celle-ci à proximité du front d'onde suffit pour provoquer des transitions stimulées sur le niveau inférieur de tous les atomes de chrome excités dans les cristaux des amplificateurs. La durée de l'impulsion s'en trouve diminuée et la puissance de l'impulsion accrue. On a produit ainsi des *impulsions géantes* d'une durée de $2 \cdot 10^{-9}$ s et d'une énergie totale de ~ 20 J, ce qui correspond à une puissance de $\sim 10^4$ MW. On peut produire des impulsions de puissance encore plus grande. Un laser à filtre saturable produit une impulsion d'une durée de $\sim 10^{-8}$ s composée d'une succession d'impulsions d'une durée de 10^{-11} à 10^{-12} s. En isolant une de ces impulsions et en l'amplifiant on arrive à une puissance de $\sim 10^7$ MW.

10. Parmi les autres matériaux utilisés dans les lasers, on doit citer avant tout le *verre au néodyme* et le *fluorure de calcium* (CaF_2) dopés par des atomes d'un métal rare: *dysprosium* (Dy), *samarium* (Sm), etc. Le milieu est rendu actif par la présence d'ions Nd^{+++}, Dy^{++}, Sm^{++}, etc. Le verre au néodyme fournit un rayonnement infrarouge de longueur d'onde $\lambda = 1,06$ µm et le fluorure de calcium dopé au dysprosium un rayonnement de longueur d'onde $\lambda = 2,36$ µm. Les tiges en verre au néodyme peuvent avoir une longueur de 0,5 à 1 m avec un diamètre égal à 5 cm. La largeur des bandes de niveaux du verre au néodyme est plus grande que dans le rubis, ce qui conduit à un rendement plus grand. Mais le rubis possède une plus grande résistance mécanique. Pour des impulsions d'une durée de 10^{-8} à 10^{-9} s, le rubis supporte des puissances de $(3$ à $4) \times 10^3$ MW par cm² de section droite, tandis que pour le verre au néodyme la puissance admise est $(1$ à $1,5)\cdot 10^3$ MW.

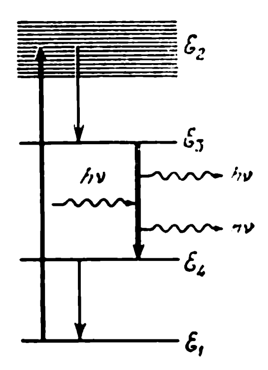


Fig. 350

A la différence du laser à rubis dont le fonctionnement fait intervenir *trois niveaux d'énergie*, le laser au fluorure de calcium dopé au Dy fait intervenir *quatre niveaux d'énergie*. Cela permet de fabriquer des lasers assez puissants fonctionnant *en continu*, ce qui est nécessaire pour certaines applications. Entre le niveau fondamental $\mathscr{E}_1$ du dysprosium et la bande d'énergie $\mathscr{E}_2$ on trouve deux niveaux intermédiaires $\mathscr{E}_3$ et $\mathscr{E}_4$ (fig. 350) entre lesquels on réalise l'inversion de population d'atomes de dysprosium. Sous l'action de l'éclair les atomes de dysprosium sont excités sur le niveau $\mathscr{E}_3$ via la bande $\mathscr{E}_2$. Le niveau $\mathscr{E}_4$ est situé dans l'échelle des énergies bien au-dessus du niveau fondamental $\mathscr{E}_1$; de ce fait à la température de l'azote liquide la population N_4 est pratiquement nulle. Il n'est donc pas nécessaire de faire passer sur le niveau $\mathscr{E}_3$ plus de la moitié des atomes de dysprosium, il suffit que la différence des populations $N_3 - N_4$ des niveaux $\mathscr{E}_3$ et $\mathscr{E}_4$ soit supérieure à la valeur de seuil. Celle-ci est égale à une petite partie du nombre total d'atomes de dysprosium. Avec une puissance de pompage modérée ($\approx$15 à 20 W) on assure un fonctionnement continu du laser. Le pompage optique continu permet de générer des impulsions géantes se succédant à une cadence élevée (plusieurs kHz). La puissance lumineuse de chaque impulsion est de $\approx$1 à 2 MW.

PROBLÈMES

1. La puissance en impulsion d'un laser à rubis est $W = 100$ MW. L'aire de la section droite du cristal cylindrique de rubis est $S = 1$ cm². Evaluer l'intensité E du champ électrique et la pression de la lumière dans le pinceau

laser en admettant qu'il est plan-parallèle ($\lambda = 694{,}3$ nm). Calculer la variation de ces grandeurs résultant de la focalisation du pinceau à l'aide d'une lentille parfaite de distance focale $f = 5$ cm.

S o l u t i o n. L'intensité E_0 du champ électrique dans le pinceau initial est donnée par la formule

$$W = \frac{c}{4\pi}\overline{EHS} = \frac{c}{4\pi}\overline{E^2}S,$$

et la pression $\mathcal{P}_0$ du rayonnement est $\mathcal{P}_0 = W/(cS)$. On trouve ainsi

$$E_0 \approx \sqrt{\overline{E^2}} = \sqrt{\frac{4\pi W}{cS}} = 647 \text{ un. C.G.S.E.} = 1{,}94\cdot 10^5 \text{ V/cm},$$

$$\mathcal{P}_0 \approx 3{,}3\cdot 10^1 \text{ dynes/cm}^2 \approx 0{,}033 \text{ atm}.$$

Pour calculer ces mêmes grandeurs au foyer de la lentille on peut utiliser les mêmes formules, après avoir calculé la largeur du pinceau lumineux. On admettra que toute la lumière est concentrée dans la tache centrale brillante de rayon $R = 0{,}61 f\lambda/r$ et d'aire

$$\pi R^2 = \pi\,(0{,}61 f\lambda/r)^2 = (0{,}61\pi f\lambda)^2/S,$$

où r est le rayon de la section droite du faisceau incident. C'est cette aire qui remplacera S dans les formules. On obtient ainsi

$$E \approx \sqrt{\overline{E^2}} \approx \frac{S}{0{,}61\pi f\lambda} E_0 = 1{,}5\cdot 10^3 E_0 = 2{,}9\cdot 10^8 \text{ V/cm},$$

$$\mathcal{P} = \left(\frac{S}{0{,}61\pi f\lambda}\right)^2 \mathcal{P}_0 = 2{,}25\cdot 10^6\, \mathcal{P}_0 \approx 7{,}4\cdot 10^4 \text{ atm}.$$

La pression calculée est celle que l'on obtiendrait dans le vide, mais lorsque le pinceau de rayonnement laser tombe sur une substance quelconque, celle-ci se vaporise instantanément, vu la grande concentration d'énergie près du foyer (la substance passe à l'état de plasma). La pression lumineuse s'en trouve encore accrue.

2. On appelle température efficace T_{eff} du rayonnement laser la température du corps noir à laquelle celui-ci émet un rayonnement de même fréquence ν et de même luminance I_ν que celles du laser. Evaluer la température efficace d'un laser à hélium-néon, émettant en continu une lumière de longueur d'onde $\lambda = 632{,}8$ nm ($\nu \approx 5\cdot 10^{14}$ Hz). La largeur de la raie spectrale émise est $\delta\nu \approx$ $\approx 10^4$ Hz, la divergence du faisceau est $\delta\vartheta \approx 1' \approx 3\cdot 10^{-4}$ rad, et la puissance du rayonnement est $W = 10$ mW.

S o l u t i o n. La luminance $I_\nu = W/(\delta\nu\cdot\delta\Omega)$, où $\delta\Omega = (\delta\vartheta)^2 \approx 10^{-7}$ sr est l'angle solide correspondant à la divergence du pinceau. Selon la formule de Rayleigh-Jeans

$$I_\nu = \frac{2k\nu^2}{c^2} T_{eff}.$$

En identifiant avec la formule précédente on obtient

$$T_{eff} \approx \frac{c^2 W}{2k\nu^2\delta\nu\cdot\delta\Omega} \approx 10^{15} \text{ K},$$

température près de 10^{11} fois plus grande que celle du Soleil.

§ 122. Laser à hélium-néon

1. Aux pressions gazeuses qui existent dans les tubes luminescents et dans les lasers à gaz, le spectre énergétique d'un gaz coïncide presque parfaitement avec celui des *atomes* et des *molécules*

isolées qui le constituent. C'est pour cela que les raies spectrales des gaz sont *plus étroites* que les raies des impuretés contenues dans les corps solides. Les gaz possèdent une *plus grande homogénéité optique* et une *densité plus petite* et de ce fait diffusent et déforment peu les ondes qui s'y propagent. Cela permet de disposer les miroirs d'un laser à gaz à grande distance l'un de l'autre et d'obtenir des rayonnements présentant une *grande directivité*, un *grand degré de monochromaticité* et une *fréquence d'émission stable*. Dans les lasers à hélium-néon la divergence du pinceau est généralement de 1 à 2' et parfois on atteint à la limite théorique $\delta\vartheta \sim \lambda/D \sim 20''$. La largeur relative

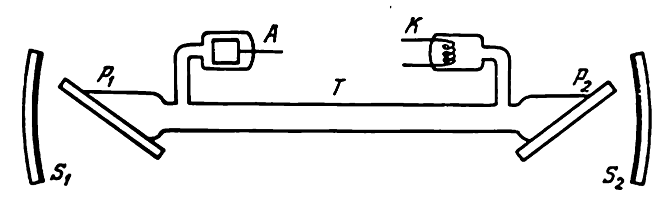


Fig. 351

de la raie spectrale du rayonnement de ce type de laser est $\delta\omega/\omega \sim \sim 10^{-11}$ à 10^{-12}, la stabilité relative de la fréquence ω étant de $\sim 10^{-14}$ (généralement $\sim 10^{-10}$).

La densité des gaz étant petite, on ne peut y obtenir de grandes concentrations d'atomes excités et par suite les puissances en impulsion ne peuvent être aussi grandes que dans les corps solides. La puissance de sortie en continu d'un laser à hélium-néon est de dix à plusieurs centaines de milliwatts. Mais comme le rayonnement est hautement monochromatique et directionnel, cette puissance est énorme en comparaison des sources de lumière thermiques. A cette puissance correspond une température efficace 10^{11} à 10^{12} fois plus grande que la température du Soleil (voir problème 2 du § 121). Notons cependant que le laser à CO_2 peut émettre en continu un rayonnement infrarouge d'une puissance atteignant 10 kW et le laser à argon ionique émet un rayonnement visible d'une puissance de ~ 1 kW. En régime d'impulsion la puissance de ces lasers peut atteindre plusieurs centaines de kilowatts.

2. Le premier laser à gaz fut le *laser à hélium-néon* élaboré en 1960 par Javan (né en 1926), Bennett (né en 1903) et Herriott. Le schéma de principe de la version moderne de ce laser est représenté sur la figure 351. Le laser se compose d'un tube à décharge T de 7 à 10 mm de diamètre et de longueur comprise entre plusieurs dizaines de centimètres et 1,5 à 2 mètres. Le tube est rempli d'un mélange d'hélium (pression ~ 1 mm Hg) et de néon (pression $\sim 0,1$ mm Hg). Les extrémités du tube sont obturées par des lames à faces parallèles P_1 et P_2 en verre ou en verre de silice, faisant avec l'axe du tube des

angles égaux à l'angle de Brewster. De ce fait le rayonnement laser est polarisé rectilignement avec le vecteur électrique parallèle au plan d'incidence. Les miroirs S_1 et S_2 entre lesquels est placé le tube sont généralement de forme sphérique à revêtements diélectriques possédant de grands coefficients de réflexion, et sont pratiquement non absorbants. La transparence du miroir à travers lequel sort la majeure partie du rayonnement généré par le laser est de 2 % environ, et celle de l'autre miroir est inférieure à 1 %. Entre les électrodes du tube est appliquée une tension constante de 1 à 2 kV. La cathode K du tube peut être froide, quoiqu'on utilise parfois des tubes à anode cylindrique creuse et à cathode chauffée par une source de courant basse tension. L'intensité du courant de décharge dans le tube est égale à quelques dizaines de milliampères. Le premier modèle de laser à hélium-néon construit par Maiman utilisait un tube sans électrodes où les décharges était créées par induction haute fréquence. Le laser à He-Ne peut fonctionner en régime continu et en régime d'impulsion et génère un rayonnement rouge de longueur d'onde 632,8 nm. Il peut aussi générer le rayonnement infrarouge de longueurs d'onde 1,150 et 3,390 µm, mais dans ce cas les fenêtres du tube doivent être transparentes dans l'infrarouge, et les miroirs doivent avoir de grands coefficients de réflexion dans l'infrarouge.

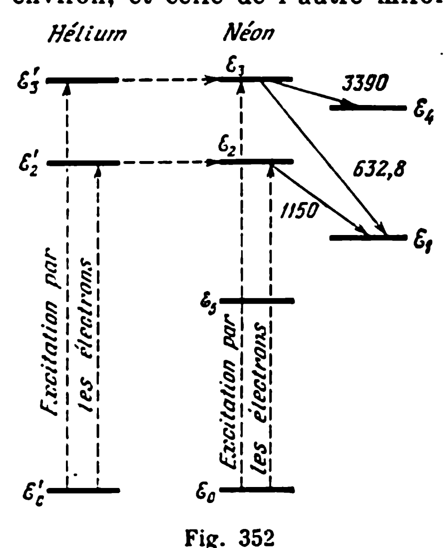


Fig. 352

3. Voyons comment se réalise l'inversion de population des atomes de néon. Un schéma simplifié des niveaux du néon est représenté sur la figure 352 à droite. Au-dessus du niveau $\mathcal{E}_4$ on trouve encore 28 niveaux d'énergies inférieures à $\mathcal{E}_3$, mais comme ils n'interviennent pas dans les processus qui nous importent, ces niveaux ne sont pas représentés sur la figure. L'excitation des atomes de néon résulte de *leurs chocs avec les électrons du plasma à décharge gazeuse*. Pour un certain régime de décharge on obtient une inversion de population sur les niveaux $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$. Les populations des niveaux $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_3$, ainsi que celles des niveaux $\mathcal{E}_4$ et $\mathcal{E}_3$, ne sont pas inversées, car s'y oppose le niveau métastable $\mathcal{E}_5$ qui a une durée de vie longue et qui se trouve un peu au-dessous du niveau $\mathcal{E}_1$ à durée de vie courte. Le niveau $\mathcal{E}_5$ a une population importante et fournit des atomes excités au niveau $\mathcal{E}_1$ qui s'épuise rapidement. C'est pour cela qu'il

ne se produit pas d'inversion de population sur les niveaux $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_3$.

L'addition d'hélium modifie totalement la situation. De tous les niveaux d'énergie de l'hélium, outre le niveau normal $\mathscr{E}'_0$, pour le fonctionnement du laser importent les niveaux métastables $\mathscr{E}'_2$ et $\mathscr{E}'_3$ d'énergies égales respectivement à 19,82 et 20,61 eV. La transition spontanée avec émission de radiation de ces niveaux sur le niveau fondamental $\mathscr{E}'_0$ est interdite, ce qui signifie que la probabilité de cette transition est très petite. De ce fait la durée de vie des atomes sur les niveaux $\mathscr{E}'_2$ et $\mathscr{E}'_3$ est très grande. Sous l'action des chocs électroniques de nombreux atomes d'hélium s'accumulent sur ces niveaux métastables. Comme les niveaux $\mathscr{E}'_2$ et $\mathscr{E}'_3$ de l'hélium coïncident à peu de chose près avec les niveaux $\mathscr{E}_2$ et $\mathscr{E}_3$ du néon, les chocs entre les atomes d'hélium excités avec les atomes de néon non excités donnent lieu à des *transitions non radiatives* des atomes d'hélium sur des niveaux non excités, leur énergie étant transférée par résonance aux atomes de néon. Ce processus d'excitation des atomes de néon est indiqué sur la figure 352 par des flèches horizontales en pointillé. Grâce à ce processus les concentrations des atomes de néon sur les niveaux $\mathscr{E}_2$ et $\mathscr{E}_3$ augmentent au point qu'apparaît une inversion de population par rapport aux niveaux $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_3$, la différence des populations des niveaux $\mathscr{E}_2$ et $\mathscr{E}_1$ augmentant de plusieurs fois.

Examinons encore le rôle que jouent les *chocs* des atomes de néon avec les parois du tube. Ces chocs n'affectent pratiquement pas les populations des niveaux $\mathscr{E}_2$ et $\mathscr{E}_3$ ni celle du niveau $\mathscr{E}_1$ car les durées de vie sur ces niveaux sont très *courtes*. Pendant la durée de vie des atomes excités sur ces niveaux, ces atomes ne peuvent arriver jusqu'aux parois du tube, car ils se désexcitent bien avant. Les atomes excités occupant le niveau $\mathscr{E}_5$ ont une durée de vie assez longue pour subir de nombreux chocs avec les parois du tube. Ces chocs dépeuplent le niveau $\mathscr{E}_5$, ce qui entraîne une transition des atomes de néon du niveau $\mathscr{E}_1$ sur le niveau $\mathscr{E}_5$. Le niveau $\mathscr{E}_1$ se vide alors plus rapidement que lorsque le niveau $\mathscr{E}_5$ a une grande population. Ainsi la différence entre les populations des niveaux $\mathscr{E}_3$ et $\mathscr{E}_1$ augmente, ce qui accroît l'efficacité de l'émission laser. Le processus de dépeuplement du niveau $\mathscr{E}_1$ est particulièrement efficace pour un certain *diamètre optimal du tube*. Selon les données expérimentales la puissance du laser à hélium-néon est maximale pour un diamètre du tube égal à ~ 7 mm. Si on prend un tube de plus grand diamètre la puissance diminue, quoique le volume du gaz de travail augmente (le volume est proportionnel au carré du diamètre du tube). Cela tient à ce que le dépeuplement efficace du niveau $\mathscr{E}_1$ s'effectue aux dépens des atomes se trouvant *à proximité des parois du tube*, tandis que les atomes situés dans la partie centrale *ne participent pratiquement plus au processus de génération.*

§ 123. Polarisation non linéaire du milieu

1. L'invention des lasers a permis de réaliser des expériences avec des faisceaux lumineux de grande intensité où l'intensité du champ électrique n'est plus négligeable devant celle des champs intra-atomiques et intramoléculaires (cf. § 5, pt. 3). Dans ces faisceaux apparaissent des *phénomènes optiques non linéaires*, suffisamment importants pour trouver des applications pratiques (ce qui signifie que ces effets non linéaires ne peuvent être considérés comme de simples corrections aux effets linéaires ordinaires). Nous avons déjà fait état au chapitre VIII (§§ 91, 99, 100) de certains effets optiques non linéaires (accroissement de la transparence du milieu à mesure que l'intensité lumineuse augmente, diffusion stimulée de Mandelstam-Brillouin, diffusion combinatoire stimulée).

Lorsque la lumière se propage dans un milieu, tous ces phénomènes sont liés en premier lieu à l'existence d'une *relation non linéaire* entre le vecteur de polarisation $\boldsymbol{P}$ du milieu et l'intensité $\boldsymbol{E}$ du champ électrique de l'onde lumineuse. Nous admettrons que le milieu est *homogène* et nous négligerons ses propriétés magnétiques et sa dispersion spatiale. Tant que le champ $\boldsymbol{E}$ *n'est pas encore très intense* on peut développer le vecteur $\boldsymbol{P}$ suivant les puissances des composantes du vecteur $\boldsymbol{E}$ et ne conserver que les premiers termes de la série. Dans le cas général d'un milieu anisotrope on peut écrire

$$P_j = \alpha_{jk}E_k + \alpha_{jkl}E_kE_l + \alpha_{jklm}E_kE_lE_m + \ldots \qquad (123.1)$$

Conformément aux notations en usage dans le calcul tensoriel, la répétition de deux mêmes indices sous-entend la sommation des termes concernés. La tenseur α_{jk} représente ici la *polarisabilité ordinaire* (i.e. *linéaire*) *du milieu* et les tenseurs des rangs supérieurs α_{jkl}, α_{jklm}, . . . représentent les *polarisabilités quadratique*, *cubique*, etc., du milieu. On suppose que le champ $\boldsymbol{E}$ est *monochromatique* et que les polarisabilités α *dépendent de la fréquence* ω. Pour un milieu isotrope tous les tenseurs α_{jk}, α_{jkl}, . . . *dégénèrent en scalaires.*

Dans le cas où chaque point du milieu est centre de symétrie, les polarisabilités d'ordres pairs s'annulent (il faut pour cela que le nombre des indices, après rejet du premier, soit pair). Si nous inversons le sens de tous les axes de coordonnées, les signes de E_k et E_l seront inversés, mais α_{jkl} ne changera pas, puisque l'origine des coordonnées est centre de symétrie, comme tout autre point du milieu. Le terme quadratique $\alpha_{jkl}E_kE_l$ ne change pas, mais le signe de P_j sera inversé. Pour que la relation (123.1) soit vérifiée dans le nouveau système de coordonnées, on doit avoir $\alpha_{jkl} = 0$. On démontre de la même façon que toutes les autres polarisabilités d'ordres pairs sont nulles.

L'existence d'une polarisabilité quadratique détermine de nombreux effets optiques non linéaires. Conformément à la démonstra-

tion ci-dessus, *il ne peut y avoir* d'effets quadratiques non linéaires dans les milieux isotropes. Néanmoins lors de l'étude de ces effets on peut utiliser le modèle de milieu isotrope à condition de poser

$$P = \alpha E + \alpha_2 EE + \alpha_3 E^2 E + \ldots, \qquad (123.2)$$

où les polarisabilités $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ sont des *scalaires*. Cette approche simplifiée peut être utilisée pour une *étude qualitative* des effets optiques non linéaires, à condition de remarquer que dans les cristaux le long d'une direction donnée ne peuvent se propager que des ondes de certaines polarisations seulement. La relation (123.2) s'applique de façon approchée à chacune de ces ondes, mais les polarisabilités $\alpha, \alpha_2, \ldots$ ont des valeurs différentes pour chacune de ces ondes. En outre les ondes de polarisations différentes peuvent échanger de l'énergie lors d'*interactions non linéaires*. Une interaction non linéaire peut se manifester lorsque P et E sont liés par une relation tensorielle de la forme (123.1), mais elle est impossible si la relation est scalaire de la forme (123.2). Il est évident que dans l'approche utilisée l'influence des interactions non linéaires ne peut être appréciée que de façon qualitative.

2. Décomposons la polarisation P en une partie *linéaire* P_l et une partie *non linéaire* P_{nl}: $P = P_l + P_{nl}$. La partie non linéaire est définie par l'expression

$$P_{nl} = \alpha_2 EE + \alpha_3 E^2 E + \ldots \qquad (123.3)$$

et la partie linéaire par $P_l = \alpha E$. L'induction $D = E + 4\pi P$ comporte une *partie linéaire* $D_l = E + 4\pi P_l$ et une *partie non linéaire* $D_{nl} = 4\pi P_{nl}$. La partie linéaire est évidemment égale à $D_l = \varepsilon E$, où ε est la *permittivité diélectrique ordinaire du milieu*, telle qu'elle est définie en électrodynamique linéaire. Ecrivons maintenant le système des équations fondamentales de Maxwell sous la forme

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rot} H - \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\frac{\partial P_{nl}}{\partial t},\\
&\operatorname{rot} E - \frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} = 0,\\
&\operatorname{div}(\varepsilon E) = -4\pi \operatorname{div} P_{nl},\\
&\operatorname{div} H = 0.
\end{aligned} \qquad (123.4)$$

Appliquons la *méthode des approximations successives* pour trouver une solution de ce système. Dans l'approximation d'ordre zéro on rejette les seconds membres dans l'équation (123.4), ce qui conduit aux *équations ordinaires de l'électrodynamique linéaire*. Prenons pour approximation d'ordre zéro l'onde plane définie par

$$E = E_0 = A \cos(\omega t - kr), \qquad (123.5)$$

où le vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$ vérifie la relation ordinaire $k^2 = \varepsilon\omega^2/c^2$. Pour trouver l'approximation d'ordre un rejetons dans (123.3) les termes cubiques et les termes d'ordres supérieurs et remplaçons dans le terme quadratique $\alpha_2 EE$ le champ $\boldsymbol{E}$ par son expression (123.5) dans l'approximation d'ordre zéro. On obtient à nouveau des *équations linéaires* qui *ne sont cependant pas homogènes* et dont les seconds membres sont connus. Ces seconds membres peuvent être interprétés comme des *sources supplémentaires d'ondes* déterminées par la partie non linéaire de la polarisation du milieu. Chaque élément de volume dV du milieu *réémet les ondes* comme le ferait un dipôle de Hertz possédant un moment dipolaire supplémentaire $\boldsymbol{P}_{\rm nl}\, dV$. La superposition de ces ondes sur l'onde (123.5) crée le champ d'onde $\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_1$ correspondant à l'*approximation d'ordre un*. On procède de façon identique pour obtenir l'approximation d'ordre deux; on arrête le développement (123.3) aux termes de troisième degré et on remplace $\boldsymbol{E}$ par $\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_1$; on trouve ensuite le champ $\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2$ qui constitue *l'approximation d'ordre deux*, et ainsi de suite.

Il nous reste à préciser ce qu'il faut entendre par ε dans les équations (123.4) dans le cas d'un milieu *dispersif*. Dans toutes les approximations le second membre de (123.4) comporte des termes où figurent, outre la fréquence initiale ω, les fréquences 2ω, 3ω, . . ., ainsi que d'autres fréquences comme dans le cas d'une génération paramétrique de la lumière (cf. § 126). On doit chercher $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{H}$ sous forme d'une somme de champs monochromatiques des *mêmes fréquences*. On doit écrire l'équation (123.4) pour *chacune des fréquences* en ne conservant dans le second membre que les termes contenant cette même fréquence et en entendant par ε la valeur de la fonction ε à *cette même fréquence*. Tel est le *sens symbolique* du système d'équations (123.4).

§ 124. Première approximation. Détection optique. Génération des seconds harmoniques correspondant à la somme et à la différence des fréquences

1. Dans l'approximation d'ordre zéro la partie non linéaire (123.3) qui vient s'ajouter à la polarisation du milieu est égale à

$$P_{\rm nl} = \alpha_2 E_0^2 = \frac{\alpha_2 A^2}{2} + \frac{\alpha_2 A^2}{2} \cos 2\,(\omega t - kr). \qquad (124.1)$$

Le premier terme du second membre ne dépend pas du temps et c'est son existence qui détermine la *détection optique*, i.e. l'apparition dans un milieu non linéaire, traversé par une onde lumineuse de grande puissance, d'une polarisation électrique constante. Ce phénomène est analogue à la *détection* (*redressement*) *d'un courant électrique sinusoïdal*. Pour observer ce phénomène on dispose un cristal (par exemple un cristal de quartz) entre les armatures d'un condensateur

dont l'une est reliée à la terre à travers une grande résistance et on fait passer à travers ce cristal un faisceau lumineux fourni par un laser à rubis. Du fait de la détection le faisceau lumineux excite une *impulsion de courant électrique* dans le circuit du condensateur, que l'on peut déceler sur l'écran d'un oscillographe.

2. Le deuxième terme de (124.1) varie suivant une loi harmonique en fonction du temps et détermine la *génération dans le milieu non linéaire d'un deuxième harmonique*, i.e. d'une onde de fréquence double $\omega_2 = 2\omega$. Pour trouver le champ de cet harmonique, on procède de la façon indiquée au paragraphe précédent. En écrivant les résultats sous forme complexe, on obtient le système d'équations

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \frac{\varepsilon(2\omega)}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = i\omega\frac{4\pi\alpha_2}{c}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}e^{i2(\omega t-\boldsymbol{kr})},\\ &\operatorname{rot} \boldsymbol{E} - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = 0,\\ &\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0. \end{aligned} \qquad (124.2)$$

Cherchons d'abord une *solution particulière* de ce système sous la forme

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}_1 e^{i2(\omega t-\boldsymbol{kr})}, \quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}_1 e^{i2(\omega t-\boldsymbol{kr})},$$

qui correspond aux *vibrations forcées* de fréquence 2ω. En résolvant la deuxième équation par le procédé ordinaire on trouve que les vecteurs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{H}$ sont *rectangulaires*. La résolution des deux dernières équations montre que $(\boldsymbol{kA}_1) = (\boldsymbol{kB}_1) = 0$, ce qui signifie que l'onde plane considérée est *transversale par rapport aux vecteurs* $\boldsymbol{E}$ *et* $\boldsymbol{H}$. En remarquant encore que $k^2c^2 = \omega^2\varepsilon(\omega)$, les deux premières équations (124.2) fournissent le résultat suivant:

$$\boldsymbol{A}_1 = \frac{2\pi\alpha_2}{\varepsilon(\omega) - \varepsilon(2\omega)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}.$$

Il faut encore que soit vérifiée la condition qu'à l'entrée du milieu non linéaire, où on situe l'origine des coordonnées, l'intensité du deuxième harmonique soit nulle. Pour cela on doit ajouter à la solution particulière indiquée la *solution générale* du système correspondant d'équations homogènes, en adoptant une valeur de l'amplitude vérifiant la condition indiquée. En revenant à l'écriture sous forme réelle, le résultat est

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{2\pi\alpha_2}{\varepsilon(\omega) - \varepsilon(2\omega)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}\,[\cos(\omega_2 t - 2\boldsymbol{kr}) - \cos(\omega_2 t - \boldsymbol{k}_2\boldsymbol{r})], \qquad (124.3)$$

où

$$k_2^2 = \omega_2^2\varepsilon(\omega_2)/c^2.$$

3. Ce résultat montre que le deuxième harmonique résulte de la superposition de deux ondes de même fréquence $\omega_2 = 2\omega$: d'une *onde forcée* $\cos(\omega_2 t - 2\boldsymbol{kr})$ et d'une *onde se propageant librement* $-\cos(\omega_2 t - \boldsymbol{k}_2\boldsymbol{r})$. Ces ondes se propagent dans la même direction,

mais avec des *vitesses de phase différentes*. Il s'ensuit qu'au cours de leur propagation la différence de phase entre les ondes varie, ce qui se traduit par l'apparition de *battements*. Pour calculer l'intensité I_1 du deuxième harmonique, il faut élever au carré, puis moyenner sur le temps l'expression (124.3). En omettant les facteurs numériques et en notant I l'intensité de l'onde initiale, on obtient ainsi

$$I_1 \sim \frac{\alpha_2^2 \omega^2 x^2 I^2}{n^2 c^2} \left(\frac{\sin \beta}{\beta}\right)^2, \tag{124.4}$$

où x est la distance parcourue par l'onde et où β est

$$\beta = \frac{(2k-k_2)\,r}{2} = \frac{(2k-k_2)\,x}{2}. \tag{124.5}$$

Nous avons négligé la différence entre $n(\omega)$ et $n(2\omega)$ dans le dénominateur de (124.4).

L'intensité du premier harmonique s'annule pour $\beta = 0, \pi, 2\pi, \ldots$ et devient maximale à peu près à mi-chemin entre les minimums. Ainsi, à mesure que x augmente, l'intensité du second harmonique augmente lorsque β est compris entre 0 et $\pi/2$, puis entre $\pi/2$ et $3\pi/2$, etc. Dans ces cas *l'énergie de l'onde incidente est transférée au second harmonique*. Lorsque β est compris entre $\pi/2$ et π, $3\pi/2$ et 2π, etc., l'intensité du second harmonique diminue à mesure que x augmente, et *l'énergie est à nouveau transférée à l'onde initiale*. Ce processus *de transfert d'énergie* se répète périodiquement à mesure que progresse l'onde initiale.

La condition $\beta = \pi/2$ caractérise la distance x sur laquelle se produisent le transfert d'énergie de l'onde initiale au deuxième harmonique et le transfert inverse. Cette distance, appelée *longueur de cohérence*, est donnée par

$$l_{\text{coh}} = \frac{\lambda}{4\,|n(\omega) - n(2\omega)|}, \tag{124.6}$$

où λ est la longueur de l'onde initiale, $n(\omega)$ son indice de réfraction et $n(2\omega)$ l'indice de réfraction du deuxième harmonique. *Plus la longueur de cohérence est grande, plus intense est le transfert d'énergie de l'onde initiale au deuxième harmonique.*

Lorsque

$$n(\omega) = n(2\omega), \quad \text{et par suite} \quad 2k = k_2, \tag{124.7}$$

la longueur de cohérence l_{coh} devient infinie. Le transfert d'énergie est alors très efficace et correspond au passage de l'énergie de l'onde initiale à son deuxième harmonique. Les deux ondes $\cos(\omega_2 t - 2kr)$ et $-\cos(\omega_2 t - k_2 r)$ se propagent avec la même vitesse de phase, ce qui implique que le rapport de leurs phases est constant pendant toute la durée de propagation. C'est ce qui détermine un échange efficace d'énergie entre ces ondes et c'est pour cela que la condition (124.7) est désignée sous le nom de *condition du synchronisme de phase*

des ondes. Dans ce cas $\beta = 0$ pour toute valeur de x et en effectuant un passage à la limite $\beta \to 0$, on tire de (124.4)

$$I_1 = \frac{\alpha_2^2 \omega^2 x^2 I^2}{n^2 c^2}. \qquad (124.8)$$

Il va de soi que si x est très grand, la formule (124.8) ne sera plus vérifiée, puisque pour $x \to \infty$ elle donne $I_1 \to \infty$, tandis que l'intensité du deuxième harmonique ne peut être supérieure à l'intensité I de l'onde initiale. Dans ce cas la méthode des approximations successives qui a fourni la formule (124.8) est inutilisable.

On peut définir la longueur de cohérence l_{coh} comme la distance de propagation maximale pour laquelle se conserve le synchronisme de phase de l'onde incidente et de l'onde secondaire, c'est donc la distance pour laquelle le rattrapage de phase ne dépasse pas π.

4. La génération du second harmonique a été décelée pour la première fois en 1961 par Franken au cours d'expériences où le rayonnement émis par un laser à rubis était focalisé sur un cristal de quartz disposé entre deux filtres à bandes de transparence étroites, centrées sur $\lambda_1 = 694{,}3$ nm et $\lambda_2 = \lambda_1/2 = 347{,}0$ nm. Du cristal sortaient, d'une part, le rayonnement rouge du laser ($\lambda_1 = 694{,}3$ nm) et, d'autre part, un rayonnement ultraviolet de longueur d'onde égale à 347,0 nm. Dans les premières expériences de Franken 10^{-8} environ de l'énergie de l'onde initiale était transférée à son deuxième harmonique.

La petitesse du transfert d'énergie est due à ce que pour le quartz la longueur de cohérence l_{coh} est *petite*. Pour que l'échange d'énergie entre les ondes soit important, il faut que soit vérifiée la *condition de synchronisme de phase* $n(\omega) = n(2\omega)$. Or cette condition est irréalisable dans les *milieux isotropes dans la zone de transparence du spectre*, puisque dans cette région spectrale l'indice de réfraction $n(\omega)$ *croît avec la fréquence de façon monotone*. L'égalité $n(\omega) = n(2\omega)$ ne peut être vérifiée que si la fréquence ω est située dans la zone de transparence et la fréquence 2ω dans la zone de forte absorption (ou inversement).

En 1962, Giordmaine et Terhune ont avancé et ont aussitôt confirmé par l'expérience que *le synchronisme de phase peut être réalisé aux fréquences ω et 2ω pour l'onde ordinaire et pour l'onde extraordinaire se propageant dans certains cristaux*. La figure 353 représente les indices ordinaire n^o et extraordinaire n^e d'un cristal uniaxe en fonction de la direction de la normale à l'onde. Les courbes en traits pleins correspondent à la fréquence ω et celles en traits discontinus à la fréquence 2ω. Sur la figure 353, *a* les courbes $n^o(\omega)$ et $n^e(2\omega)$ se coupent en des points auxquels correspondent les directions suivant lesquelles on observe un synchronisme de phase de l'onde ordinaire de fréquence ω et de son harmonique de fréquence 2ω. Ces directions sont les *directions de synchronisme*; l'angle ϑ

que font ces directions avec l'axe optique du cristal est l'*angle de synchronisme*.

Quoique les deux ondes soient polarisées dans des plans différents, elles peuvent interagir de façon non linéaire, puisque dans les cristaux la polarisabilité quadratique n'est pas un scalaire α_2 mais un *tenseur* $(\alpha_2)_{jkl}$. S'il y a le synchronisme de phase, on doit observer un transfert d'énergie de l'onde initiale à son deuxième harmonique et c'est ce qu'on observe effectivement. On arrive à transformer ainsi plus de la moitié de la lumière incidente en une lumière de fréquence

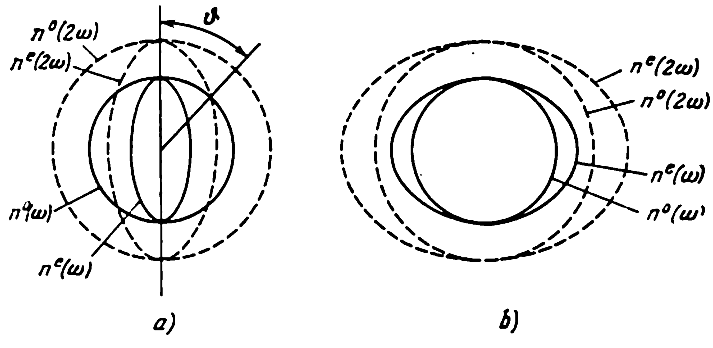


Fig. 353

double (deuxième harmonique). Pour de fortes intensités du second harmonique la méthode des approximations successives devient inexacte ou même inutilisable, mais la conclusion relative au rôle du synchronisme de phase *conserve toute sa valeur*.

On peut utiliser pour ces expériences les cristaux uniaxes de KH_3PO_4 (diphosphate de potassium ou KDP). A une longueur d'onde $\lambda = 1{,}15$ µm, le calcul et l'expérience montrent que pour le KDP l'angle de synchronisme est égal à 41°35'. L'utilisation de ces cristaux permet de réaliser une belle expérience de démonstration. Un cristal de KDP taillé parallèlement à son axe optique est disposé sur une table tournante (autour de son axe vertical). L'axe optique du cristal doit être horizontal. On envoie sur le cristal un pinceau de rayons infrarouges fourni par un laser à verre de néodyme ($\lambda = 1060$ nm) de grande puissance. Les rayons infrarouges sont invisibles, mais on les décèle aisément en interposant sur leur trajet une feuille de papier noir qui s'enflamme aussitôt. Tant que le cristal est orienté de façon arbitraire il n'apparaît pas de lumière visible, mais si on tourne le cristal, il s'en échappe à un certain moment un rayon vert aveuglant ($\lambda = 530$ nm) ; c'est l'orientation pour laquelle se réalise le synchronisme de phase.

Certains cristaux uniaxes conviennent à ces expériences, d'autres pas. Par exemple, les cristaux de quartz ne conviennent pas, car

ainsi que le montre la figure 353, *b*, la condition de synchronisme de phase n'est vérifiée pour aucune direction.

5. Examinons la question de la *génération d'ondes de fréquences égales à la somme et à la différence des fréquences des ondes initiales.* Le mécanisme de l'effet est le même que celui de la génération du second harmonique. Si on envoie dans un milieu non linéaire deux faisceaux lumineux de grande puissance, l'un ayant la fréquence ω_1 et l'autre la fréquence ω_2, il en émergera non seulement des radiations des *fréquences initiales* ω_1 et ω_2 et de *leurs harmoniques* $2\omega_1$ et $2\omega_2$, mais encore des *radiations de fréquences* $\omega_1 + \omega_2$ et $\omega_1 - \omega_2$. La mise en œuvre de ce principe permet de produire des rayonnements infrarouges et ultraviolets lointains. On a obtenu, par exemple, un rayonnement ultraviolet de longueur d'onde ≈ 80 nm.

§ 125. Deuxième approximation. Autofocalisation

1. Pour faire le calcul en *approximation d'ordre deux*, on doit utiliser le vecteur $\boldsymbol{P}_{nl}$ calculé en première approximation, i.e.

$$\boldsymbol{P}_{nl} = \alpha_2 (E_0 + E_1)(E_0 + E_1) + \alpha_3 E_0^2 E_0.$$

Nous ne considérerons ici que le cas de *milieux isotropes* ou de *cristaux possédant un centre de symétrie.* Comme pour ces deux types de milieux $\alpha_2 = 0$ (cf. § 123), $\boldsymbol{P}_{nl} = \alpha_3 E_0^2 E_0$. En portant dans cette dernière formule l'expression (123.5) on obtient

$$\boldsymbol{P}_{nl} = \frac{3\alpha_3 A^2}{4} A \cos(\omega t - kr) + \frac{\alpha_3 A^2}{4} A \cos 3(\omega t - kr). \qquad (125.1)$$

Le terme de fréquence $\omega_3 = 3\omega$ détermine la *génération du troisième harmonique*. La différence des indices de réfraction $n(3\omega) - n(\omega)$ y est plus grande que dans le cas du deuxième harmonique, ce qui restreint le nombre de cristaux vérifiant la *condition de synchronisme de phase*. La principale difficulté expérimentale réside dans la petitesse de la polarisabilité cubique α_3, ce qui entraîne la nécessité d'utiliser de gros cristaux et des éclairements très forts provoquant souvent la destruction des cristaux. Néanmoins un groupe de physiciens américains ont observé en 1962 la génération du troisième harmonique sur un cristal de spath d'Islande éclairé par le rayonnement d'un laser à rubis. A la sortie du cristal on réussit à enregistrer un rayonnement d'une longueur d'onde égale à 231,3 nm. Par la suite on observa la génération du troisième harmonique dans plusieurs cristaux optiquement isotropes (LiF, NaCl), dans les gaz et dans les liquides.

En troisième approximation on devrait observer, en plus des harmoniques d'ordres inférieurs, un harmonique *d'ordre quatre*; la quatrième approximation laisse prévoir un *cinquième* harmonique et ainsi de suite. Le quatrième harmonique a été décelé en 1974 par S. A. Akhmanov et le cinquième en 1973 par Harris.

2. Voyons à quels phénomènes peut donner lieu le premier terme du second membre de l'expression (125.1). Le facteur A cos $(\omega t - kr)$ représente l'onde incidente initiale E_0. Il est évident qu'on peut remplacer ici E_0 par E, puisque cette substitution ne se répercutera que sur les termes d'*ordres de petitesse supérieurs* dont on n'a pas à tenir compte dans l'approximation considérée. L'expression (123.4) s'écrira maintenant sous la forme

$$\operatorname{rot} H - \frac{1}{c}\left[\varepsilon(\omega) + 3\pi\alpha_3(\omega) A^2\right] \frac{\partial E}{\partial t} = 0.$$

Ainsi l'action exercée par le terme considéré est équivalente à une *variation de la permittivité diélectrique ou de l'indice de réfraction du milieu*. Comme la correction à apporter à $\varepsilon(\omega)$ est petite, on peut exprimer l'indice de réfraction n du milieu soumis à l'action d'une onde lumineuse de grande intensité par la formule

$$n = n_0 + n_2 A^2, \tag{125.2}$$

où n_0 est la valeur de l'indice de réfraction du milieu en optique linéaire et $n_2(\omega)$ un coefficient dont la valeur dépend des propriétés du milieu.

Il existe encore d'autres causes de variation de l'indice de réfraction, déterminées par le champ électrique. Du fait de l'*électrostriction*, l'onde lumineuse crée dans un milieu non linéaire une *pression constante* dont l'apparition est analogue à celle du terme constant dans (124.1). Sous l'action de cette pression, *la densité et l'indice de réfraction du milieu changent*. Dans les liquides composés de molécules anisotropes, l'indice de réfraction est modifié par l'*effet Kerr haute fréquence* (cf. § 90). L'indice de réfraction varie toujours du fait de l'*échauffement du milieu par l'onde lumineuse*. Dans tous ces cas la variation de l'indice de réfraction est proportionnelle au *carré de l'amplitude* et peut donc être représentée par la formule (125.2).

La constante n_2 peut être positive ou négative. Elle a une grande valeur positive dans le nitrobenzène.

3. Il résulte de ces considérations que lorsqu'un faisceau lumineux de grande intensité traverse un milieu homogène, celui-ci devient *optiquement inhomogène*. Dans un milieu non homogène, les rayons lumineux s'incurvent dans le sens des indices croissants et c'est ce qui détermine les phénomènes d'*autofocalisation* ($n_2 > 0$) ou de *défocalisation* ($n_2 < 0$) de la lumière. Ces phénomènes ont été théoriquement prévus en 1962 par G. A. Askarian et ont été observés en 1965 par N. F. Filipetski et A. R. Roustamov. Par la suite on observa ces phénomènes dans les gaz, les liquides et les solides.

Pour donner une explication simple du phénomène d'autofocalisation, supposons qu'on envoie dans un milieu homogène d'indice de réfraction n_0 un faisceau cylindrique de diamètre D (fig. 354).

Si l'amplitude est constante en tout point de la section du faisceau, l'indice de réfraction dans la région du milieu occupé par le faisceau devient égal à $n = n_0 + n_2A^2$; posons que $n_2 > 0$. Par diffraction le faisceau s'élargit et pratiquement toutes les directions des rayons sont contenues dans un cône d'angle au sommet $2\vartheta_{dif}$, où $\vartheta_{dif} = 1{,}22\lambda/(Dn_0)$ et λ est la longueur d'onde dans le vide. (Les directions des rayons lumineux sont contenues dans l'espace délimité par le faisceau cylindrique.) L'angle limite ϑ_0 pour lequel se réalise la

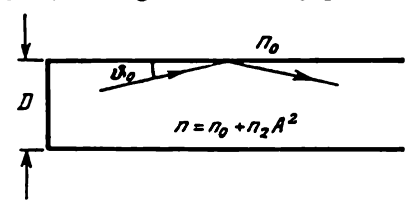


Fig. 354

réflexion totale sur la paroi latérale du cylindre est défini par la relation

$$\cos\vartheta_0 = n_0/(n_0 + n_2A^2).$$

L'angle ϑ_0 étant petit, on écrira $1 - \cos\vartheta_0 \approx A^2n_2/n_0$, d'où

$$\vartheta_0^2 \approx 2A^2n_2/n_0.$$

Pour $\vartheta_{dif} > \vartheta_0$ une partie des rayons diffractés sortent du cylindre et le faisceau *diverge*. Pour $\vartheta_{dif} < \vartheta_0$ tous les rayons diffractés subissent une réflexion totale sur la surface latérale du cylindre. Comme dans les cas réels l'intensité lumineuse et l'indice de réfraction augmentent à mesure qu'on se rapproche de l'axe du cylindre, les rayons lumineux s'incurvent et le faisceau lumineux *se contracte*; à la limite il peut *se réduire à un cordon lumineux*, c'est le phénomène d'*autofocalisation*.

Dans le cas intermédiaire où $\vartheta_{dif} \approx \vartheta_0$ un faisceau lumineux traversera un milieu non linéaire sans que ses dimensions transversales varient. Tout se passe comme si le faisceau se « creusait » dans le milieu un guide d'onde où il se propage sans diffusion latérale. Ce régime de propagation est appelé *autocanalisation du faisceau lumineux*. Comme cela se réalise pour $\vartheta_0 \approx \vartheta_{dif}$, en utilisant les expressions de ϑ_0 et ϑ_{dif} et en exprimant l'amplitude A par la puissance du faisceau

$$P = \frac{cn_0A^2}{8\pi}\cdot\frac{\pi D^2}{4} = \frac{cn_0D^2}{32}A^2,$$

on obtient la *puissance de seuil* au-delà de laquelle commence la contraction du faisceau :

$$P_{\text{seuil}} \approx c\,\frac{(0{,}61\lambda)^2}{16 n_2}. \qquad (125.3)$$

Les rayons marginaux du faisceau se focalisent à une distance du bord du milieu que l'on évalue comme suit. Dans le faisceau l'angle de divergence des rayons dû à la diffraction est égal à $2\vartheta_{\text{dif}}$. A la puissance lumineuse critique, par réflexion sur la surface latérale du faisceau, les rayons extrêmes redeviennent parallèles à une distance du bord du milieu égale à

$$f_{\text{eff}} = \frac{D}{2\vartheta_{\text{dif}}} \approx \frac{n_0 D^2}{2{,}44\lambda}. \qquad (125.4)$$

Cette distance joue ici le rôle de *distance focale efficace pour les rayons extrêmes du faisceau.* Si on prend des rayons parallèles, ils seront focalisés à la même distance f_{eff}.

Pour le sulfure de carbone CS_2, qui possède une valeur relativement grande de $n_2 = 2\cdot 10^{-11}$ C.G.S.E., éclairé par un laser à rubis ($\lambda = 694{,}3$ nm), la puissance de seuil calculée par la formule (125.3) est $P_{\text{seuil}} \approx 17$ kW. Pour un faisceau de diamètre $D = 1$ mm, la formule (125.4) donne $f_{\text{eff}} \approx 96$ cm ($n_0 = 1{,}62$). Dans certains verres optiques, $P_{\text{seuil}} \sim 1$ W. Dans ces cas on peut observer le phénomène d'autofocalisation même avec des rayonnements de faible puissance produits par des lasers à régime continu.

§ 126. Génération paramétrique de la lumière

1. Les phénomènes optiques non linéaires se manifestant dans les cristaux permettent de transformer un rayonnement laser donné non seulement en rayonnements de fréquences harmoniques ou de fréquences égales à la somme ou à la différence des fréquences initiales, mais aussi en *rayonnements de fréquence continuellement réglable.* Le principe de ce changement de fréquence a été suggéré en 1962 par S. A. Akhmanov et R. V. Khokhlov (1926-1977). Soit un milieu dont la polarisation non linéaire est représentée, aux termes quadratiques près, par l'expression $\boldsymbol{P}_{\text{nl}} = \alpha_2 \boldsymbol{E}\boldsymbol{E}$; envoyons sur ce milieu une puissante onde de « pompage » $\boldsymbol{E}_{\text{p}} = \boldsymbol{A}_{\text{p}} \cos(\omega_{\text{p}} t - \boldsymbol{k}_{\text{p}} \boldsymbol{r})$ et deux ondes de faibles puissances: $\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{A}_1 \cos(\omega_1 t - \boldsymbol{k}_1 \boldsymbol{r})$ et $\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{A}_2 \cos(\omega_2 t - \boldsymbol{k}_2 \boldsymbol{r})$ dont les fréquences vérifient la relation

$$\omega_{\text{p}} = \omega_1 + \omega_2. \qquad (126.1)$$

Posons pour simplifier que les directions des amplitudes de toutes les ondes sont confondues ; on peut alors passer aux formules scalaires. En première approximation la polarisation non linéaire du milieu est égale à $\alpha_2 (E_{\text{p}} + E_1 + E_2)^2$. Après avoir élevé au carré, considérons le terme $2\alpha_2 E_1 E_{\text{p}}$ qui représente le produit de deux cosinus.

Ecrivons-le sous forme d'une somme de deux cosinus et considérons le terme de fréquence $(\omega_p - \omega_1)$ qui selon (126.1) est égale à ω_2. Procédons de la même façon avec le terme $2\alpha_2 E_2 E_p$. On arrive ainsi à décomposer la polarisation non linéaire P_{nl} en deux termes de fréquences ω_1 et ω_2:

$$\begin{aligned} P_{nl}(\omega_1) &= \alpha_2 A_2 A_p \cos[\omega_1 t - (\boldsymbol{k}_p - \boldsymbol{k}_2)\boldsymbol{r}], \\ P_{nl}(\omega_2) &= \alpha_2 A_1 A_p \cos[\omega_2 t - (\boldsymbol{k}_p - \boldsymbol{k}_1)\boldsymbol{r}]. \end{aligned} \tag{126.2}$$

Il se produit donc une réémission d'ondes de fréquences ω_1 et ω_2 et ces ondes peuvent être *amplifiées* aux dépens de l'énergie de l'onde de pompage. Cet effet est appelé *amplification paramétrique de la lumière*, puisqu'on peut le considérer comme résultant d'une *modulation des paramètres du milieu* (de l'indice de réfraction) par l'onde de pompage. Cet effet fut découvert en 1965, en U.R.S.S., par Akhmanov et Khokhlov, et aux USA par Giordmaine et Miller, qui l'utilisèrent aussitôt pour la réalisation de *générateurs cohérents de lumière de fréquence réglable*. L'interaction avec l'onde de pompage est particulièrement intense lorsque les phases des ondes (126.2) coïncident longtemps avec les phases des ondes E_1 et E_2, i.e. lorsque se trouve vérifiée la condition

$$\boldsymbol{k}_1(\omega_1) + \boldsymbol{k}_2(\omega_2) = \boldsymbol{k}_p(\omega_p). \tag{126.3}$$

C'est la condition de *synchronisme de phase* de l'onde de pompage et des ondes de fréquences ω_1 et ω_2. La condition (124.7) est un cas particulier de (126.3). On s'en rend compte en écrivant (124.7) sous la forme

$$\boldsymbol{k}(\omega) + \boldsymbol{k}(\omega) = \boldsymbol{k}_2(2\omega)$$

et en appliquant cette relation au processus de formation d'une onde de fréquence ω à partir de son deuxième harmonique.

Lorsque la condition de synchronisme est réalisée, dans un milieu non linéaire l'énergie de l'onde de pompage sera transférée aux ondes de fréquences ω_1 et ω_2. Pour assurer une amplification efficace de ces ondes, il faut que l'onde de pompage traverse un grand nombre de fois le milieu non linéaire (un cristal). On dispose le cristal dans un *résonateur optique entre deux miroirs*. Les coefficients de réflexion des deux miroirs doivent être grands pour les deux fréquences ω_1 et ω_2, mais l'un de ces miroirs doit avoir une transparence suffisante pour laisser entrer l'onde de pompage dans le résonateur. Si ces conditions sont réalisées et si l'onde de pompage possède une grande énergie, on obtient une génération d'ondes de fréquences ω_1 et ω_2 vérifiant les conditions (126.1) et (126.3).

Il n'est pas nécessaire d'envoyer dans le résonateur des ondes de fréquences ω_1 et ω_2 car elles s'y forment aux dépens des *bruits* ou des *fluctuations thermiques*. Il se produit une *autoexcitation* du générateur suivie d'une amplification des ondes générées, résultant

de leurs interactions avec l'onde de pompage. Généralement on utilise comme onde de pompage le deuxième ou le troisième harmonique du rayonnement d'un laser à rubis ou au néodyme.

2. *Dans la région de dispersion normale d'un milieu isotrope, on ne peut satisfaire simultanément aux conditions* (126.1) *et* (126.3). Supposons d'abord que les trois ondes de fréquences ω_p, ω_1 et ω_2 se propagent dans la même direction. La condition (126.3) peut s'écrire alors sous la forme $\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2 = \omega_p n_p$, où n_1, n_2 et n_p sont les indices de réfraction à ces trois fréquences. Compte tenu de (126.1) on en tire $(n_p - n_1)\,\omega_1 + (n_p - n_2)\,\omega_2 = 0$, résultat irréalisable, puisque $(n_p - n_1) > 0$ et $(n_p - n_2) > 0$. Il s'ensuit que le nombre d'onde k_p est toujours supérieur à la somme des nombres d'onde k_1 et k_2, *quelle que soit la direction de propagation des ondes.* La condition (126.3) ne peut être satisfaite si les vecteurs $\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_2$ et $\boldsymbol{k}_p$ ont des directions différentes, puisque si elle l'était ces trois vecteurs formeraient un triangle dont l'un des côtés serait plus long que la somme des deux autres côtés.

Dans certains cristaux on peut cependant assurer le synchronisme de phase de l'onde ordinaire et de l'onde extraordinaire. Dans le cas où les fréquences ω_1 et ω_2 peuvent être différentes, il est plus facile de réaliser le synchronisme que dans le cas de la génération des harmoniques deux ou trois (cf. § 124). En principe le synchronisme pourrait être réalisé dans les quatre cas suivants:

$$\begin{aligned} &1)\ \boldsymbol{k}_p^e = \boldsymbol{k}_1^o + \boldsymbol{k}_2^e, \quad 2)\ \boldsymbol{k}_p^e = \boldsymbol{k}_1^o + \boldsymbol{k}_2^o, \\ &3)\ \boldsymbol{k}_p^o = \boldsymbol{k}_1^o + \boldsymbol{k}_2^e, \quad 4)\ \boldsymbol{k}_p^o = \boldsymbol{k}_1^e + \boldsymbol{k}_2^e, \end{aligned} \qquad (126.4)$$

où les indices *o* et *e* désignent l'onde ordinaire et l'onde extraordinaire. Dans les cristaux réels on ne peut satisfaire ni à toutes ces conditions ni même parfois à l'une d'elles. Ainsi, dans les cristaux uniaxes de diphosphate de potassium KH_2PO_4, les deux premières conditions sont vérifiées. Dans le premier cas, le long de la « direction de synchronisme », l'onde extraordinaire de pompage génère dans le cristal une onde ordinaire de fréquence ω_1 et une onde extraordinaire de fréquence ω_2; dans le deuxième cas les deux ondes générées sont des ondes ordinaires. Dans les cristaux uniaxes de niobate de lithium $LiNbO_3$, présentant de fortes propriétés non linéaires, on ne peut satisfaire qu'à la deuxième condition (126.4).

En tournant le cristal (ou bien en élevant sa température ou en lui appliquant un champ électrique continu) on fait varier les fréquences ω_1 et ω_2 pour lesquelles la direction de synchronisme est perpendiculaire aux miroirs. C'est ainsi que fonctionnent les *générateurs paramétriques de lumière cohérente à fréquence réglable.* Le rendement de ces générateurs, défini par le rapport des puissances des ondes générées à la puissance de l'onde de pompage, atteint plusieurs pour cent, la puissance de sortie étant de plusieurs dizaines

ou plusieurs centaines de kW. Il est évident que les fréquences ω_1 et ω_2 sont *toujours plus petites* que la fréquence de pompage ω_p. En accordant lentement un générateur paramétrique de lumière, on peut parcourir tout le spectre visible du rouge au violet et pénétrer dans l'infrarouge lointain.

3. Si on multiplie (126.1) par la constante de Planck $\hbar$ on obtient

$$\hbar\omega_p = \hbar\omega_1 + \hbar\omega_2. \qquad (126.5)$$

En physique quantique on interprète cette relation comme exprimant la *décomposition du photon* $\hbar\omega_p$ *en deux photons* $\hbar\omega_1$ et $\hbar\omega_2$; l'équation (126.5) exprime la *loi de conservation de l'énergie* pour ce processus élémentaire. De même au point de vue quantique, la génération du deuxième harmonique résulte de l'*interaction de deux photons*, chacun d'énergie $\hbar\omega$, qui conduit à l'*apparition d'un photon* $\hbar\omega_2$ *de fréquence* $\omega_2 = 2\omega$. On peut interpréter de la même façon la génération d'harmoniques de troisième ordre et d'ordres supérieurs ainsi que la génération d'ondes de fréquences égales à la somme ou à la différence des fréquences initiales. Nous n'approfondirons pas ici ces questions car les phénomènes quantiques font l'objet du cinquième tome de notre cours.

INDEX DES NOMS

INDEX DES MATIÈRES

Imprimé en Union Soviétique

TABLE DES MATIÈRES